

< 논 문 >

속도변환기법을 이용한 기계시스템의 역동역학 해석

이병훈* · 양진생** · 전우정**

(1995년 10월 19일 접수)

Inverse Dynamic Analysis of Mechanical Systems Using the Velocity Transformation Technique

Byung Hoon Lee, Jin Saeng Yang and Woo Jeong Jeon

Key Words : Mechanical System(기계시스템), Inverse Dynamics(역동역학), Inverse Velocity Transformation(역속도변환)

Abstract

This paper presents a method for the inverse dynamic analysis of mechanical systems. Actuating forces (or torques) depending on the driving constraints are analyzed in the relative coordinate space using the velocity transformation technique. A systematic method to compose the inverse velocity transformation matrix, which is used to determine the joint reaction forces, is proposed. Two examples are taken to verify the method developed here.

1. 서 론

기계시스템들의 운동을 해석하는데 있어서 운동방정식의 유도는 좌표의 선택에 따라 직교좌표(Cartesian coordinates) 또는 상대 조인트좌표(relative joint coordinates)를 사용하는 2가지 경우로 구분할 수 있다. 직교좌표를 사용하는 경우,^(1,2) 시스템 운동방정식의 유도가 간단하고 각 물체들의 연결관계를 나타내는 기구학적 구속조건을 라그랑지 승수를 이용하여 쉽게 결합시킬 수 있으며, 이에 따른 조인트 반력은 간단히 구해진다. 그러나 이 방법으로는 물체들 사이의 상대운동을 직접 구할 수 없으므로 시스템의 제어에 적용하는 데에는 난점이 있다. 또한 시스템을 구성하는 물체의 수가 많아지면 운동방정식과 조인트에 따르는 구속조건식의 수가 많아지므로 시뮬레이션 과정에서 운동방

정식의 적분 및 구속조건을 만족시키기 위한 계산량이 많이 요구된다. 반면에 상대좌표를 사용하여 운동방정식을 기술하는 경우,^(3,4) 최소의 미분방정식 및 대수방정식을 얻게 되므로 효율적인 수치적분을 할 수 있으나 운동방정식의 유도는 직교좌표의 경우보다 복잡하고 구속조건을 포함시키는데 어려움이 있어 일반적이고 체계적인 프로그램을 개발하는 데에 어려움이 있다. 또한 외력에 대한 시스템의 운동을 해석하는 정동역학(direct dynamics) 문제 외에 주어진 운동을 만드는데 필요한 구동력 및 조인트에 작용하는 반력을 구하는 역동역학(inverse dynamics) 문제에 있어서 상대좌표를 사용하면 각 조인트의 자유도에 따른 실제 구동력 또는 토크를 직접 구할 수 있으므로 시스템의 운동제어에 효과적이다. 그러나 폐쇄계(closed-loop systems)의 절단조인트를 제외한 모든 조인트의 기구학적 구속조건이 운동방정식에 결합되지 않으므로 조인트 반력은 시스템의 운동을 해석한 후 직교좌표공간에서 말단물체(tree-end body)로부터 내향

*회원, 부산대학교 기계공학과

**부산대학교 대학원

경로 (inward path)를 따라 순차적으로 구하여야 한다.

본 연구에서는 역동역학 해석에 적합하다고 알려진 속도변환기법 (velocity transformation technique)⁽⁶⁾을 이용하여 강체로 구성된 기계시스템에 부가되는 구동조건에 대한 실제 구동력을 상대좌표 공간에서 해석한다. 그리고 시스템의 직교속도벡터를 상대속도벡터로 변환하는 역속도변환행렬 (inverse velocity transformation matrix)을 체계적으로 구성하는 방법을 제시하고, 이 행렬을 이용하여 각 조인트에 작용하는 반력을 직교좌표공간에서 해석한다. 제시된 방법의 타당성을 다관절 기구의 평면 및 공간운동 해석을 통하여 확인한다.

