

〈논 문〉

Chaboche 통합 점소성 구성방정식을 이용한 재료거동해석

곽대영* · 임용택** · 김종범*** · 이형연*** · 유 봉***

(1996년 4월 25일 접수)

Analysis of Material Response Based on Chaboche Unified Viscoplastic Constitutive Equation

D. Y. Kwak, Y. T. Im, J. B. Kim, H. Y. Lee and B. Yoo

Key Words : Creep-Fatigue Interaction(크리프-피로 상호작용), Unified Viscoplastic Constitutive Equation(통합 점소성 구성방정식), FEM(유한요소법), High Temperature(고온), Inelastic Analysis(비탄성해석)

Abstract

Service conditions for structures at elevated temperatures in nuclear power plant involve transient thermal and mechanical load levels that are severe enough to cause inelastic deformations due to creep and plasticity. Therefore, a systematic method of inelastic analysis is needed for the design of structural components in nuclear power plants subjected to such loading conditions. In the present investigation, the Chaboche model, one of the unified viscoplastic constitutive equations, was selected for systematic inelastic analysis. The material response was integrated based on GMR(generalized mid-point rule) time integral scheme and provided to ABAQUS as a material subroutine, UMAT program. By comparing results obtained from uniaxial analyses using the developed UMAT program with those from Runge-Kutta solutions and experimentation, the validity of the adopted Chaboche model and the numerical stability and accuracy of the developed UMAT program were verified. In addition, the developed material subroutine was applied for uniaxial creep and tension analyses for the plate with a hole in the center. This application further demonstrates usefulness of the developed program.

1. 서 론

발전소의 터빈로터나 보일러, 항공기의 가스터빈, 액체금속로 기기 및 부품 등과 같은 구조물들은 고온에서의 운전상태에 따라 복잡한 하중이력을 경험하게 되어 크리프변형과 소성변형과 같은 비탄

성변형이 중요한 변형기구로 나타나고, 또한 크리프-피로의 상호작용에 의한 파손현상이 지배적인 파손기구로 나타나게 된다. 따라서 이와 같은 구조물에 대한 설계 및 신뢰성있는 안전성 평가를 수행하기 위해서는 체계적인 비탄성 해석기술의 확립이 절실히 요구된다.

이와 같이 고온 구조물의 안전성 확보를 위한 비탄성 해석기술의 확립을 위해서는 첫째, 재료의 거동을 비교적 정확히 예측할 수 있는 구성방정식의 개발과 재료상수의 결정을 위한 실험 및 검증기술

*한국과학기술원 기계공학과

**회원, 한국과학기술원 기계공학과

***회원, 한국원자력연구소

의 확립이 필요하고, 둘째, 개발된 구성방정식을 적용하여 실제 구조물의 비탄성해석을 수행할 수 있는 수치적 안정성과 정확성이 보장된 수치해석 프로그램의 개발이 필요하다. 그리고 마지막으로 이러한 비탄성 해석결과를 이용하여 구조물의 파손에 대한 평가를 수행함으로써 수명예측과 안전성 평가를 할 수 있는 체계적인 방법의 확립이 필요하다.

따라서 본 연구에서는 비탄성 해석기술의 확립을 위하여 위의 세가지 단계 중에서 두번째 단계인 구성방정식의 수치적 적용기술 방법에 대한 연구에 중점을 두어, Armstrong-Frederick,⁽¹⁾ Robinson,⁽²⁾ Chaboche,⁽³⁻⁶⁾ Bodner와 Partom,⁽⁷⁾ Miller,⁽⁸⁾ Walker⁽⁹⁾ 등의 통합 점소성 모델중에서 Chaboche 통합 점소성 모델을 채택하여, 이를 상용 유한요소 해석 프로그램인 ABAQUS에서 사용하기 위한 모듈 프로그램의 개발을 목적으로 하였다.

이와 관련하여 통합 점소성 모델들을 수치해석적 방법에 의해서 비탄성해석에 적용하기 위한 연구가 활발히 진행되었다. Krieg,⁽¹⁰⁾ Schreyer,⁽¹¹⁾ Yoder,⁽¹²⁾ Ortiz,^(13, 14) Nagtegaal⁽¹⁵⁾ 등은 탄성예측 소성보정법(elastic predictor plastic corrector algorithm)을 적용하여 통합 점소성 모델을 적용한 프로그램을 개발하였으며, Tanaka와 Miller^(16,17)는 Miller의 통합 점소성 모델에 대한 NONSS(non-linear system solver)를 개발한 바 있고, Honberger^(18, 19) 등은 GMR(generalized mid-point rule) 시간적분법을 적용하여 Robinson 통합 점소성 모델을 ABAQUS의 UMAT 프로그램으로 개발한 바 있다.

본 연구에서는 Honberger 등이 Robinson 모델에 대하여 적용한 방법과 동일한 과정으로 Chaboche 모델에 대하여 GMR 시간적분법과 Newton-Raphson법을 이용하여 재료의 거동을 수식화하고, 이를 ABAQUS의 UMAT(user material library) 프로그램으로 구현하였다. 또한, 단축 문제에 대하여 Runge-Kutta 방법에 의해 구한 해와 실험결과를 개발된 UMAT과 ABAQUS를 이용하여 구한 결과와 비교하여 개발된 UMAT의 수치적 안정성과 정확성 및 적용된 Chaboche 모델의 적합성을 검증하였다. 한편, 원공을 가지는 평판에 대하여 단축 인장, 반복적 단축 인장-압축 및 단축 크리프 하중에 대한 응력해석을 예제로 수행하여 본 연구에서 개발된 프로그램의 효율성을 확인하였다.

