

〈논 문〉

파라미터오차 및 모달필터오차에 대한 독립모달공간 제어기법의 강인성 해석

황재혁* · 김준수**

(1996년 5월 31일 접수)

Robustness of Independent Modal Space Control for Parameter and Modal Filter Errors

Jai-Hyuk Hwang and Joon-Soo Kim

Key Words: Robustness Analysis(강인성 해석), Parameter Error(파라미터오차), Modal Filter Error(모달필터오차), Vibration Control(진동제어), Asymptotic Stability Condition(점근안정조건)

Abstract

In this study, the effect of parameter and modal filter errors on the vibration control characteristics of flexible structures is analyzed for IMSC(Independent Modal Space Control). If the control force is designed on the basis of the mathematical model with the parameter and modal filter errors, the closed-loop performance of the vibration control system will be degraded depending on the magnitude of the errors. An asymptotic stability condition of the system with parameter and modal filter errors has been derived using Lyapunov approach. It has been found that modal filter error has more significant effect on the stability of closed-loop system than parameter error does. The extent of the response deviation of the closed-loop system is also derived and evaluated using operator techniques.

1. 서 론

연속체의 진동을 모드제어기법을 통해 제어하고자 할 때, 많이 사용하는 가정은 제어모드의 고유해와 모달상태를 정확히 얻을 수 있다는 것이다. 그러나 이러한 가정은 실제와 다를 수 있으며, 고유함수의 오차와 모달상태의 추정오차는 실제 진동계의 케루프 성능에 많은 영향을 미치게 된다. 또한 연속체의 운동을 편미분방정식으로 표현할 때, 운동방정식에 포함되는 파라미터에는 오차가 항상

존재할 수 있다. 비록 운동방정식을 정확하게 표현했다고 하더라도 계의 복잡성때문에 고유해를 근사적으로 계산해야 한다. 고유해를 계산할 때 발생하는 오차의 모양은 파라미터오차와 동일하므로 본 연구에서 이를 파라미터오차라 부르며, 따라서 파라미터오차는 2종류의 오차를 포함하고 있다. 일반적으로 강인성 해석을 위한 모델의 불확실성은 파라미터오차의 unmodelled 동역학으로 크게 나눌 수 있다. 본 연구에서는 모달필터에 의해 unmodelled 동역학의 스킬오버(spillover)를 없앨 수 있다고 가정하고 있으므로 unmodelled 동역학의 영향은 다루지 않는다.

모드제어기법을 통해 구조물의 진동을 제어하고자

*회원, 한국항공대학교 항공기공학과

**한국항공대학교 대학원

하면 반드시 모달변위와 모달속도를 알아야 한다. 즉, 진동을 억제하기 위한 피드백 제어력을 계산하기 위해 모달상태의 추정이 필요하게 된다. 일반적으로 실제 센서는 진동계의 실제변위를 측정하므로 센서의 정보로부터 모달상태를 알아내는 작업이 필요하게 된다. 이 작업을 가능하게 하는 장치로는

관측기(observer)와 모달필터(modal filter)^(1~4)가 있다. 관측기를 사용하여 이산화된(discretized) 분포계의 제어모드(controlled mode)의 상태를 추정하면, 잔류모드(residual mode)와 관련된 관측스필오버와 작동기에 의한 제어스필오버가 발생하여 전체 시스템이 불안정해지는 결과를 초래하게 된다. 그러나, 확장의 원리(expansion theorem)를 이용한 모달필터를 사용하면 센서에서 측정할 값을 분포된 출력으로 근사화시킬 수 있으므로 관측스필오버를 최소화할 수 있다. 만일 센서의 수를 증가시키면 결과는 점점 정확하게 되는 장점이 있다. 모달필터는 Meirovitch와 Baruh^(1,2)에 의해 제안되었으며, 후에 여러 연구에 의해 발전되어 사용되어지고 있다.^(3,4) 그러나 모달필터는 진동계의 파라메타오차, 사용되는 고유함수와 부정확성, 센서의 개수, 보간함수 등에 의해 오차를 가지게 된다. 이와 같이 파라메타오차 및 모달필터 오차가 동시에 존재할 때, 수학적 모델을 근거로 하여 제어력을 설계한 후 실제계에 적용하면 페루프의 성능이 어떻게 변할 것인가 하는 질문을 할 수 있다. 즉, 제어계가 파라메타오차 및 모달필터오차에 대해 강인한가 하는 문제이다.

유연구조물의 진동제어기법으로 여러 제어기법이 제안되었으나, 대부분의 제어기법은 계의 자유도가 증가할수록 제어계인을 계산하고 실제로 적용하는데 어려움이 많다. Meirovitch와 공동연구자^(5~7)들은 구조물의 진동제어를 위해 독립된 모달공간에서 제어기를 간단하고 쉽게 설계할 수 있는 독립모달공간 제어기법(independent modal space control)을 제안하였다. 이 기법은 모달행렬을 변환행렬로 하여 구조물의 운동방정식을 모달좌표계의 비결합된 방정식으로 분리시킨 후 모달공간에서 제어기를 설계한다. 이 경우, 제어기의 설계는 각 모드별로 모달 상태를 이용하여 독립적으로 수행되므로 모델의 자유도수에 관계없이 설계가 항상 간단하다. 이 제어기법에서는 모달 제어력을 먼저 설계하고, 좌표변환을 통해 실제 제어력을 계산하게 된다. 그러나 이 제어기법은 제어모드의 수만큼 작동기의 수

가 필요하다는 단점을 갖고 있다.

근래 파라메타오차가 독립된 모달공간 제어기법의 안정성에 미치는 영향을 다룬 연구^(8~11)와 안정성 및 성능의 강인성에 미치는 영향을 다룬 연구^(12~14)가 수행되었다. 본 연구에서는 파라메타오차 및 모달필터오차가 모두 존재할 때 독립모달공간 제어기법의 특성에 미치는 영향을 연구하였다. 먼저 모달필터오차로 인한 모달상태 추정오차와 파라메타오차가 페루프의 안정성에 미치는 영향을 해석하였다. 그 결과 모달필터오차가 파라메타오차보다 페루프의 안정성에 심각한 영향을 미치고 있음을 확인할 수 있다. 파라메타오차는 모달필터오차를 유발시키는데 기여하므로 간접적으로 안정성에 영향을 미친다. 또한 파라메타오차 및 모달필터오차가 모두 존재할 때 진동제어 성능이 설계치로부터 벗어나는 응답오차의 상한(upper bound)을 연산자이론(operator techniques)을 사용하여 유도하였다. 일반적으로 페루프 응답오차의 상한은 파라메타오차 및 모달필터오차의 크기에 비례하고 있다.