2. 운동방정식

Fig. 1에서 물체 *i*의 관성좌표계에 대한 위치는 이 물체에 설정한 이동좌표계 원점의 관성좌표계에 대한 위치좌표 r^i , 이동좌표계의 자세를 나타내는 오일러 매개변수 $p^i = [p_1^i \ p_2^i \ p_3^i \ p_4^i]^T$ 로 나타낼 수 있다. 따라서 물체 *i*의 직교좌표벡터 x^i 를 다음과 같이 나타낸다.

$$x^i = [r^{iT} \ p^{iT}]^T \tag{1}$$

물체 *i*의 상대좌표는 그 물체의 기준물체 (reference body)와의 조인트에서의 상대적 회전각 및 병진거리로 정의되며 조인트 유형에 따라 운동 형태 및 자유도 수가 결정된다. 그리고 기초물체 (base body)의 상대좌표는 그 물체의 직교좌표로서 정의한다. 본 연구에서는 이와 같이 정의되는 상대좌표를 물체 *i*의 일반좌표 q^i 로 한다.

시스템의 운동방정식을 라그랑지방정식과 속도 및 가속도변환식을 이용하여 일반좌표로 유도한 결

과⁽⁴⁾는 다음과 같다.

$$M^* \ddot{q} = Q + \Phi_q^T \lambda \tag{2}$$

$$M^* = S^T M S \tag{3}$$

$$Q = S^T [F - M \dot{S} \dot{q} - \dot{M} \dot{x} + \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} \right)^T] \tag{4}$$

여기서, M 과 K 는 각각 시스템의 질량 및 강성 행렬, T 는 운동에너지, F 는 직교좌표공간에서의 외력벡터, Φ_q 는 구속조건식 ($\Phi=0$)의 자코비안행렬, λ 는 라그랑지승수이며 $\Phi_q^T \lambda$ 는 구속조건에 따른 일반좌표공간에서의 구속력을 의미한다. 그리고 S 는 시스템의 일반속도벡터를 직교속도벡터로 변환시키는 속도변환행렬이다.

구속조건식의 2차 시간미분과 식 (2)를 결합하면 다음과 같은 행렬형이 된다.

$$\begin{bmatrix} M^* & \Phi_q^T \\ \Phi_q & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q} \\ -\lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q \\ \gamma \end{bmatrix} \tag{5}$$

여기서,

$$\begin{aligned} \gamma &= -\Phi_q \ddot{q} - \dot{\Phi}_q \dot{q} - \ddot{\Phi}_q \\ \Phi_q &= \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}} \right) \end{aligned} \tag{6}$$

식 (5)로부터 시스템의 일반좌표공간에서의 운동 및 구속력을 구할 수 있으며 속도 및 가속도 변환식을 이용하여 절대운동으로 변환할 수 있다.

3. 좌표계에 따른 힘벡터

3.1 직교력 및 일반력

Fig. 1에 보인 바와 같이 물체 *i*상의 임의의 점 P^{ki} 에 작용하는 힘 f^{ki} 와 모멘트 n^{ki} 는 직교좌표 공간에서 다음과 같이 표현될 수 있다.⁽⁶⁾

$$F^i = \begin{bmatrix} f^{ki} \\ 2E^{iT} s^{ki} f^{ki} + 2E^{iT} n^{ki} \end{bmatrix} \tag{7}$$

여기서, s^{ki} 는 $x^i y^i z^i$ 좌표계 원점에서 점 P^{ki} 의 위치벡터, A^i 는 $x^i y^i z^i$ 좌표계로부터 관성좌표계로의 좌표변환행렬이며 E^i 는 다음과 같이 오일러 매개변수 p^i 의 요소로 정의되는 (3×4) 행렬이다.

$$E^i = \begin{bmatrix} -p_1 & p_0 & -p_3 & p_2 \\ -p_2 & p_3 & p_0 & -p_1 \\ -p_3 & -p_2 & p_1 & p_0 \end{bmatrix}_i \tag{8}$$

시스템에 작용하는 모든 힘과 모멘트의 직교력 (Cartesian force) 벡터 F 는 다음과 같다.

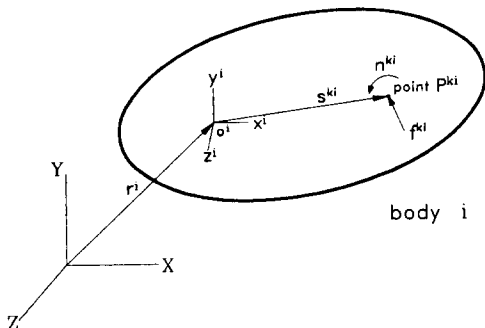


Fig. 1 External forces acting on body *i*

$$F = [F^{1r} \ F^{2r} \ \dots \ F^{nr}]^T \quad (9)$$

여기서, n 은 시스템을 구성하는 물체수이다.