2. 이론적 배경

2.1 Chaboche 점소성 구성방정식

통합 점소성 구성방정식은 소성변형과 크리프변형을 동일한 발생기구에 의해서 생겨나는 비탄성변형으로 가정하고, 동적특성을 갖는 내부변수들을 도입하여 재료의 시간에 따른 내부이력을 표현함으로써 고온환경 하에서의 재료의 거동을 보다 정확히 예측할 수 있는 모델이다. 특히, Chaboche 모델은 비탄성변형에 대한 항복조건식을 갖는 대표적인 통합 점소성 모델로서 Chaboche에 의해 처음 제안되었고, 이후에 다른 연구자들에 의해서 속도 민감도(rate sensitivity)를 고려하기 위한 수정된 모델이 계속적으로 연구되어 현재와 같이 수정, 보완되었다.

통합 점소성 구성방정식의 일반적인 지배방정식의 형태와 Chaboche 통합형 점소성 구성방정식의 지배방정식은 다음과 같이 나타난다.

전체변형률 변화율식

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \dot{\epsilon}_{ij}^e + \dot{\epsilon}_{ij}^p + \dot{\epsilon}_{ij}^c + \dot{\epsilon}_{ij}^{th} \quad (1)$$

Hooke's Law

$$\dot{\sigma}_{ij} = E \dot{\epsilon}_{ij}^e + \dot{T} \frac{\partial E}{\partial T} \epsilon_{ij}^e \quad (2)$$

열변형률 변화율식

$$\dot{\epsilon}_{ij}^{th} = \gamma \dot{T} \delta_{ij} \quad (3)$$

유동응력식

$$\dot{\epsilon}_{ij}^p = f(J_2(\Sigma_{ij}), \alpha, T) \Sigma_{ij}' \quad (4)$$

$$f = \frac{3}{2} \frac{\dot{p}}{J_2(\Sigma_{ij})}, \quad \dot{p} = \left(\frac{J_2(\Sigma_{ij}) - \alpha - k}{K} \right)^n \quad (5)$$

$$\Sigma_{ij}' = \sigma_{ij}' - \alpha_{ij}', \quad J_2(\Sigma_{ij}) = \frac{1}{2} \Sigma_{ij}' \Sigma_{ij}' \quad (6)$$

내부변수의 지배방정식

$$\dot{\alpha}_{ij}' = h(\sigma_{ki}', \alpha_{ni}', \alpha, \epsilon_{ni}, \dot{p}, T) \dot{\epsilon}_{ij}^p - r(\sigma_{ki}', \alpha_{ni}', \alpha, \epsilon_{ni}, \dot{p}, T) \alpha_{ij}' \quad (7)$$

$$h = \frac{2}{3} C, \quad r = \gamma \dot{p} \quad (8)$$

$$\dot{\alpha} = \Gamma(\dot{p}, T) \dot{p} + \Theta(\dot{p}, T) \dot{T} \quad (9)$$

$$\Gamma = b(Q - \alpha) \quad (10)$$

여기에서 σ_{ij}' , α , \dot{p} , 및 α_{ij}' 는 각각 편차응력텐서(deviatoric stress tensor), 등방경화응력(drag

stress), 항복조건식 및 편차이동경화 응력텐서 (deviatoric back stress tensor)를 각각 나타내는 것으로서, χ 는 p 에 의해서 형성되는 항복곡선 (yield locus)의 크기를, α_{ij} '는 항복곡선의 중심 이동을 각각 나타내는 양이다. 또한 K, n, C, γ, b, Q, k 등은 온도에 따른 재료상수(material parameter)들로서, 인장실험 및 반복인장실험 등을 통하여 구해지는 양이다.⁽¹⁵⁾

2.2 구성방정식의 수식화

GMR법(Generalized Mid-point Rule)^(18, 19)은 시간 의존성 미분방정식(time dependent differential equation)의 해를 구하기 위하여 널리 사용되고 있는 방법으로서 식 (11)과 같이 나타나는 미분방정식을 시간에 대하여 이산화시킴으로써 식 (12), (13)과 같이 나타낼 수 있다.

$$\dot{y}_i = f_i(y_i(t), t); y_i(t=t_0) = y_{i0} \quad (11)$$

$$y_i^{(t+\Delta t)} - y_i^{(t)} = \Delta y_i = \Delta t f_i(y_i^{(t+\theta\Delta t)}, t + \theta\Delta t) \quad (12)$$

여기에서

$$y_i^{(t+\theta\Delta t)} = (1-\theta)y_i^{(t)} + \theta y_i^{(t+\Delta t)} = y_i^{(t)} + \theta\Delta y_i \quad (13)$$

이 방법은 θ 값에 따라서 해의 정확도의 수치적 안정성이 정해지는 것으로서, $\theta=0, \theta=1$ 및 $\theta=0.5$ 인 경우가 각각 외면적 Euler, 내연적 Euler 및 Crank-Nicholson 시간적분법에 해당된다. 특히, $0.5 \leq \theta \leq 1.0$ 인 경우에는 무조건적인 안정성(unconditionally stable)을 갖고, 또한 $\theta=0.5$ 인 경우에는 2차 정확도를 갖기 때문에 이 방법을 사용하면 해의 수치적인 정확도가 높을 뿐만 아니라 수치적으로 안정적이므로 구조적인 계산문제에 대하여 효율적으로 적용되고 있다. 따라서 본 연구에서는 식 (1)~(10)을 GMR법을 이용하여 전개하고, 이를 통해 얻어진 비선형 연립방정식의 수치적인 해를 구하기 위하여 Newton-Raphson법을 적용하여 선형화 하였다.