2. 진동계의 파라메타오차

연속체의 진동방정식은 다음과 같은 상미분방정식으로 근사화될 수 있다.^(15, 16)

$$Ic\ddot{q}(t) + Acq(t) = f_c(t) \quad (1)$$

여기서, Ic 는 크기가 n 인 단위행렬이며, Ac 는 대각성분이 고유진동수의 제곱으로 구성된 대각행렬이다. 즉, $Ac = \text{diag}[\omega_1^2 \cdots \omega_n^2]$ 이다. 그리고 $f_c(t)$ 는 n 차원의 모달할벡터이다. 여기서, n 은 제어하고자 하는 모드의 개수를 뜻하며, $q(t)$ 는 제어기의 설계시 사용되는 모달변위벡터이다. 또한 식(1)을 얻은 과정에서 구조물의 감쇠력은 없는 것으로 간주하였다. 이 가정은 구조물의 진동특성 해석 및 진동제어기 설계시 보편적으로 받아들여지고 있다. 그러나 구조물의 감쇠력을 고려하는 경우에도 본 연구의 안정성에 대한 결과를 쉽게 변형하여 적용할 수 있다.

다음으로, 식 (1)을 유도하는데 활용된 수학적 모델이 시론에서 언급한 파라메타오차를 포함하고 있다면, 실제계의 운동방정식은 다음과 같은 형태로 표현될 수 있다.

$$Mc\ddot{v}(t) + Kcv(t) = f_c(t) \quad (2)$$

이 식에서는 모델의 모달변위벡터와 구분하기 위해 다른 변수 v_c 를 사용하였다. 여기서, M_c 와 K_c 는 대칭이며 양한정(positive definite)하나 더 이상 대각행렬은 되지 않는다. 이는 파라미터오차를 갖는 수학적 모델에서 얻어진 고유함수가 실제계에 대해서는 적교성을 만족시키지 못하기 때문이다. ΔM_c 와 ΔK_c 를 각각 질량행렬과 강성행렬에 기여하는 파라미터오차 행렬이라고 정의하면, 식(2)의 계수행렬은 $M_c = I_c + \Delta M_c$, $K_c = A_c + \Delta K_c$ 로 표현된다. 파라미터 오차가 비교적 적을 때는 M_c 와 K_c 는 각각 I_c 와 A_c 에 가깝게 접근하게 된다. 수학적 모델에서 적당한 성능이 만족되므로 최적 제어기를 독립된 모달공간에서 설계하였을 때, 제어력벡터는 다음과 같다.

$$f(t) = -K_P q_c(t) - K_V \dot{q}_c(t) \quad (3)$$

여기서, 제어게인 행렬 K_P 와 K_V 는 양한정하며 다음과 같다.

$$K_P = \text{diag}[k_{p1} \ k_{p2} \ \dots \ k_{pn}]$$

$$K_V = \text{diag}[k_{v1} \ k_{v2} \ \dots \ k_{vn}]$$

피드백게인 k_{pr} 과 k_{vr} 을 최적제어기법에 의해 구하면 다음과 같다.

$$k_{pr} = \omega_r(-\omega_r + \sqrt{\omega_r^2 + R_r^{-1}}), \quad r=1, 2, \dots, n$$

$$k_{vr} = \{2\omega_r(-\omega_r + \sqrt{\omega_r^2 + R_r^{-1}}) + R_r^{-1}\}^{1/2},$$

$$r=1, 2, \dots, n$$

여기서, R_r 은 제어력에 대한 가중치를 나타낸다. 또한 $\omega_r > 0$ 이므로 $k_{pr} > 0$ 과 $k_{vr} > 0$ 를 만족한다. 따라서 수학적 모델의 페루프 운동방정식은 다음과 같다.

$$I_c \ddot{q}_c(t) + K_V \dot{q}_c(t) + [A_c + K_P] q_c(t) = 0 \quad (4)$$

또한 설계된 제어력을 실제계에 적용하면 실제계의 페루프 운동방정식은 다음과 같다.

$$M_c \ddot{v}_c(t) + K_V \dot{v}_c(t) + [K_c + K_P] v_c(t) = 0 \quad (5)$$

일반적으로 수학적 모델의 파라미터오차는 실제 구조물의 거동을 원래 설계된 대로 일어나지 않게 한다. 또한 식(5)에서 보듯이 실제 페루프계는 파라미터오차 때문에 엄격한 관점에서 독립된 모달공간에서의 제어기법이 되지 못한다. 따라서 실제 구조물의 제어기는 그 성능이 저하될 것이며, 그 정도는 파라미터오차의 크기에 의존하게 된다.

3. 모달필터오차를 갖는 진동제어계

제어모드의 모달상태를 추정하는 모달필터^(1,2)는 다음과 같이 표현된다.

$$\hat{q}_c(t) = D y(t) \quad (6)$$

$$\dot{\hat{q}}_c(t) = D \dot{y}(t) \quad (7)$$

여기서, $\hat{q}_c(t)$ 는 추정된 모달변위벡터를, $\dot{\hat{q}}_c(t)$ 는 추정된 모달속도벡터를, $y(t)$ 는 변위센서 출력벡터를, $\dot{y}(t)$ 는 속도센서 출력벡터를 나타낸다. 일반성을 잃지 않고 계산의 단순성을 위해 일차의 분포제를 대상으로 삼으면, 위의 모달필터 행렬 D 는 다음과 같이 나타낼 수 있다.⁽²⁾

$$D_{ir} = I_{ir}^{(1)} + I_{ir}^{(2)},$$

$$i=1, 2, \dots, K, \quad r=1, 2, \dots, n \quad (8)$$

여기서,

$$I_{ir} = [I_{ir}^{(1)} \ I_{ir}^{(2)}]^T$$

$$= h \int_0^1 M(hi - h\xi) \phi_r(hi - h\xi) L(\xi) d\xi$$

$$I_{kr}^{(1)} = I_{kr}^{(2)} = 0, \quad 0 \leq \xi \leq 1$$

위 식에서 ϕ_r 은 r 번째 모드의 고유함수를, M 은 질량연산자를, h 는 $K-1$ 개의 각 요소들의 길이들, K 는 센서의 개수를, n 은 제어모드의 개수를 나타낸다. 그리고 $L(\xi)$ 은 모간함수벡터이다. 센서 출력으로 기울기 $y'(t)$ 와 각속도 $\dot{y}(t)$ 를 고려하면 더 좋은 정확성을 보이지만, 여기서는 생략하였다. 충분한 수의 센서만 있다면 변위와 속도만으로도 정확한 결과를 얻을 수 있다.