이 힘벡터로부터 조인트의 상대자유도에 따른 일반좌표공간에서의 힘, 즉 일반력(generalized force) 벡터 Q 는 속도변환행렬 S 를 이용하여 다음과 같이 구할 수 있다.

$$Q = S^T F \quad (10)$$

한편 일반력은 다음의 과정을 통하여 직교좌표공간에서의 힘으로 변환될 수 있다. 일반력 Q 의 시스템에 대한 가상일 δW 는 다음과 같다.

$$\delta W = Q^T \delta q \quad (11)$$

여기서, δq 는 일반좌표의 가상변위이며 직교좌표 가상변위 δx 와 다음과 같은 관계를 가진다.⁽³⁾

$$\delta q = \frac{\partial q}{\partial x} \delta x = \frac{\partial \dot{q}}{\partial \dot{x}} \delta \dot{x} = R \delta \dot{x} \quad (12)$$

여기서, R 을 역속도변환행렬로 정의하며 다음 절에서 유도한다.

식 (12)를 이용하면 식 (11)은 다음과 같이 표현된다.

$$\delta W = Q^T R \delta \dot{x} = (R^T Q)^T \delta \dot{x} = F_{eq}^T \delta \dot{x} \quad (13)$$

여기서,

$$F_{eq} = R^T Q \quad (14)$$

로 주어지며, 일반력에 대한 등가 직교력(equiva-

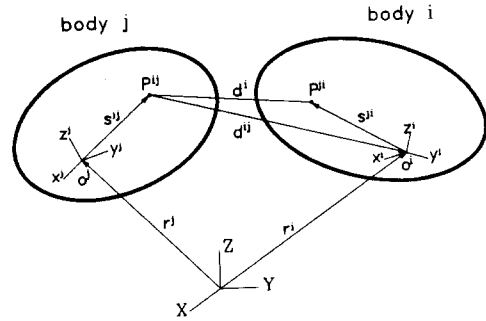


Fig. 2 Two contiguous bodies connected by a joint

lent Cartesian force)으로 정의한다.

3.2 역속도변환

기구학적 조인트로 연결된 두 물체사이의 상대운동은 그 물체들의 절대운동으로부터 구할 수 있다. Fig. 2에서 물체 i 의 이동좌표계 원점의 절대속도 v^i 및 좌표계의 각속도 w^i 는 그 기준물체 j 의 그것과 다음과 같은 관계를 가진다.

$$v^i = v^j + \dot{w}^j s^{ij} + \sum_k \in_k \dot{q}_k e_k + \dot{w}^i d^{ij} \quad (15)$$

$$w^i = w^j + \sum_k (1 - \in_k) \dot{q}_k e_k \quad (16)$$

여기서, e_k 는 조인트 축방향의 단위벡터, k 는 다자유도 조인트에 대한 지칭, \dot{w} 는 $\dot{w}s = w \times s$ 가 되도록 w 의 요소로 정의되는 (3×3) 행렬이며 d^{ij} 및 \in_k 는 각각 다음과 같이 정의한다.

Table 1 Block matrix R_{ij} and R_{ii} corresponding to the connection type of the i -th body

Joint	R_{ij}	R_{ii}
Base body		$\begin{bmatrix} I_3 & 0 \\ 0 & I_4 \end{bmatrix}$
Rotational joint	$[0 \ -2e^T E^j]$	$[0 \ 2e^{iT} E^j]$
Universal joint	$\begin{bmatrix} 0 & -2E_1^T E^j \\ 0 & -2e_e^T E^j \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 2e_1^T E^j \\ 0 & 2e_e^T E^j \end{bmatrix}$
Spherical joint	$\begin{bmatrix} 0 & -2e_1^T E^j \\ 0 & -2e_e^T E^j \\ 0 & -2e_3^T E^j \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 2e_1^T E^j \\ 0 & 2e_e^T E^j \\ 0 & 2e_3^T E^j \end{bmatrix}$
Translational joint	$[-e^{iT} \ 2e^{iT} \tilde{s}^{ij} E^j]$	$[e^{iT} \ 2e^{iT} \tilde{d}^{ij} E^j]$
Cylindrical joint	$\begin{bmatrix} 0 & -2e^{iT} E^j \\ -e^{iT} & 2e^{iT} \tilde{s}^{ij} E^j \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 2e^{iT} E^j \\ e^{iT} & 2e^{iT} \tilde{d}^{ij} E^j \end{bmatrix}$