우선 식 (4), (7) 및 (9)를 GMR법과 Newton-Raphson법을 적용하여 전개하면 다음과 같은 식 (14), (15) 및 (16)을 얻을 수 있다.

$$\Delta \varepsilon_{ij}^p = \Delta t f^{(t+\theta\Delta t)} \{J_2(\Sigma_{ij}), \chi\} \Sigma_{ij}'^{(t+\theta\Delta t)} \quad (14)$$

$$\Delta \alpha_{ij}' = h^{(t+\theta\Delta t)} \{J_2(\alpha_{ij})\} \Delta \varepsilon_{ij}^p - \Delta \gamma^{(t+\theta\Delta t)}$$

$$\{J_2(\alpha_{ij}) T\} \alpha_{ij}^{(t+\theta\Delta t)} \quad (15)$$

$$\Delta K = I^{(t+\theta\Delta t)} \Delta \eta^{(t+\theta\Delta t)} + \Theta^{(t+\theta\Delta t)} \Delta T, K = \chi^2 \quad (16)$$

한편, 재료를 등방성으로 가정하면 Hooke's Law는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\Delta \sigma_{ij}' = 2\mu^{(t+\Delta t)} (\Delta d_{ij} - \Delta \varepsilon_{ij}^p) \quad (17)$$

여기에서

$$\Delta d_{ij} = \Delta e_{ij} + \frac{\mu^{(t+\Delta t)} - \mu^{(t)}}{\mu^{(t+\Delta t)}} (e_{ij}^{(t)} - \varepsilon_{ij}^{p(t)}) \quad (18)$$

윗 식에서 μ 는 Lamé 상수이고, ε_{ij} 는 편차변형 율텐서(deviatoric strain tensor)이다. 위와 같이 얻어진 식 (14)~(17)에 대하여 방정식의 해를 직접 구하기에는 많은 계산 시간을 필요로 할 뿐만 아니라, 계산 측면에서도 매우 비효율적이다. 따라서 이러한 계산상의 문제점을 보완하기 위하여 다음과 같은 투사법(projection method)^(18, 19)을 이용하여 하나의 통합된 식으로 유도하여 해를 구하는 과정이 필요하다. 즉, 식 (17)을 GMR법에 의하여 전개하고 식 (14)와 (15)를 대입하여 정리함으로써 식 (19)와 (20)을 얻을 수 있다.

$$\Delta \sigma_{ij}' = 2\mu^{(t+\theta\Delta t)} (\Delta d_{ij} - \delta f^{(t+\theta\Delta t)} \Sigma_{ij}^{(t+\theta\Delta t)}) \quad (19)$$

$$\Delta \alpha_{ij} = \frac{\Delta t}{1 + \theta \Delta t} (h^{(t+\theta\Delta t)} f^{(t+\theta\Delta t)} \Sigma_{ij}^{(t+\theta\Delta t)} - \gamma^{(t+\theta\Delta t)} \alpha_{ij}^{(t)}) \quad (20)$$

또한, $\Sigma_{ij}^{(t+\theta\Delta t)} = \sigma_{ij}^{(t+\theta\Delta t)} - \alpha_{ij}^{(t+\theta\Delta t)}$ 의 관계와 식 (19)와 (20)을 정리하여 다음과 같은 식을 얻을 수 있다.

$$\Sigma_{ij}^{(t+\theta\Delta t)} = B^{(t+\theta\Delta t)} X_{ij}^1 + R^{(t+\theta\Delta t)} X_{ij}^2 \quad (21)$$

여기에서

$$X_{ij}^1 = \Sigma_{ij}^{(t)} + 2\mu\theta\Delta d_{ij} \quad (22)$$

$$X_{ij}^2 = \alpha_{ij}^{(t)} \quad (23)$$

$$B^{(t+\theta\Delta t)} = \frac{1 + \theta \Delta \gamma^{(t+\theta\Delta t)}}{(1 + \theta \Delta \gamma^{(t+\theta\Delta t)}) (1 + 2\mu^{(t+\theta\Delta t)} \theta \Delta f^{(t-\theta\Delta t)}) + \theta \Delta h^{(t-\theta\Delta t)} f^{(t+\theta\Delta t)}} \quad (24)$$

$$R^{(t+\theta\Delta t)} = B^{(t+\theta\Delta t)} \frac{\theta \Delta \gamma^{(t+\theta\Delta t)}}{1 + \theta \Delta \gamma^{(t+\theta\Delta t)}} \quad (25)$$

그러나 식 (22)와 (23)에 나타난 X_{ij}^1 과 X_{ij}^2 가 선형독립적(linearly independent) 관계에 있지만, 서

Table 1 List of terms used in equation (30)

$L_{ijk}^{(t+\theta\Delta t)}$	$\theta\Delta t \left[\frac{\partial f^{(t+\theta\Delta t)}}{\partial J_2(\Sigma')} \Sigma_{ij}^{(t+\theta\Delta t)} \Sigma_{kl}^{(t+\theta\Delta t)} + f^{(t+\theta\Delta t)} \left(\frac{1}{2} (\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) - \frac{1}{3} \delta_{ij}\delta_{kl} \right) \right]$
$N_{ij}^{(t+\theta\Delta t)}$	$\theta\Delta t \frac{\partial f^{(t+\theta\Delta t)}}{\partial K} \Sigma_{ij}^{(t+\theta\Delta t)}$
$P_{ijk}^{(t+\theta\Delta t)}$	$\frac{1}{2} (1 + \theta\Delta \text{tr}^{(t+\theta\Delta t)}) (\delta_{ij}\delta_{kl} + \delta_{il}\delta_{jk}) - \theta \frac{\partial h^{(t+\theta\Delta t)}}{\partial J_2(\alpha)} \Delta \varepsilon_{ij}^p \alpha_{kl}^{(t+\theta\Delta t)} + \theta\Delta t \frac{\partial r^{(t+\theta\Delta t)}}{\partial J_2(\alpha)} \alpha_{ij} \alpha_{kl}$
$G^{(t+\theta\Delta t)}$	$\Gamma^{(t+\theta\Delta t)} + \left(\frac{\partial \Gamma^{(t+\theta\Delta t)}}{\partial \eta} \Delta \eta + \frac{\partial \theta^{(t+\theta\Delta t)}}{\partial \eta} \Delta T \right)$
R_{ij1}	$\Delta t f^{(t+\theta\Delta t)} \Sigma_{ij}^{(t+\theta\Delta t)} - \Delta \varepsilon_{ij}^p$
R_{ij2}	$h^{(t+\theta\Delta t)} \Delta \varepsilon_{ij}^p - \Delta \text{tr}^{(t+\theta\Delta t)} \alpha_{ij}^{(t+\theta\Delta t)} - \Delta \alpha_{ij}$
R_3	$\Gamma^{(t+\theta\Delta t)} W^p + \theta^{(t+\theta\Delta t)} \Delta T - \Delta K$