변위센서 출력벡터를 확장이론에 의해 다음과 같이 정의한다.^(15,16)

$$y_j(t) = w(x_j, t) = \sum_{r=1}^{\infty} \phi_r(x_j) q_r(t),$$

$$j=1, 2, \dots, K \quad (9)$$

이 식을 행렬을 이용하여 표현하면 다음과 같다.

$$y(t) = C q(t) \quad (10)$$

여기서,

$$C_{jr} = \phi_r(x_j), \quad j=1, 2, \dots, K, \quad r=1, 2, \dots$$

이제 전체 모드를 제어하고자 하는 제어모드 $q_c(t)$ 와 나머지 모드인 잔류모드 $q_R(t)$ 로 구분할 때 변위센서 출력벡터는 다음과 같이 표시된다.

$$y(t) = C_c q_c(t) + C_R q_R(t) \quad (11)$$

여기서,

$$\begin{aligned} C_c &= [C_{Cjr}], \quad C_{Cjr} = \phi_r(x_j), \\ j &= 1, 2, \dots, K, \quad r = 1, 2, \dots, n \\ C_R &= [C_{Rjr}], \quad C_{Rjr} = \phi_r(x_j), \\ j &= 1, 2, \dots, K, \quad r = n+1, n+2, \dots, \end{aligned}$$

같은 방법으로 속도센서 출력벡터는 다음과 같다.

$$\dot{y}(t) = C_c \dot{q}_c(t) + C_R \dot{q}_R(t) \quad (12)$$

식 (6), 식 (7)에 각각 식 (11), 식 (12)를 대입하면 다음식을 얻는다.

$$\hat{q}_c(t) = DC_c q_c(t) + DC_R q_R(t) \quad (13)$$

$$\hat{\dot{q}}_c(t) = DC_c \dot{q}_c(t) + DC_R \dot{q}_R(t) \quad (14)$$

만일 D 가 정확하다면 모달필터는 정확한 모달상태를 출력할 것이고 $\hat{q}_c(t)$, $\hat{\dot{q}}_c(t)$ 는 각각 $q_c(t)$, $\dot{q}_c(t)$ 와 같아지게 된다. 그 조건은 다음과 같다.

$$DC_c = I_c, \quad DC_R = 0$$

여기서, I_c 는 n 차의 단위행렬을 나타낸다. 그러나 D 가 부정확하다면 정확한 값을 출력하지 못하게 되고 $\hat{q}_c(t)$, $\hat{\dot{q}}_c(t)$ 는 각각 $q_c(t)$, $\dot{q}_c(t)$ 와 차이가 생기게 된다. 또한 이 값을 피드백시키는 경우 성능을 저해시키게 된다.

이제 독립모달공간 제어기법을 적용하여 각 모드들이 서로 독립적으로 제어되도록 설계하고자 한다.

$$f(t) = -K_p q_c(t) - K_v \dot{q}_c(t) \quad (15)$$

여기서, 제어게인 행렬 K_p 와 K_v 는 전 절에서 정의된 바와 같다. 그러나 모달변위 $q_c(t)$ 와 모달속도 $\dot{q}_c(t)$ 는 실제로 측정할 수 없으므로 모달필터에 의해 추정된 모달변위 $\hat{q}_c(t)$ 와 모달속도 $\hat{\dot{q}}_c(t)$ 를 사용해야 한다. 따라서 위의 제어력은 다음과 같이 바뀌게 된다.

$$f(t) = -K_p \hat{q}_c(t) - K_v \hat{\dot{q}}_c(t) \quad (16)$$

일반적으로 모달필터오차가 생기는 원인을 구분하면 첫째, 파라미터오차에 의한 오차, 둘째, 고유함수 ϕ_r 의 부정확성 때문에 생기는 오차, 셋째, 구간을 유한개로 분할함에 기인한 오차, 넷째, 보간함수에 의한 오차로 나눌 수 있다. 여기서, 파라미터오차는 모달필터오차를 유발시키고 있음을 주의해야 한다. 즉, 파라미터오차와 모달필터오차는

서로 독립적이지 못하고 연관을 갖게 된다. 모달필터오차는 모달필터 행렬에 포함되므로 모달필터 행렬 D 를 $D + \Delta D$ 로 바꾸면 오차를 갖는 모달필터 방정식은 다음과 같다.

$$\hat{q}_c(t) = (D + \Delta D) y(t) \quad (17)$$

$$\hat{\dot{q}}_c(t) = (D + \Delta D) \dot{y}(t) \quad (18)$$

여기서, D 는 정확한 모달필터 행렬이며, ΔD 는 모달필터오차를 나타내는 행렬이다. 식 (17), 식 (18)에 각각 식 (11), 식 (12)를 대입하고, $Dy(t) = q_c(t)$ 와 $D\dot{y}(t) = \dot{q}_c(t)$ 를 적용하면 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\hat{q}_c(t) = (I_c + \Delta DC_c) q_c(t) + \Delta DC_R q_R(t) \quad (19)$$

$$\hat{\dot{q}}_c(t) = (I_c + \Delta DC_c) \dot{q}_c(t) + \Delta DC_R \dot{q}_R(t) \quad (20)$$

따라서 파라미터오차 및 모달필터오차가 존재하는 경우 실제계의 케루프방정식은 식 (2), (16), (19), (20)으로부터 다음과 같이 얻어진다.

$$\begin{aligned} M_c \ddot{v}_c(t) + K_v (I_c + \Delta DC_c) \dot{v}_c(t) \\ + [K_c + K_p (I_c + \Delta DC_c)] v_c(t) \\ = -K_v \Delta DC_R \dot{v}_R(t) - K_p \Delta DC_R v_R(t) \end{aligned} \quad (21)$$

위 방정식에서 보는 바와 같이 모달필터오차가 존재하는 경우에는 모달필터오차 행렬 ΔD 와 잔류모드와의 조합으로 표현되는 우변의 항들에 의해서 제어모드의 변위가 계속 가진됨을 알 수 있다. 또한 M_c , K_c 및 ΔDC_c 는 비대각행렬이므로 식 (21)은 다시 결합되어 더 이상 독립모달공간 제어기법의 특성을 갖지 못한다. 또한 잔류모드가 제어모드의 측정에 포함되는 관측스윙오버⁽²⁾가 발생하여 시스템 특성에 심각한 영향을 끼치게 될 수도 있다. 이 경우 케루프의 안정성과 성능을 해석하기 위해서는 잔류모드의 지배방정식도 함께 고려해야 하므로 매우 복잡하게 된다. 본 연구에서는 제어모드의 모달상태에 대한 모달필터의 추정오차와 파라미터오차가 시스템에 미치는 영향에 우선 관심이 있으므로 관측스윙오버 현상을 배제할 수 있다고 가정한다. 보통 잔류모드는 고주파영역에 존재하므로 측정된 출력을 저주파필터(low-pass filter)에 통과 시킴으로써 관측스윙오버는 실제로 배제시킬 수 있다. 따라서 실제계의 케루프방정식은 다음과 같이 다시 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned} M_c \ddot{v}_c(t) + K_v (I_c + \Delta DC_c) \dot{v}_c(t) \\ + [K_c + K_p (I_c + \Delta DC_c)] v_c(t) = 0 \end{aligned} \quad (22)$$

가 안정성에는 직접적인 영향을 미치지 않지만 진동제어 응답성능에 직접적인 영향을 미치고 있음을 다음 절에서 확인할 수 있다.

5. 파라메터오차 및 모달필터오차가 진동제어 응답성능에 미치는 영향

파라메터오차 및 모달필터오차가 실제계의 페루프 성능에 미치는 영향을 알아보기 위해 수학적 모델의 변위벡터와 실제계의 변위벡터와의 차이를 $e_c(t) = q_c(t) - v_c(t)$ 라고 정의한다. 식 (4)에서 식 (22)를 빼주면 $e_c(t)$ 에 대한 지배방정식은 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$I\ddot{e}_c(t) + K_v\dot{e}_c(t) + (\Delta K_c + K_p)e_c(t) = \Delta M_c\ddot{v}_c(t) + K_v\Delta DC\dot{v}_c(t) + (\Delta K_c + K_p\Delta DC)v_c(t) \quad (31)$$

이 식을 해석함으로써 파라메터오차 및 모달필터오차가 실제 페루프계의 응답성능 오차 $e_c(t)$ 에 미치는 영향을 예측할 수 있다. 위 식에서 보는 바와 같이 $e_c(t)$ 는 ΔM_c 와 ΔK_c 및 ΔD 에 의해 가진되고 있음을 알 수 있다. 만약 파라메터오차 및 모달필터오차가 없다면 $\Delta M_c = \Delta K_c = \Delta D = 0$ 이 되고 $e_c(t) = 0, t \geq 0$ 이 된다.