$$d^{ii} = -s^{ji} + \sum_k \in_k q_k^i e_k^i \quad (17)$$

$$\in_k^i = \begin{cases} 0, & \text{if } q_k^i \text{ is a rotational joint coordinate} \\ 1, & \text{if } q_k^i \text{ is a translational joint coordinate} \end{cases} \quad (18)$$

물체 i 의 기준물체에 대한 상대속도 \dot{q}_k^i 는 위의 식 (15)와 (16)을 이용하여 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\dot{q}_k^i = \begin{cases} (w^i - w^j)^T e_k^i & \text{for rotational joint} \\ v^i - v^j - \bar{w}^i d^{ii} - \bar{w}^j s^{ij})^T e_k^i & \text{for translational joint} \end{cases} \quad (19)$$

따라서 물체 i 의 일반속도 벡터 \dot{q}^i 는 다음과 같은 행렬형으로 표현될 수 있다.

$$\dot{q}^i = R_{ij} \dot{x}^j + R_{ii} \dot{x}^i \quad (20)$$

여기서, R_{ij} 와 R_{ii} 는 블록행렬로서 물체 i 가 기준물체 j 에 연결된 조인트 유형에 따라 Table 1과 같이 정리할 수 있다.

$i=1, 2, \dots, n$ 에 대한 식 (20)을 모두 결합하면, 다음과 같은 형태의 역속도변환식을 얻을 수 있다.

$$\dot{q} = R \dot{x} \quad (21)$$

여기서, R 은 시스템의 직교속도벡터(Cartesian velocity vector) \dot{x} 를 일반속도벡터(generalized velocity vector) \dot{q} 로 변환하는 역속도변환행렬로서 시스템의 기준행렬(reference matrix)⁽³⁾에 따라 체계적으로 구성할 수 있다.

4. 구동력 및 조인트반력

구속조건에는 폐쇄계의 조인트 절단에 따르는 기구학적 구속 및 조인트 구동, 물체상의 임의점의 위치구동 또는 물체의 자세구동 등의 구동구속조건이 있다. 이러한 구속조건은 상대좌표 또는 직교좌표의 함수로 기술되는 두가지 형태로 구분할 수 있는데 상대좌표로 기술될 경우에는 앞에서 정의한 일반좌표공간에서 구속조건을 가속도식 유도가 간단하므로 본 논문에서는 다음과 같이 직교좌표로 기술된 구속조건에 대하여 구동력 및 조인트 반력을 해석한다.

$$\Phi = \Phi(x, t) = 0 \quad (21)$$

구속조건을 만족시키는 시스템의 운동을 해석하기 위하여 구속조건에 대한 가속도식을 구하여 식 (2)의 운동방정식과 결합하여 풀게 된다.

이때 구속조건을 가속도식은 운동방정식과 마찬가지로 일반좌표 공간에서 기술되어야 하며 그 야코비안 Φ_q 와 우변항 γ 는 각각 다음과 같이 유도된다.

$$\Phi_q = \Phi_x S \quad (22)$$

$$\gamma = -\dot{\Phi}_x \dot{x} - \dot{\Phi}_t - \Phi_x \dot{S} \dot{q} = -(\Phi_x \ddot{x})_x \dot{x} - 2\Phi_{xt} \dot{x} - \Phi_{tt} - \Phi_x \dot{S} \dot{q} \quad (23)$$

한편 주어진 운동을 일으키는 구동력은 구속조건이 부가되는 물체나 물체들을 연결하는 조인트에 가해질 수 있다. 이때 구동력을 작용시키는 위치에 따라 그 형태와 크기가 다르며 따라서 조인트에 작용하는 반력도 다르게 된다.