로 직교하지는 않으므로 Gram-Schmidt 직교화 과정(orthogonalization process)에 의해서 식 (26), (27)과 같은 방법으로 \hat{X}_i^1 과 \hat{X}_i^2 를 새로운 기저(basis)로 정의하고, 새로운 기저에 대하여 식 (28)과 같은 선형변환(linear transform)을 통하여 식 (29)와 같은 연립선형방정식을 얻을 수 있다.

$$\hat{X}_i^1 = \frac{1}{\sqrt{2J_2(X_{ki}^1)}} X_{ki}^1, \quad (26)$$

$$\hat{X}_i^2 = \frac{1}{\sqrt{2J_2(\hat{a}_{ki}^1) - (a_{ki} \hat{X}_{ki}^1)^2}} [a_{ij}^1 - (a_{mn} \hat{X}_{mn}^1) \hat{X}_{ij}^1] \quad (27)$$

$$\Delta \varepsilon_{ij}^p = E^\alpha \hat{X}_{ij}^\alpha, \quad E^\alpha = \hat{X}_{ij}^\alpha \Delta \varepsilon_{ij}^p \\ \Delta \alpha_{ij} = A^\alpha \hat{X}_{ij}^\alpha, \quad A^\alpha = \hat{X}_{ij}^\alpha \Delta \alpha_{ij} \quad (28)$$

$$(\delta^{a\beta} - 2\mu^{(t+\Delta t)} L^{a\beta}) \delta E^\beta + L^{a\beta} \delta A^\beta - N^\alpha \delta \Delta K = R_1^\alpha \\ - h^{(t+\theta\Delta t)} \delta E^\alpha + P^{a\beta} \delta A^\beta = R_2^\alpha$$

$$G^{(t+\theta\Delta t)} (2\mu^{(t+\Delta t)} \theta E^\alpha - S^\alpha) \delta E^\alpha + \delta \Delta K = R_3 \quad (29)$$

윗 식에서

$$L^{a\beta} = \hat{X}_{ij}^\alpha L_{jilk}^{(t+\theta\Delta t)} \hat{X}_{kl}^\beta, \quad N^\alpha = \hat{X}_{ij}^\alpha N_{ij}^{(t+\theta\Delta t)} \\ R_1^\alpha = \hat{X}_{ij}^\alpha R_{ij1}, \quad P^{a\beta} = \hat{X}_{ij}^\alpha P_{jilk} \hat{X}_{kl}^\beta, \quad R_2^\alpha = \hat{X}_{ij}^\alpha R_{ij2} \\ S^\alpha = \hat{X}_{ij}^\alpha \sigma_{ij}^{(t+\theta\Delta t)} \quad (30)$$

한편, 식 (30)에 나타난 각 항들에 대해서는 Table 1에서 자세히 기술하였다.

마지막으로 식 (29)로부터 $\delta \Delta K$ 와 δA^α 를 소거하여 식 (31)과 같은 δE^α 에 대한 하나의 통합된 방정식을 얻을 수 있고, 식 (31)에서 구한 δE^α 를 식

(29)에 대입하여 $\delta \Delta K$ 와 δA^α 를 차례대로 구할 수가 있다. 또한 이렇게 구해진 $\delta \Delta K$, δA^α 및 δE^α 를 사용하여 식 (28)에 나타난 선형변환의 역변환(inverse linear transform)을 통하여 최종적으로 $\Delta \sigma_{ij}$, $\Delta \varepsilon_{ij}^p$, $\Delta \alpha_{ij}$ 와 ΔK 를 구할 수 있다.

$$[\delta a_{\alpha\beta} + 2\mu^{(t+\Delta t)} L^{a\beta} + L^{a\gamma} [P^{-1}]^{\gamma\beta} - G^{(t+\theta\Delta t)} N^{t\alpha} (S^\beta \\ - 2\mu^{(t+\Delta t)} \theta E^\beta)] \delta E^\beta \\ = R_1^\alpha + R_3 N^\alpha - L^{a\gamma} [P^{-1}]^{\gamma\beta} R_2^\beta \quad (31)$$

3. 단축문제 해석을 통한 신뢰성 평가

본 연구에서는 앞장에서 기술한 이론적 배경을 바탕으로 Chaboche 통합 점소성 모델을 상용 유한요소해석 프로그램인 ABAQUS의 UMAT으로 구현하였다. 이와 같이 개발된 프로그램에 대하여 적용된 방법의 수치적 정확도를 평가하고, 적용된 Chaboche 모델의 재료거동 예측능력을 평가하기 위하여 316SS를 재료로 하여 Fig. 1(a)와 같은 하중조건을 갖는 단축경화해석(uniaxial hardening analysis)과 단축반복경화해석(uniaxial cyclic hardening analysis) 및 단축응력이완해석(uniaxial stress relaxation analysis)을 여러가지 요소 형태에 대하여 수행하고, 해석결과를 수치해석적으로 구한 엄밀해와 실험결과와 비교 평가하였다. 해석에 사용된 316SS의 재료 물성치는 상온과 600°C에서의 값을 참고문헌 (5)에서 인용하였으며, 이를 Table 2에 나타내었다. 유한요소해석의 경우에는 개발된 UMAT 프로그램이 ABAQUS와 연계되어 신뢰성있게 수행될 수 있는지를 확인하기 위하여