파라메터오차 및 모달필터오차에 대한 $e_c(t)$ 의 상한을 얻기 위해, 초기조건을 $e_c(0) = \dot{e}_c(0) = 0$ 이라고 놓고, 식 (31)을 라플라스 변환시키면 다음과 같은 식을 얻는다.

$$\bar{e}_c(s) = [Ics^2 + Kvs + Ac + Kp]^{-1}[\Delta Mcs^2 + \Delta Kc + (Kvs + Kp)\Delta DC] \bar{v}_c(s) \quad (32)$$

여기서, $\bar{e}_c(s)$ 및 $\bar{v}_c(s)$ 는 각각 $e_c(s)$ 및 $v_c(s)$ 의 라플라스 변환된 벡터를 나타낸다. 위 식을 다음과 같이 표현할 때

$$\bar{e}_c(s) = \bar{H}(s) \bar{v}_c(s) \quad (33)$$

여기서, $n \times n$ 행렬 $\bar{H}(s)$ 는 다음과 같이 정의된다.

$$\begin{aligned} \bar{H}(s) &= \bar{H}^{(1)}(s) + \bar{H}^{(2)}(s) + \bar{H}^{(3)}(s) \\ \bar{H}_i^{(1)}(s) &= \frac{s^2}{s^2 + k_{vi}s + \omega_i^2 + k_{pi}} m_{ij} \\ \bar{H}_i^{(2)}(s) &= \frac{1}{s^2 + k_{vi}s + \omega_i^2 + k_{pi}} k_{ij} \\ \bar{H}_i^{(3)}(s) &= \frac{k_{vi}s + k_{pi}}{s^2 + k_{vi}s + \omega_i^2 + k_{pi}} d_{ij} \end{aligned} \quad (34)$$

여기서, m_{ij} 는 ΔM_c 의 요소를, k_{ij} 는 ΔK_c 의 요소를 d_{ij} 는 ΔDC_c 의 요소를 나타낸다. 식 (32)를 라플라스 역변환시키면 다음과 같은 컨볼루션(convolution) 적분으로 나타낼 수 있다.

$$e_c(t) = \sum_{i=1}^3 [H^{(i)} * v_c](t) = \sum_{i=1}^3 \int_0^t H^{(i)}(t-\tau) v_c(\tau) d\tau \quad (35)$$

여기서, $H^{(i)}(t) = L^{-1}[\bar{H}^{(i)}(s)]$ 이고, 위 식의 우변은 컨볼루션 적분을 나타낸다. 식 (35)를 간단히 표현하기 위해 다음과 같은 선형 연산자를 정의한다.

$$\hat{H}^{(i)}(v_c) = [H^{(i)} * v_c](t), \quad i=1, 2, 3 \quad (36)$$

식 (35)와 식 (36)을 이용하여 $e_c(t)$ 의 상한, $\|e_c\|$ 를 구하면 다음과 같다.

$$\|e_c\| \leq (\|\hat{H}^{(1)}\| + \|\hat{H}^{(2)}\| + \|\hat{H}^{(3)}\|) \|v_c\| \quad (37)$$

여기서, $\|\hat{H}^{(1)}\|, \|\hat{H}^{(2)}\|, \|\hat{H}^{(3)}\|$ 은 각각 선형연산자 $\hat{H}^{(1)}, \hat{H}^{(2)}, \hat{H}^{(3)}$ 의 L_∞ -유도놈(induced norm)이다. 이 L_∞ -유도놈을 Desoer와 Vidyasaga⁽¹⁷⁾의 결과를 이용하여 나타내면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \|\hat{H}^{(1)}\| &= \max_{t, \tau} \sigma_i^{(1)} \int_0^\infty |h_i^{(1)}(\tau)| d\tau \\ \|\hat{H}^{(2)}\| &= \max_{t, \tau} \sigma_i^{(2)} \int_0^\infty |h_i^{(2)}(\tau)| d\tau \\ \|\hat{H}^{(3)}\| &= \max_{t, \tau} \sigma_i^{(3)} \int_0^\infty |h_i^{(3)}(\tau)| d\tau \end{aligned} \quad (38)$$

이 식에서 $\sigma_i^{(1)}, \sigma_i^{(2)}, \sigma_i^{(3)}$ 은 각각 행렬 $\Delta M_c, \Delta K_c, \Delta DC_c$ 의 i 번째 행에서 각 요소의 절대값의 합으로 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\sigma_i^{(1)} = \sum_{j=1}^n |m_{ij}|, \quad \sigma_i^{(2)} = \sum_{j=1}^n |k_{ij}|, \quad \sigma_i^{(3)} = \sum_{j=1}^n |d_{ij}| \quad (39)$$

그리고 $h_i^{(1)}, h_i^{(2)}, h_i^{(3)}$ 은 각각 다음과 같다.

$$\begin{aligned} h_i^{(1)}(t) &= L^{-1} \left[\frac{s^2}{s^2 + k_{vi}s + \omega_i^2 + k_{pi}} \right] \\ &= \frac{\hat{\omega}_i}{\sqrt{1 - \zeta_i^2}} \exp(-\zeta_i \hat{\omega}_i t) \sin(\hat{\omega}_i \sqrt{1 - \zeta_i^2} t - 2\phi_{vi}) \\ & \quad i, j = 1, 2, \dots, n \quad (40) \\ h_i^{(2)}(t) &= L^{-1} \left[\frac{1}{s^2 + k_{vi}s + \omega_i^2 + k_{pi}} \right] \\ &= \frac{1}{\hat{\omega}_i \sqrt{1 - \zeta_i^2}} \exp(-\zeta_i \hat{\omega}_i t) \sin(\hat{\omega}_i \sqrt{1 - \zeta_i^2} t) \\ & \quad i, j = 1, 2, \dots, n \quad (41) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 h_i^{(3)}(t) &= L^{-1} \left[\frac{k_{vis} + k_{pi}}{s^2 + k_{vis} + \omega_i^2 + k_{pi}} \right] \\
 &= \frac{k_{vi}}{\hat{\omega}_i} \sqrt{\frac{\alpha_i^2 - 2\alpha_i \zeta_i \hat{\omega}_i + \hat{\omega}_i^2}{1 - \zeta_i^2}} \\
 &\quad \times \exp(-\zeta_i \hat{\omega}_i t) \sin(\hat{\omega}_i \sqrt{1 - \zeta_i^2} t + \phi_{2i}) \\
 &\quad i, j = 1, 2, \dots, n \tag{42}
 \end{aligned}$$