구동력이 물체에 작용하는 경우, 이 힘의 직교력 벡터는 $\Phi_x^T \lambda$ 이며 다음 식으로부터 물체 i 의 임의점 P^{hi} 에 작용하는 구동력 f_a^i 및 구동토크 n_a^i 를 구할 수 있다.

$$\Phi_x^T \lambda = \begin{bmatrix} f_a^i \\ 2E^{iT} s^{hi} f_a^i + 2E^{iT} n_a^i \end{bmatrix} \quad (24)$$

그리고 조인트에 작용하는 구동력의 일반력 벡터는 $\Phi_q^T \lambda$ 로 주어지며 물체 i 의 조인트에는 그 조인트의 자유도에 따라서 크기가 $\Phi_{qi}^T \lambda$ 인 구동력 또는 구동토크가 작용하게 된다.

이 조인트 구동력의 직교좌표공간에서의 등가 직교력은 식 (14)에 따라 $R^T \Phi_{qi}^T \lambda$ 가 된다.

Fig. 3은 조인트로 연결되어 이웃하는 세물체를 나타낸다. 물체 j 와 h 는 각각 물체 i 의 내향경로 및 외향경로(outward path)상의 물체들이다.

직교좌표공간에서 물체 i 의 운동방정식은 다음과 같이 표현된다.

$$M^i \ddot{x}^i = F_a^i + F_j^i + F_h^i - \dot{M}^i \dot{x}^i + \left(\frac{\partial T^i}{\partial \dot{x}^i} \right)^T \quad (25)$$

여기서, F_a^i 는 구동력의 직교력벡터, F_j^i 는 이웃

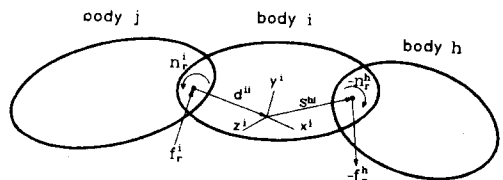


Fig. 3 Joint reaction forces acting on body i

하는 물체 h 및 j 와의 조인트에 작용하는 조인트 반력의 직교력벡터, F_r^i 는 그 외의 외력에 대한 직교력벡터이며 조인트반력벡터는 다음과 같다.

$$F_r^i = \begin{bmatrix} (1-\delta_{ii})f_r^i - (1-\delta_{ni})f_r^h \\ (1-\delta_{ii})[2E^{iT}(-\bar{a}^{ii}f_r^i) + 2E^{iT}n_r^i] \\ -(1-\delta_{ni})[2E^{iT}\bar{s}^{hi}f_r^h + 2E^{iT}n_r^h] \end{bmatrix} \quad (26)$$

여기서, f_r^i , n_r^i 는 물체 j 와의 조인트에서 물체 i 에 작용하는 반력 및 반작용토크이다. 또한 δ_{ii} 및 δ_{ni} 의 하첨자 1과 n 은 각각 기초물체 (base body)와 말단물체 번호이며, δ_{ij} 는 Kronecker delta이다.

시스템의 절대운동을 해석한 후 각 조인트에 걸리는 조인트반력을 말단물체로부터 내향경로를 따라 순차적으로 계산하게 되며, 물체 i 에 작용하는 반력은 식 (26)으로부터 구할 수 있다.

앞에서 구한 조인트반력 및 토크의 $x^i y^i z^i$ 좌표계에서의 성분 f_r^i , n_r^i 은 각각 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$f_r^i = A^{iT} f_r^i \quad (27)$$

$$n_r^i = A^{iT} n_r^i \quad (28)$$

5. 수치예제

본 연구에서 개발된 알고리즘을 이용하여 구동조건이 주어지는 다관절기구의 역동역학 해석을 수행하였다. Fig. 4는 회전조인트로 연결된 2관절 평면 운동기구로서 각 링크의 길이는 2m이고, 질량은 100 kg이다. 초기 $\theta=0^\circ$ 인 정지상태에서 조인트 2에 두 링크 사이의 상대적 회전이 없도록 조인트 구동조건($q^2 = \text{const.}$)을 부여하여 낙하시켰다. 이때 구동조건에 따른 조인트 구동토크는 Fig. 5와 같이 나타났다. 그리고 Fig. 6에서 보듯이 구동조건을 주었을 경우와 역동역학 해석에서 얻어진 구동토크를 외력으로 입력하였을 경우, 기구의 끝점이 움직이는 궤적이 잘 일치하고 있다. 또한 Fig. 7과 Fig. 8은 위의 두 경우에 있어서 조인트 1에 걸리는 X, Y 방향의 반력들도 각각 잘 일치함을 보여주며 이