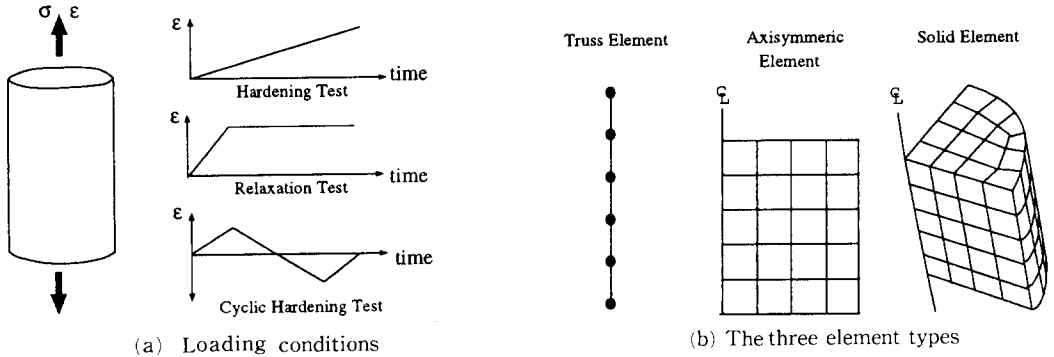


Fig. 1 Loading conditions and three element types used in the present analyses

Table 2 Material parameters in the Chaboche theory for 316 stainless steel used in the present analyses⁽⁵⁾

Temp. (°C)	n	K (MPa)	k (MPa)	C (Mpa)	γ	k+Q (MPa)	b
20	24	151	82	1624000	2800	142	8
600	12	150	6	24800	300	86	10

트러스요소, 축대칭요소 및 3차원 육면체요소를 각각 사용하여 해석을 수행하였고, 이들을 Fig. 1(b)에 나타내었다.

위의 세가지 해석에 대한 수치해석적 엄밀해를 구하기 위하여 식 (1)에서 (10)의 다축상태의 구성방정식을 단축분제로 단순화하여 다음과 같이 변형률 속도, $\dot{\epsilon}(t)$ 를 입력값으로 하고, 응력, $\sigma(t)$ 와 이동경화응력, $\alpha(t)$ 및 등방경화응력, $\chi(t)$ 를 미지수로 하는 연립 미분방정식을 얻었다.

$$\dot{\sigma} = E(\dot{\epsilon}(t) - \dot{\epsilon}_p(\sigma, X, R)) \quad (32)$$

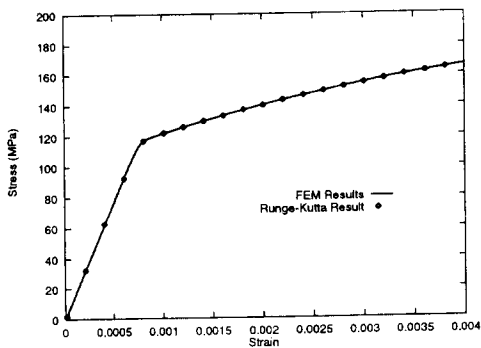


Fig. 2 Comparison of stress-strain curves between FEM and Runge-Kutta solutions for the uniaxial hardening case under the conditions of strain rate = 1.0×10^{-5} and temperature = 600°C

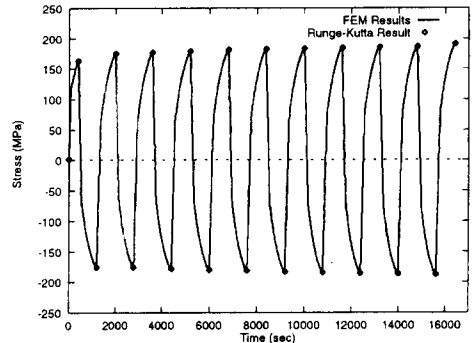


Fig. 3 Comparison of time-stress curves between FEM and Runge-Kutta solutions for the cyclic hardening case under the conditions of strain rate = 1.0×10^{-5} and temperature = 600°C

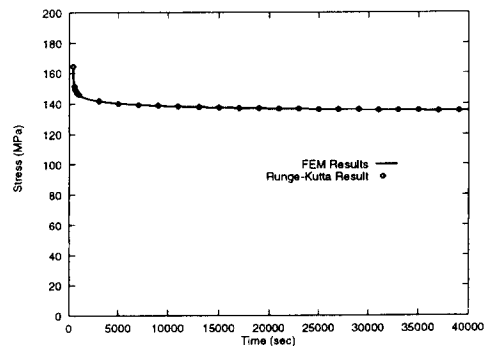


Fig. 4 Comparison of the stress-strain response between FEM and Runge-Kutta solutions for the uniaxial stress relaxation case at 600°C

$$\dot{\alpha} = C \dot{\epsilon}_p(\sigma, \alpha, x) - \gamma |\dot{\epsilon}_p(\sigma, \alpha, x)| \alpha \quad (33)$$

$$\dot{x} = b(Q-x) |\dot{\epsilon}_p(\sigma, \alpha, x)| \quad (34)$$

$$\dot{\epsilon}_p(\sigma, \alpha, x) = \left(\frac{1}{K} \left| \frac{\sigma - \alpha}{K} - x - k \right| \right)^n \text{sing}(\sigma - \alpha) \quad (35)$$

$$\sigma(t=0) = 0, \alpha(t=0) = 0, x(t=0) = 0 \quad (36)$$

또한, 위와 같이 정의된 문제에 대하여 수치적 안정성과 정확도가 우수한 4차 Runge-Kutta법을 적용하여 수치해석적 엄밀해를 구하였고, Runge

-Kutta법을 통한 수식화 결과는 Table 3에 나타나 있다.