여기서,

$$\begin{aligned}
 \hat{\omega}_i &= \sqrt{\omega_i^2 + k_{pi}} \\
 \zeta_i &= \frac{k_{vi}}{2\sqrt{\omega_i^2 + k_{pi}}}, \quad (\zeta_i < 1) \\
 \phi_{1i} &= \tan^{-1} \frac{\sqrt{1 - \zeta_i^2}}{\zeta_i} \\
 \phi_{2i} &= \tan^{-1} \frac{\hat{\omega}_i \sqrt{1 - \zeta_i^2}}{\alpha_i - \zeta_i \hat{\omega}_i} \\
 \alpha_i &= k_{pi} / k_{vi}, \quad i = 1, 2, \dots, n
 \end{aligned}$$

식 (40), 식 (41), 식 (42)를 식 (38)에 대입하고 적분을 수행하면 다음과 같은 결과를 얻는다.

$$\| \hat{H}^{(1)} \| = \max_{1 \leq i \leq n} \sigma_i^{(1)} \left[\frac{2 \exp(X_i^{(1)})}{1 - \exp(X_i^{(2)})} + 1 \right] \tag{43}$$

$$\| \hat{H}^{(2)} \| = \max_{1 \leq i \leq n} \frac{\sigma_i^{(2)}}{\omega_i^2} \left[\frac{1 + \exp(X_i^{(2)})}{1 - \exp(X_i^{(2)})} \right] \tag{44}$$

$$\begin{aligned}
 \| \hat{H}^{(3)} \| &= \max_{1 \leq i \leq n} \frac{\sigma_i^{(3)}}{\hat{\omega}_i^2} \left[k_{pi} + k_{vi} X_i^{(3)} \right. \\
 &\quad \left. \times \frac{\exp(X_i^{(2)} + X_i^{(4)})}{1 - \exp(X_i^{(2)})} \right] \tag{45}
 \end{aligned}$$

여기서,

$$\begin{aligned}
 X_i^{(1)} &= -\frac{2\zeta_i}{\sqrt{1 - \zeta_i^2}} \tan^{-1} \frac{\sqrt{1 - \zeta_i^2}}{\zeta_i} \\
 X_i^{(2)} &= -\frac{\pi \zeta_i}{\sqrt{1 - \zeta_i^2}} \\
 X_i^{(3)} &= 2\sqrt{\alpha_i^2 - 2\alpha_i \zeta_i \hat{\omega}_i + \hat{\omega}_i^2} \\
 X_i^{(4)} &= \frac{\zeta_i}{\sqrt{1 - \zeta_i^2}} \tan^{-1} \frac{\hat{\omega}_i \sqrt{1 - \zeta_i^2}}{\alpha_i - \zeta_i \hat{\omega}_i} \\
 &\quad i = 1, 2, \dots, n
 \end{aligned}$$

이제 식 (37)은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned}
 \| e_c \| &\leq \left[\max_{1 \leq i \leq n} \sigma_i^{(1)} \left[\frac{2 \exp(X_i^{(1)})}{1 - \exp(X_i^{(2)})} + 1 \right] \right. \\
 &\quad + \max_{1 \leq i \leq n} \frac{\sigma_i^{(2)}}{\omega_i^2} \left[\frac{1 + \exp(X_i^{(2)})}{1 - \exp(X_i^{(2)})} \right] \\
 &\quad + \max_{1 \leq i \leq n} \frac{\sigma_i^{(3)}}{\hat{\omega}_i^2} \left[k_{pi} + k_{vi} X_i^{(3)} \right. \\
 &\quad \left. \times \frac{\exp(X_i^{(2)} + X_i^{(4)})}{1 - \exp(X_i^{(2)})} \right] \left. \right] \| v_c \| \tag{46}
 \end{aligned}$$

위의 부등식은 $\| e_c \| \leq m \| v_c \|$ 의 형태로 표현할 수 있으며, ⁽⁴⁸⁾ 여기서 m 은 $\| \hat{H}^{(1)} \| + \| \hat{H}^{(2)} \| + \| \hat{H}^{(3)} \|$ 이다. 위 식에서 보는 바와 같이, $\| \hat{H}^{(1)} \|$ 과 $\| \hat{H}^{(2)} \|$ 는 각각 질량행렬 및 강성행렬에 기여하는 파라미터오차의 크기에 비례하고 있다. 반일 파라미터오차가 매우 작다면, 즉 $\sigma_i^{(1)} \ll 1$, $\sigma_i^{(2)} / \omega_i^2 \ll 1$, $i = 1, 2, \dots, n$, 이라면, $\| \hat{H}^{(1)} \|$ 과 $\| \hat{H}^{(2)} \|$ 는 매우 작게 된다. 그리고 $\| \hat{H}^{(3)} \|$ 는 모달필터오차의 크기에 비례하고 있다. 따라서 모달필터오차가 매우 작다면, 즉 $\sigma_i^{(3)} / \omega_i^2 \ll 1$, $i = 1, 2, \dots, n$, 이라면, $\| \hat{H}^{(3)} \|$ 는 매우 작게 된다. 또한 식 (46)에서 알 수 있듯이, $\| e_c \|$ 와 파라미터오차의 크기 사이의 $\| e_c \|$ 와 모달필터오차의 크기 사이에는 선형관계를 이루고 있으며, 비례계수는 제어기법의 구조에 의존하고 있다. 결과적으로 파라미터오차 및 모달필터오차가 존재하는 경우, 진동제어 응답성능에 오차가 존재하게 되고 그 크기는 항상 $m \| v_c \|$ 보다 적다. 따라서 $e_c(t)$ 는 항상 $\pm m \| v_c \|$ 의 밴드(band) 안에 있게 된다.

6. 예 제

본 절에서는 지금까지 얻어진 결과를 설명하기 위해 외팔보를 예제로 사용하였다. 외팔보를 베르누이-오일러 보 모델로 간주할 때, 지배방정식은 다음과 같다.

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[EI(x) \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2} \right] + M(x) \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2} = f(x, t)$$

제어릭 설계에 사용된 수학적 모델의 단위길이 당 질량은 $M=1$ 로, 물성치는 $EI=10$ 으로, 길이 $l=10$ 으로 가정한다. 이 모델의 고유치문제를 풀이하면, 고유치는 다음과 같이 초월함수(transcendental function)를 이용하여 얻을 수 있다.

$$\cos(\beta_r l) \cosh(\beta_r l) = -1$$

위 방정식의 해는 다음과 같다.

$$\beta_r, l = [1.8761, 4.6941, 7.8548, 10.9955, 14.1372, 17.2788, \dots]$$

따라서 수학적 모델의 고유치와 고유함수는 각각 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\lambda_r = \omega_r^2 = \beta_r^4 EI / M, \quad r = 1, 2, \dots$$

$$\phi_r = a_r \{ \sin(\beta_r l) + \sinh(\beta_r l) \}$$

$$\begin{aligned} & \times [\sin(\beta_r x) - \sinh(\beta_r x)] \\ & + [\cos(\beta_r l) + \cosh(\beta_r l)] \\ & \times [\cos(\beta_r x) - \cosh(\beta_r x)] \end{aligned}$$

여기서, a_r 은 고유함수를 정규화(normalization)시키기 위한 상수로 다음과 같다.

$$a_r = [0.1041, 0.005788, 0.0002453, 0.00001061, 0.0000004585, 0.0000001981, \dots]$$

제어모드의 개수와 작동기의 개수는 각각 6개로 선정하였다. 즉, $n=6$ 이 된다. 센서의 위치는 다음과 같이 선정한다.

$$x_j = \frac{l}{K-1}(j-1), \quad j=1, 2, \dots, K$$

여기서, x_j 는 센서의 위치를, K 는 센서의 개수를 나타낸다. 또한 보간함수를 다음과 같이 선정한다.

$$L_1(\xi) = \xi, \quad L_2(\xi) = 1 - \xi$$

이제 파라미터오차의 효과를 고려하기 위해 실제 시스템이 수학적 모델과 다른 다음과 같은 두가지 경우를 가정한다.