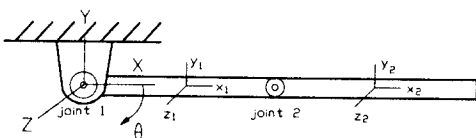


Fig. 4 A double link system

결과들은 다음과 같이 주어지는 엄밀해와도 일치하였다.

$$f_r = \begin{bmatrix} -2207.25 \sin 2\theta \\ 4905.0 \sin^2 \theta + 490.5 \cos^2 \theta \end{bmatrix} \quad (29)$$

Fig. 9는 5관절 공간운동기구로서 기구의 끝점이 XY평면에서 반경 0.3 m의 원을 그리도록 링크 4

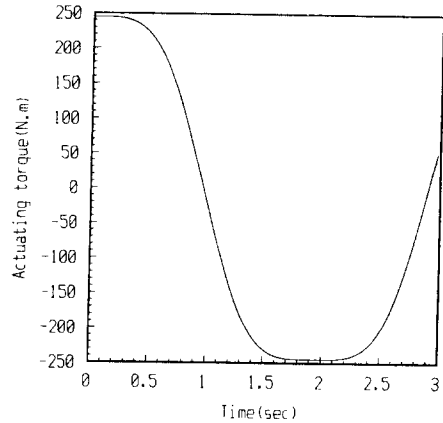


Fig. 5 Actuating torque at joint 2

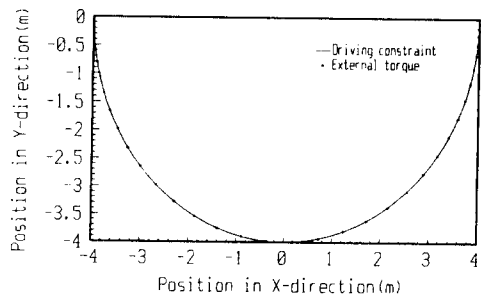


Fig. 6 Tip position of body 2 in the XY plane

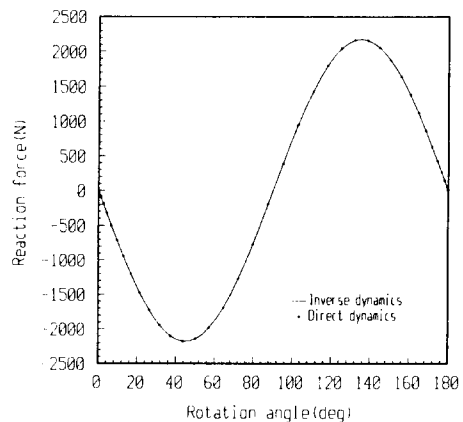


Fig. 7 Joint reaction force in X-direction

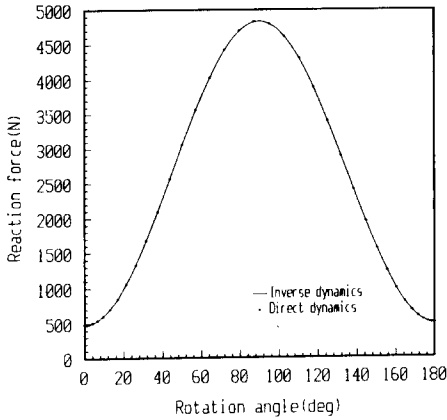


Fig. 8 Joint reaction force in Y-direction

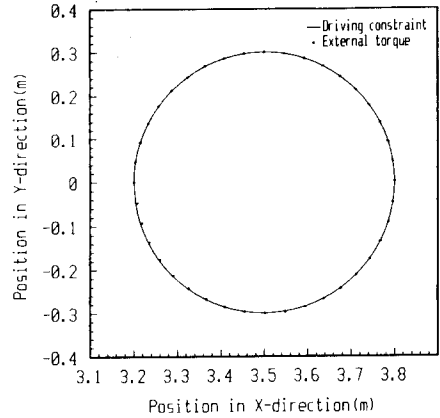


Fig. 10 Tip position of body 5 in the XY plane

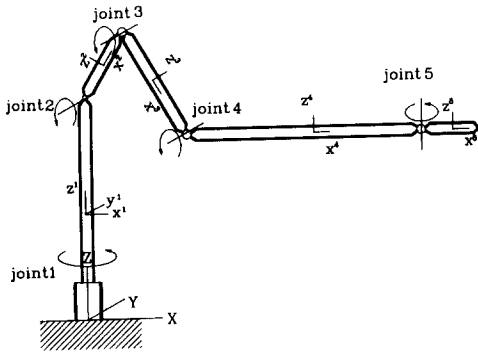


Fig. 9 Configuration of a 5-links system

와 5에 다음과 같은 5개의 위치 구동조건을 주었다.

$$\phi^1 = x^5 + s_x^5 - 0.3 \cos 2\pi t - C_1 = 0 \quad (30)$$

$$\phi^2 = y^5 + s_y^5 - 0.3 \sin 2\pi t = 0 \quad (31)$$

$$\phi^3 = y^4 + s_y^4 - 0.3 \sin 2\pi t = 0 \quad (32)$$

$$\phi^4 = z^5 + s_z^5 - C_e = 0 \quad (33)$$

$$\phi^5 = z^4 + s_z^4 - C_e = 0 \quad (34)$$

여기서, C_1, C_e 는 각각 링크의 길이에 따라 주어지는 상수이고, s^4 는 링크 4의 이동좌표계 원점에서 조인트 5까지의 위치벡터이고, s^5 는 링크 5의 이동좌표계 원점에서 링크 끝점까지의 위치벡터이다. 이때 끝점이 그리는 궤적은 역동역학 해석을 통해서 구한 각 조인트의 구동토크를 외력으로 입력하였을 경우와 잘 일치하였다.

따라서 본 연구에서 제시한 구동조건에 따른 조인트 구동력 및 조인트반력을 구하는 역동역학 해석 방법이 타당함을 알 수 있다.

6. 결 론