Fig. 2, Fig. 3 및 Fig. 4는 단축경화해석, 단축반복경화해석 및 단축응력이완해석 결과에 대하여 수치해석적 엄밀해와 본 연구에서 개발된 UMAT를 사용한 유한요소해석 결과를 비교하기 위하여 응력-변형률 관계를 각각 나타낸 것으로서, 유한요소해석 결과의 경우에는 요소의 형태에 관계없이 동일한 결과를 나타냄을 알 수 있었고, 또한 Runge-Kutta법에 의한 엄밀해와도 0.1% 이내의 차이를

Table 3 Results of Runge-Kutta formulation of uniaxial problems

$\sigma_{j+1} = \sigma_j + \frac{1}{6} (k_{1, \sigma}, 2k_{2, \sigma}, 2k_{3, \sigma}, k_{4, \sigma})$	
$k_{1, \sigma}$	$\Delta t E \{ \dot{\epsilon}(t) - \dot{\epsilon}_p(\sigma_j, \alpha_j, x_j) \}$
$k_{2, \sigma}$	$\Delta t E \dot{\epsilon} \left(t + \frac{1}{2} \Delta t \right) - \Delta t E \dot{\epsilon}_p \left(\sigma_j + \frac{1}{2} k_{1, \sigma}, \alpha_j + \frac{1}{2} k_{1, \alpha}, x_j + \frac{1}{2} k_{1, x} \right)$
$k_{3, \sigma}$	$\Delta t E \dot{\epsilon} \left(t + \frac{1}{2} \Delta t \right) - \Delta t E \dot{\epsilon}_p \left(\sigma_j + \frac{1}{2} k_{2, \sigma}, \alpha_j + \frac{1}{2} k_{2, \alpha}, x_j + \frac{1}{2} k_{2, x} \right)$
$k_{4, \sigma}$	$\Delta t E \dot{\epsilon} (t + \Delta t) - \Delta t E \dot{\epsilon}_p (\sigma_j + k_{3, \sigma}, \alpha_j + k_{3, \alpha}, x_j + k_{3, x})$
$\alpha_{j+1} = \alpha_j + \frac{1}{6} (k_{1, \alpha}, 2k_{2, \alpha}, 2k_{3, \alpha}, k_{4, \alpha})$	
$k_{1, \alpha}$	$C \dot{\epsilon} (\sigma_j, \alpha_j, x_j) - \gamma \alpha_j \dot{\epsilon}_p(\sigma_j, \alpha_j, x_j) $
$k_{2, \alpha}$	$C \dot{\epsilon}_p \left(\sigma_j + \frac{1}{2} k_{1, \sigma}, \alpha_j + \frac{1}{2} k_{1, \alpha}, x_j + \frac{1}{2} k_{1, x} \right) - \gamma \left(\alpha_j + \frac{1}{2} k_{1, \alpha} \right) \dot{\epsilon}_p \left(\sigma_j + \frac{1}{2} k_{1, \sigma}, \alpha_j + \frac{1}{2} k_{1, \alpha}, x_j + \frac{1}{2} k_{1, x} \right) $
$k_{3, \alpha}$	$C \dot{\epsilon}_p \left(\sigma_j + \frac{1}{2} k_{2, \sigma}, \alpha_j + \frac{1}{2} k_{2, \alpha}, x_j + \frac{1}{2} k_{2, x} \right) - \gamma \left(\alpha_j + \frac{1}{2} k_{2, \alpha} \right) \dot{\epsilon}_p \left(\sigma_j + \frac{1}{2} k_{2, \sigma}, \alpha_j + \frac{1}{2} k_{2, \alpha}, x_j + \frac{1}{2} k_{2, x} \right) $
$k_{4, \alpha}$	$C \dot{\epsilon}_p (\sigma_j + k_{3, \sigma}, \alpha_j + k_{3, \alpha}, x_j + k_{3, x}) - \gamma (\alpha_j + k_{3, \alpha}) \dot{\epsilon}_p (\sigma_j + k_{3, \sigma}, \alpha_j + k_{3, \alpha}, x_j + k_{3, x}) $
$x_{j+1} = x_j + \frac{1}{6} (k_{1, x}, 2k_{2, x}, 2k_{3, x}, k_{4, x})$	
$k_{1, x}$	$b(Q - x_j) \dot{\epsilon}_p(\sigma_j, \alpha_j, x_j) $
$k_{2, x}$	$bQ - b \left(x_j + \frac{1}{2} k_{1, x} \right) \dot{\epsilon}_p \left(\sigma_j + \frac{1}{2} k_{1, \sigma}, \alpha_j + \frac{1}{2} k_{1, \alpha}, x_j + \frac{1}{2} k_{1, x} \right) $
$k_{3, x}$	$bQ - b \left(x_j + \frac{1}{2} k_{2, x} \right) \dot{\epsilon}_p \left(\sigma_j + \frac{1}{2} k_{2, \sigma}, \alpha_j + \frac{1}{2} k_{2, \alpha}, x_j + \frac{1}{2} k_{2, x} \right) $
$k_{4, x}$	$bQ - b (x_j + k_{3, x}) \dot{\epsilon}_p (\sigma_j + k_{3, \sigma}, \alpha_j + k_{3, \alpha}, x_j + k_{3, x}) $

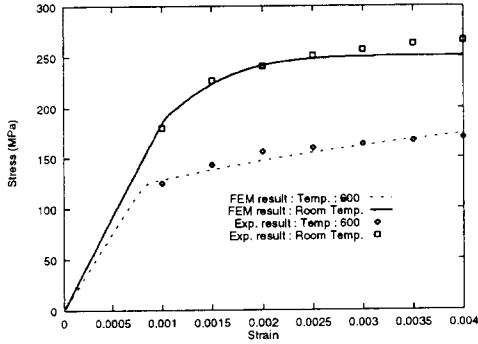


Fig. 5 Comparison between the FEM and experimental results for the uniaxial hardening test at two different temperatures

나타냄으로써 개발된 UMAT 프로그램이 위의 세가지 해석에 대하여 정확한 결과를 나타냄을 확인하였다. 또한, Fig. 5에서는 유한요소해석 결과와 실험결과를 비교한 것으로써, 상온에서는 변형률이 커짐에 따라서 해석결과와 실험결과가 점차적으로 차이를 나타내었지만 고온의 경우에는 비교적 실험결과와 근사함을 알 수 있었다.