Case 1. $M(x) = 1 + 0.3x/l$

$EI(x) = 10 + 3x/l$

Case 2. $M(x) = 1 - 0.3x/l$

$EI(x) = 10 - 3x/l$

만일 실제계가 Case 2일 때 파라미터오차에 기인한 계수 오차행렬은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\Delta M_c = \begin{bmatrix} -0.2420 & 0.0461 & 0.0061 & 0.0026 & -0.0011 & 0.0007 \\ 0.0461 & -0.1782 & 0.0573 & -0.0062 & 0.0051 & 0.0019 \\ -0.0061 & 0.0573 & 0.1593 & 0.0591 & -0.0039 & 0.0058 \\ 0.0026 & -0.0062 & 0.0591 & -0.1550 & 0.0599 & -0.0026 \\ -0.0011 & 0.0051 & -0.0039 & 0.0599 & -0.1530 & 0.0602 \\ 0.0007 & -0.0019 & 0.0058 & -0.0026 & 0.0602 & 0.1520 \end{bmatrix}$$

$$\Delta K_c = \begin{bmatrix} -0.0007 & 0.0036 & 0.0013 & 0.0008 & 0.0007 \\ 0.0036 & -0.0591 & 0.0778 & 0.0226 & 0.0127 \\ 0.0013 & 0.0778 & -0.5341 & 0.0479 & 0.1070 \\ 0.0011 & 0.0165 & 0.4410 & 1.4457 & 0.0938 \\ 0.0008 & 0.0226 & 0.0479 & -5.8716 & 3.5912 \\ 0.0007 & 0.0127 & 0.1070 & 3.5912 & -13.1912 \end{bmatrix}$$

독립모달공간 제어기법에서 최적제어 피드백게인행렬을 구하면 다음과 같다.

$$K_r = \text{diag}[0.1454, 0.6130, 0.8948, 0.9680, 0.9878, 0.9945]$$

$$K_v = \text{diag}[1.5135, 1.7961, 1.9467, 1.9839, 1.9939, 1.9972]$$

일반적으로 모달필터오차는 파라미터오차와 고유함수의 부정확성과 센서의 개수와 보간함수에 의해 발생한다. 그러나 고유함수의 부정확성에 기인하는 오차이는 센서의 개수에 의해 발생하는 오차이든 혹은 보간함수에 의해 발생하는 모달필터오차이든 간에 모두 ΔD 에 나타난다. 따라서 본 연구에서는 일반성을 잃지 않으면서 계산의 단순성을 위해 파라미터오차는 이미 언급한 2가지 경우로 한정하고 센서의 개수에 기인하는 모달필터오차만 고려하고자 한다. 파라미터오차는 또한 고유함수의 오차를 유발시키고 결국 모달필터의 오차를 발생시킨다. 다음은 실제계가 Case 2일 때 센서의 수의 변화에 대한 모달필터오차 행렬과 C_c 와의 곱이다.

$K=10$ 인 경우 :

$$\Delta D C_c = \begin{bmatrix} 0.2412 & 0.0363 & 0.0152 & -0.0253 & 0.0379 & -0.0460 \\ 0.0478 & -0.1897 & 0.0483 & 0.0180 & -0.0197 & 0.0398 \\ -0.0046 & 0.0597 & -0.1984 & 0.0484 & 0.0260 & -0.0167 \\ 0.0037 & -0.0008 & 0.0610 & -0.2359 & 0.0462 & 0.0341 \\ -0.0002 & 0.0089 & 0.0069 & 0.0598 & -0.2877 & 0.0431 \\ 0.0014 & 0.0021 & 0.0127 & 0.0143 & 0.0575 & -0.3481 \end{bmatrix}$$

$K=7$ 인 경우 :

$$\Delta D C_c = \begin{bmatrix} 0.2403 & 0.0241 & 0.0418 & -0.0605 & 0.0880 & -0.1072 \\ 0.0499 & -0.2035 & 0.0374 & 0.0493 & -0.0518 & 0.1005 \\ 0.0027 & 0.0628 & -0.2424 & 0.0360 & 0.0702 & -0.0462 \\ 0.0051 & 0.0061 & 0.0642 & 0.3191 & 0.0329 & 0.1108 \\ 0.0010 & 0.0140 & 0.0228 & 0.0629 & -0.3996 & 0.0358 \\ 0.0024 & 0.0079 & 0.0231 & 0.0485 & 0.0652 & -0.3705 \end{bmatrix}$$

$K=2$ 인 경우 :

$$\Delta D C_c = \begin{bmatrix} 0.1296 & 0.8704 & 0.8704 & -0.8704 & 0.8704 & -0.8704 \\ 0.2052 & 1.2052 & 0.2052 & -0.2052 & 0.2052 & -0.2052 \\ 0.0599 & -0.0599 & -0.9401 & 0.0599 & 0.0599 & -0.0599 \\ 0.0349 & 0.0349 & 0.0349 & -1.0349 & 0.0349 & -0.0349 \\ 0.0192 & -0.0192 & 0.0192 & 0.0192 & -0.9808 & -0.0192 \\ 0.0139 & -0.0139 & 0.0139 & -0.0139 & 0.0139 & -1.0139 \end{bmatrix}$$

위에서 보는 바와 같이 K 의 값이 증가할 수록 모달필터오차가 감소함을 확인할 수 있다. 각 시스템의 안정성을 알아보기 위해 조건식 (30)을 사용하며 다음과 같다.

Table 1 Comparison of the closed-loop eigenvalues between model and actual systems

	Math. model	Case 1			Case 2		
		K=∞	K=10	K=7	K=2	K=10	K=7
1	-0.0727±1.2331i	-0.0726±1.2327i	-0.0725±1.2332i	-0.0220±0.7928i	-0.0730±1.2352i	-0.0730±1.2365i	-0.1163±0.8800i
2	0.3065±1.4791i	-0.3025±1.4639i	-0.2977±1.4550i	-0.0028±1.0977i	-0.3020±1.4829i	0.2968±1.4737i	0.1216±1.0412i
3	-0.4474±2.3565i	-0.4272±2.3279i	-0.4042±2.3104i	-0.0434±1.9779i	-0.4268±2.3610i	-0.4033±2.3437i	-0.0450±2.0280i
4	-0.4840±4.0456i	-0.4380±4.0121i	-0.3907±3.9929i	0.0153±3.7993i	-0.4377±4.0500i	-0.3901±4.0309i	0.0233±3.8359i
5	-0.4939±6.4571i	-0.4156±6.4222i	-0.3507±6.4055i	-0.0093±6.3067i	-0.4156±6.4614i	-0.3506±6.4449i	-0.0114±6.3476i
6	-0.4972±9.5334i	-0.3825±9.5007i	-0.3695±9.4980i	0.0058±9.4261i	-0.3825±9.5419i	-0.3700±9.5394i	0.0084±9.4672i

Case 1.