강체계의 역동역학 해석을 위하여 시스템에 추가되는 구동조건에 대한 구동력을 속도변환기법을 이용하여 상대좌표공간에서 해석하였다. 그리고 시스템의 직교속도벡터를 상대속도벡터로 변환하는 역속도변환행렬을 체계적으로 구성하는 방법을 제시하고, 이 행렬을 이용하여 각 조인트에 작용하는 반력을 해석하였다. 조인트 구동 또는 위치 구동조건이 주어지는 다관절 시스템에 대한 역동역학 해석 결과가 정동역학 해석 및 엄밀해 결과와 잘 일치하여 제시된 방법의 타당성을 확인하였다.

후 기

본 연구는 1994년도 한국과학재단 핵심전문연구(과제번호: 941-1000-044-1) 지원에 의해 수행되었으며, 이에 관계자 여러분께 감사를 드린다.

참고문헌

- (1) Orlandea, N., Chace, M. A. and Calahan, D. A., 1977, "A Sparsity-Oriented Approach to the Dynamic Analysis and Design of Mechanical Systems-Part I & II," *Trans. of ASME, Journal of Engineering for Industry*, pp. 773~784.
- (2) Nikravesh, P. E. and Chung, I. S., 1982, "Application of Euler Parameters to the Dynamic Analysis of Three Dimensional Constrained

- Mechanical Systems," *Journal of Mechanical Design*, Vol. 104, pp. 785~791.
- (3) Kim, S. S. and Vanderploeg, M. J., 1986, "A General and Efficient Method for Dynamic Analysis of Mechanical Systems using Velocity Transformations," *Trans. of ASME, Journal of Mechanisms, Transmissions, and Automation in Design*, Vol. 108, pp. 176~182.
- (4) Lee, B. H., Yoo, W. S. and Kwak, B. M., 1993, "A Systematic Formulation for Dynamics of Flexible Multibody Systems Using the Velocity Transformation Technique," *J. Mechanical Engineering Science, IMechE*, Vol. 207, No. c4, pp. 231~238.
- (5) Jerkovsky, W., 1978, "The Structure of Multibody Dynamics Equations," *Journal of Guidance and Control*, Vol. 1, No. 3, pp. 173~182.
- (6) Nikravesh, P., 1988, *Computer Aided Analysis of Mechanical System*, Prentice Hall, Inc..