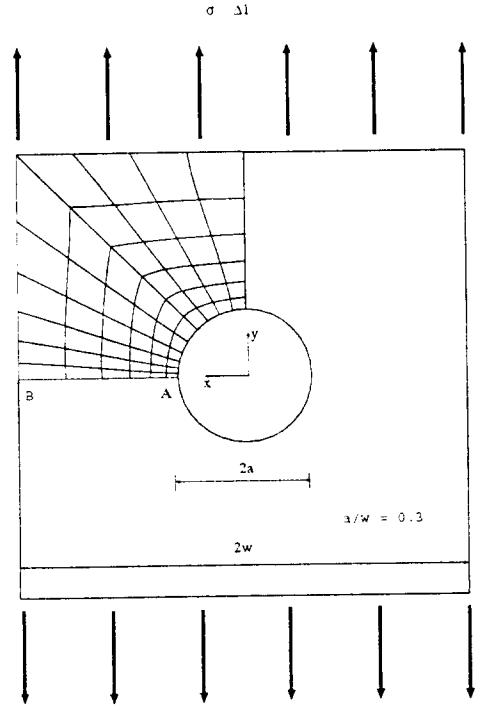
이와 같이 단축경화해석, 단축반복경화해석 및 응력 이완 해석을 수행하여 이를 수치해석적으로 구한 응밀해와 비교하여 동일한 결과를 얻음으로써, ABAQUS의 UMAT으로 개발된 프로그램에 대한 적용성과 수치적 정확성을 확인할 수 있었고, 또한 실험결과와 해석결과의 비교로부터 본 연구에서 채택한 Chaboche 모델이 316SS 재료의 기동을 비교적 정확히 나타내고 있음을 확인하였다.

4. 원공을 가진 평판의 응력해석

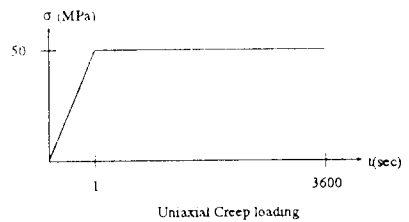
본 연구에서 개발된 프로그램의 실제 고온 구조물 비탄성해석에 대한 적용성을 알아보기 위하여 다음과 같은 원공을 가진 평판에 대하여 크리프해석과 단축경화해석을 수행하였다. Fig. 6(a)에서는 해석된 모델의 기하학적인 형상을 나타내었고, Fig. 6(b)에서 각 해석에 대한 하중조건을 나타내었다. 해석은 모델의 기하학적인 대칭성을 고려하여 전체의 1/4에 대해서만 수행되었고, 평면 변형률조건을 가정하여 해석하였다. 재료상수는 316SS의 600°C의 값을 사용하였다.

4.1 단축 크리프해석

크리프해석은 Fig. 6(b)과 같이 50 MPa의 유지



(a) Geometric model of plate



(b) Loading conditions

Fig. 6 Schematic diagram of geometric shape of plate with a hole and loading condition in the present analyses

응력값에 대하여 수행되었다. Fig. 7에서는 단면 A-B에 대하여 시간에 따른 변형률의 변화를 각 위치에 대해서 나타낸 것으로써 A점 부근에서 가장 큰 변형률 값을 가짐을 확인할 수 있다. 이러한 결

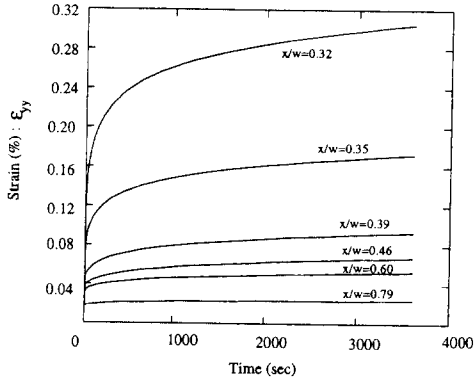


Fig. 7 Comparison of time-strain curves obtained from creep analyses at various positions along the path A-B

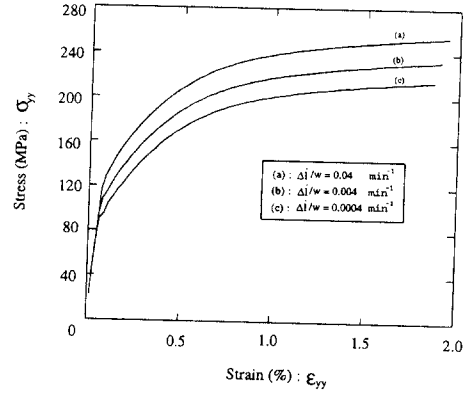


Fig. 9 Stress-strain curves obtained from hardening analyses for various strain rates

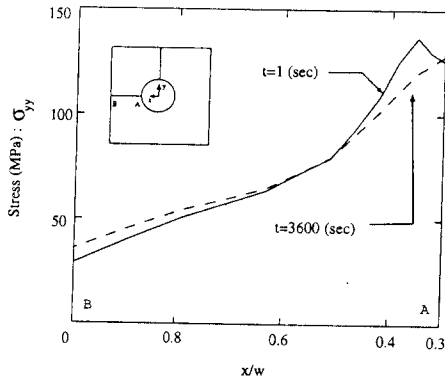


Fig. 8 Stress distributions at time $t=1$ sec and stress redistributions at time $t=3600$ sec along the path A-B

과는 내부의 원공에 의하여 생긴 응력집중으로 A 점 부근의 유지응력값이 가장 크게 나타나기 때문이다. 또한, Fig. 8에서는 $t=1$ sec와 $t=3600$ sec에서의 단면 A-B의 응력분포를 나타낸 것으로 $t=1$ sec에서의 응력분포가 크립이 발생되면서 $t=3600$ sec의 응력분포와 같이 재분포됨을 확인할 수 있다. 이러한 결과는 Chaboche 모델의 내부변수들이 외부의 하중조건의 변화없이도 시간에 따라 변화하는 동적 특성을 갖음으로써 나타난 결과이다.