K=10인 경우 $B+B^T > 0$, $Q_1 > 0$, $Q_3 - Q_2 Q_1^{-1} Q_2^T > 0$

K=7인 경우 : $B+B^T > 0$, $Q_1 > 0$, $Q_3 - Q_2 Q_1^{-1} Q_2^T > 0$

K=2인 경우 : $B+B^T > 0$, $Q_1 < 0$, $Q_3 - Q_2 Q_1^{-1} Q_2^T < 0$

Case 2.

K=10인 경우 $B+B^T > 0$, $Q_1 > 0$, $Q_3 - Q_2 Q_1^{-1} Q_2^T > 0$

K=7인 경우 : $B+B^T > 0$, $Q_1 > 0$, $Q_3 - Q_2 Q_1^{-1} Q_2^T > 0$

K=2인 경우 : $B+B^T > 0$, $Q_1 < 0$, $Q_3 - Q_2 Q_1^{-1} Q_2^T < 0$

즉, 센서가 10개와 7개인 경우는 조건식 (30)을 만족하므로 Lyapunov 점근 안정성을 갖지만 센서가 2개인 경우는 $Q_1 < 0$, $Q_3 - Q_2 Q_1^{-1} Q_2^T < 0$ 이므로 Lyapunov 점근 안정하기 위한 조건인 식 (30)을 만족하지 못하여 시스템이 불안정해 짐을 예상할 수 있다.

파라메터오차와 부정확한 모달필터를 가진 시스템의 고유치는 Table 1에 나타내었다. 여기서, 첫 번째 열은 수학적 모델의 고유치를 나타내고, 나머지 열은 실제계의 고유치를 나타낸다.

본 예제에서 센서의 수가 충분히 많은 경우 모달필터 오차는 적게 되고 파라메터오차만 남게 된다. 이러한 경우는 안정성 해석에서 예측한 바와 같이 케루프 안정성에 큰 문제가 없다. 파라메터오차는 케루프방정식의 계수행렬의 대칭성을 해치지 않으며, 따라서 케루프 성능을 저하시키나 안정성에는 영향을 미치지 않는다. 그러나 모달필터오차는 계수행렬의 대칭성을 해치므로 케루프 안정성에 직접적으로 영향을 미친다. 본 예제에서 센서의 개수를 적게할 때 모달필터의 오차는 커지게 되어 양의 실수부를 갖는 고유치가 발생하게 된다. 즉 시스템이 불안정하게 된다. 이러한 결과들은 Table 1에서

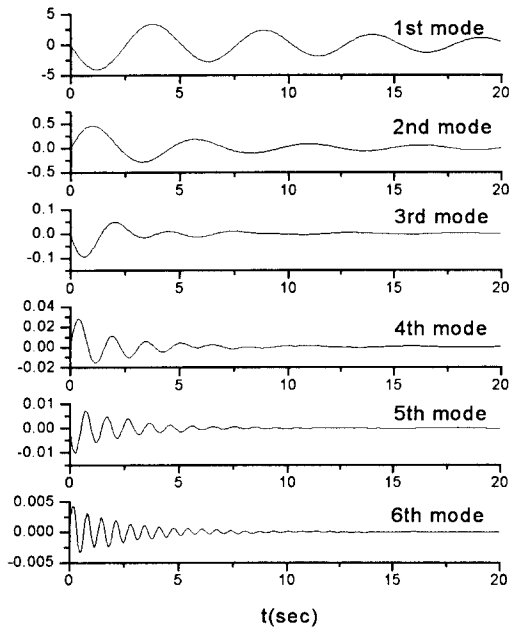


Fig. 2 Modal responses of system with 10 sensors -case 2

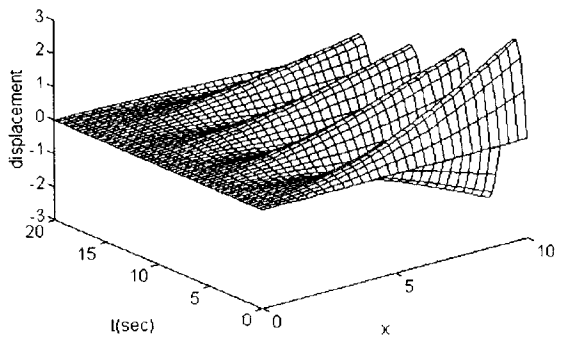


Fig. 3 Displacement response of system with 10 sensors -Case 2

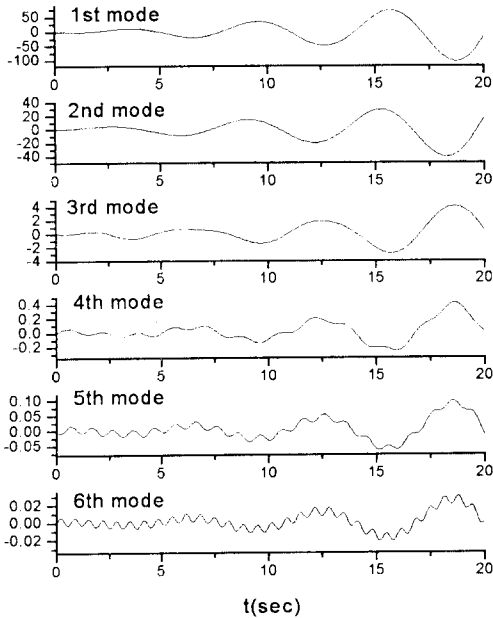


Fig. 4 Modal responses of system with 2 sensors - case 2

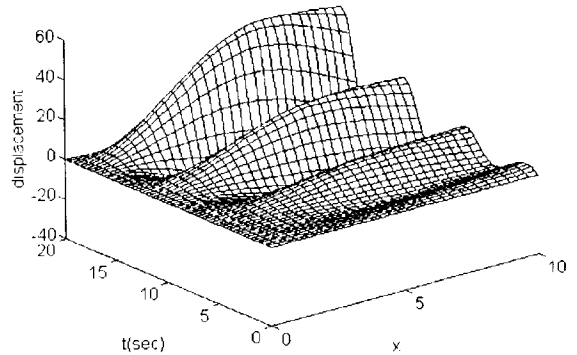


Fig. 5 Displacement response of system with 2 sensors case 2

Table 2 Upper bounds of the deviation vector

	Case 1		Case 2	
	K	7	10	7
m	3.0497	3.3594	2.9261	3.0606

확인할 수 있다. 또한 파라미터 오차 및 모달필터 오차가 커질수록 케루프 진동제어계의 안정성이 점점 나빠지고 있음을 본 예제를 통해 관찰할 수 있다. 파라미터오차는 직접적으로 안정성에 영향을 미치지 않지만, 모달필터오차를 유발시키 간접적으로 영향을 미친다.

실제계 Case 2의 시간영역 응답에 대한 시뮬레이션 결과를 Figs. 2~5에 나타내었다. 이 응답을 구할 때 동일한 초기조건을 사용하였다. 센서가 10개인 경우 각 모드의 모달변위를 Fig. 2에 나타내었고, Fig. 3에서는 시간에 대한 보 전체의 변위를 나타내었다. 또한 센서가 2개인 경우 각 모드의 모달변위를 Fig. 4에 나타내었고, Fig. 5에서는 시간에 대한 보 전체의 변위를 나타내었다. 예제의 안정성 해석과 그림에서 보는 바와 같이 모달필터오차가 파라미터오차보다 안정성에 더 큰 영향을 미치며 모달필터 오차가 크게 존재하는 경우 외관보의 변위가 발산함을 확인할 수 있다. 또한 독립모달공간 제어기법에 의해 비결합된 케루프방정식이 다시 파라미터오차 및 모달필터오차에 의해 결합되어 안정적인 모드마저도 불안정하게 될 수 있다.

이제 파라미터오차 및 모달필터오차에 기인한 진동제어 응답오차의 상한은 식 (46)을 이용하여 구

하고 그 상한계수 m 을 Table 2에 나타내었다. 진동제어 응답의 오차는 항상 $m\|e_c\|$ 보다 적으며, 따라서 $e_c(t)$ 는 항상 $\pm m\|e_c\|$ 범위 내에서만 존재하게 된다. 또한 파라미터오차와 모달필터오차가 클수록 그리고 센서의 수가 적을수록 진동제어 응답의 오차는 그에 비례하게 커짐을 확인할 수 있다.

7. 결 론

본 연구에서는 파라미터오차 및 모달필터오차가 독립된 모달공간에서 설계된 진동제어계의 안정성 및 성능에 미치는 영향을 해석하였다. 모달필터 오차는 파라미터오차, 고유함수의 부정확성, 센서의 계수, 보간함수 등에 의해 발생한다. 이와같이 파라미터오차와 모달필터오차를 갖는 수학적 모델을 근거로 하여 제어력을 계산하고 실제계에 적용시켰을 때, 진동제어계가 파라미터오차 및 모달필터오차에 대해 강인한 지를 해석하였다. 본 연구에서 얻어진 주된 결과를 요약하면 다음과 같다.

- (1) 파라미터오차 및 모달필터오차가 존재할 때, 실제 케루프계가 Lyapunov 점근 안정성을 갖기 위한 조건식 (30)을 유도하였다.
- (2) 모달필터의 오차는 실제 케루프계의 안정성

에 직접적인 영향을 미친다. 그러나, 파라미터오차는 직접 영향을 미치지 않고 모달필터의 오차를 만들어 간접적으로 영향을 미친다.

(3) 파라미터오차 및 모달필터오차가 클수록 실제 페루프계의 안정성은 점점 나빠지게 된다.

(4) 파라미터오차 ΔM_c , ΔK_c 와 모달필터오차 ΔD 가 존재할 때, L_∞ -놈 이론을 적용하여 진동 제어 응답성능의 오차의 상한, 식 (46)을 유도하였다.

(5) 응답성능 오차의 상한은 파라미터오차 ΔM_c , ΔK_c 와 모달필터오차 ΔD 의 크기에 비례하고 있으며, 비례계수는 모달공간에서의 제어기법의 종류에 따라 다르다.

후 기

본 연구는 1996년도 한국과학재단 핵심전문연구(과제번호 961-1002-039-1)의 지원을 받아 수행되었으며, 이에 관계자께 감사드립니다.

참고문헌

- (1) Meirovitch, L. and Baruh, H., 1981, "Effect of Damping on Observation Spillover Instability," *Journal of Optimization Theory and Application*, Vol. 35, No. 1, pp. 31~44.
- (2) Meirovitch, L. and Baruh, H., 1982, "On the Problem of Observation Spillover in Distributed-Parameter System," *Journal of Optimization Theory and Applications*, Vol. 39, No. 2, pp. 319~341.
- (3) Meirovitch, L. and Baruh, H., 1985, "On the Implementation of Modal Filters for Control of Structures," *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 8, No. 6, pp. 707~716.
- (4) Choe, K. and Baruh, H., 1993, "Sensor Failure Detection in Flexible Structures Using Modal Observers," *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, Vol. 115, Sep., pp. 411~418.
- (5) Meirovitch, L. and Baruch, H., 1982, "Control of Self-Adjoint Distributed-Parameter System," *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 5, No. 1, pp. 60~66.
- (6) Meirovitch, L., 1990, *Dynamics and Control of Structures*, John Wiley & Sons, New York.
- (7) Meirovitch, L., Baruch, H. and Oz, H., 1983, "A Comparison of Control Techniques for Large Flexible System," *Journal of Guidance and Control*, Vol. 6, pp. 302~310.
- (8) Hallauer, W.L. Jr. and Barthelemy, J.F.M., 1981, "Sensitivity of Modal Space Control to Nonideal Conditions," *Journal of Guidance and Control*, Vol. 4, 1981, pp. 564~566.
- (9) Meirovitch, L. H., 1983, "Robustness of the Independent Modal Space Control Method," *Journal of Guidance and Control*, Vol. 6, pp. 20~25.
- (10) Hale, A.L. and Rahn, G.A., 1984, "Robust Control of Self-Adjoint Distributed Parameter Structures," *Journal of Guidance and Control*, Vol. 7, pp. 265~273.
- (11) Baruch, H. and Silverberg, L., 1985, "Robust Natural Control of Distributed Systems," *Journal of Guidance and Control*, Vol. 6, pp. 717~724.
- (12) 황재혁, 1993, "독립된 모달공간에서 분포계의 진동제어기법의 강인성," 한국항공우주학회지, 제21권, 제2호, pp. 37~49.
- (13) 황재혁, 백승호, 1994, "독립된 모달공간에서 양위치 피드백제어기법의 강인성," 한국소음진동학회지, 제4권, 제2호, pp. 177~185.
- (14) Hwang, J.H., Kim, D.M. and Lim, K.H., 1996, "Robustness of Natural Controls of Distributed-Parameter System," *ASME Journal of Vibration and Acoustics*, Vol. 118, No. 1, pp. 56~63.
- (15) Meirovitch, L., 1980, *Computational Methods in Structural Dynamics*, Sijthoff & Noordhoff International Publishers B.V., Alphen aan den Rijn, The Netherlands.
- (16) Inman, D.J., 1989, *Vibration with Control, Measurement, and Stability*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ.
- (17) Desoer, C.A. and Vidyasaga, M., 1975, *Feedback Systems: Input-Output Properties*, Academic Press, New York.
- (18) Stakgold, L., 1979, *Green's Functions and Boundary Value Problems*, Wiley Interscience, New York.