4.2 단축경화해석

단축경화해석은 Fig. 6(b)와 같은 하중조건에 대해서 $\Delta t/w$ 가 0.04 min^{-1} , 0.004 min^{-1} 및 0.0004 min^{-1} 인 경우에 대하여 각각 수행되었다. Fig. 9에서는 단축경화해석의 해석된 결과를 나타낸 것으로

변형률 변화에 증가될수록 응력값이 커지는 양상을 나타내었다. 따라서 Chaboche 모델이 실제 재료의 변형률 변화율에 의한 영향을 충분히 나타내고 있음을 확인하였다.

5. 결론

본 연구에서는 구조물의 고온에서의 비탄성해석 기술확립을 위한 연구를 수행하기 위하여 Chaboche 점소성 구성방정식을 GMR 시간적분법을 사용하여 수치화하고, 이를 UMAT으로 구현함으로써 ABAQUS를 이용하여 구조물의 비탄성해석을 수행할 수 있도록 하였다. 또한 간단한 단축문제에 대해서 Runge-Kutta 방법에 의한 해석결과와 실험결과 등과 UMAT기능을 활용한 유한요소해석 결과를 비교함으로써 개발된 UMAT의 신뢰성과 적용된 Chaboche 모델의 재료거동에측 능력을 평가하였고, 원공을 가진 평판에 대하여 단축경화해석과 크리프해석을 수행하여 개발된 UMAT 프로그램의 유용성을 확인하였다. 이상에서 얻은 결과를 정리하면 다음과 같다.

(1) 단축문제에 대한 Runge-Kutta 방법과 UMAT 프로그램에 의한 유한요소해석 결과 비교로부터 본 연구에서 개발된 UMAT 프로그램의 수치적 안정성과 정확성을 확인하였다.

(2) 실험결과와 비탄성해석을 통한 해석결과와의 비교를 통하여 본 연구에서 채택한 Chaboche 점소성 구성방정식이 고온에서 재료의 거동을 비교적 정확히 예측함을 확인하였다.

(3) 본 연구에서 개발된 프로그램으로 원형 구멍

을 가진 판에 대하여 단축경화해석과 크리프 해석을 수행함으로써 개발된 프로그램이 고온 구조물의 건전성 평가를 위한 비탄성 해석에 유용하게 적용될 수 있음을 확인하였다.

참고문헌

- (1) Armstrong, P. J. and Frederick, C. O., 1966, "A Mathematical Representation of the Multiaxial Baushinger Effect," *Cent. Electric Generating Bd. Rep. RD/B/N/73/, Gt. Br.*
- (2) Robinson, D. N., 1978, "A Unified Creep-Plasticity Model for Structural Metals at High Temperatures," *ORNL/TM 5969.*
- (3) Chaboche, J. L., 1977, "Viscoplastic Constitutive Equations for the Description of Cyclic and Anisotropic Behavior of Metals," *Bull. De L'Acad. Polonaise des Sci.*, Vol. 25, p. 33.
- (4) Chaboche J. L. and Rousselier, G., 1983, "On the Plastic and Viscoplastic Constitutive Equations—Part 1 : Rules Developed with Internal Variable concept," *J. of Press. Vess. Tech.*, Vol. 15, p. 153.
- (5) Chaboche, J. L., 1990, *Mechanics of Solid Materials*, Cambridge University Press.
- (6) Chaboche, J. L., 1993, "Cyclic Viscoplastic Constitutive Equations, Part I : A Thermodynamically Consistent Formulation," *J. Appl. Mech.*, Vol. 60, p. 813.
- (7) Bodner, S. R. and Partom Y., 1975. "Constitutive Equations for Elasto-Viscoplastic Strain Hardening Materials," *J. Appl. Mech.*, Vol. 42, p. 235.
- (8) Miller A. K., 1976, "An Inelastic Constitutive Model for Monotonic, Cyclic and Creep Deformation: Part 1, Equations, Development and Analytical Procedures: Part 2, Application to Type 304 Stainless Steel," *J. Engng. Mat. and Tech.*, Vol. 98, p. 97.
- (9) Walker, K. P., 1981, "Research and Development Program for Nonlinear Structural Modeling with Advanced Time-Temperature Dependent Constitutive Relationships," *Rep. N82-1608, CR-165533, NASA Lewis Res. Center, NAS 3-3055.*
- (10) Krieg, R. D. and Krieg D. B., 1977, "Accuracies of Numerical Solutions for the Elastic-Perfectly Plastic Model," *J. Press. Vess. Technol.*, Vol. 99, p. 510.
- (11) Schreyer, H. L., Kulak, R. L. and Kramer J. M., 1979, "Accurate Numerical Solutions for Elastic-Plastic Models," *J. Press. Vess. Tech.*, Vol. 101, p. 226.
- (12) Yoder, P. J. and Whirley, R. G., 1984, "On the Numerical Implementation of Elastoplastic Models," *J. Appl. Mech.*, Vol. 51, p. 282.
- (13) Oritz, M. and Popov, E. P., 1985, "Accuracy and Stability of Integration Algorithms for Elastoplastic Constitutive Relations," *Int. J. Num. Meth. Engng.*, Vol. 21, p. 1561.
- (14) Oritz, M. and Simo, J. C., 1986. "An Analysis of a New Class of Integration Algorithms for Elasto Plastic Constitutive Equations," *Int. J. Num. Meth. Engng.*, Vol. 23, pp. 353~366.
- (15) Nagtegaal, J. C., 1982, "On the Implementation of Inelastic Constitutive Equations with Special Reference to Large Deformation Problems," *Comp. Methods Appl. Mech. Engng.*, Vol. 33, p. 469.
- (16) Tanaka, T. G. and Miller, A. K., 1988, "Development of a Method for Integrating Time-Dependent Constitutive Equations with Large, Small or Negative Strain Rate Sensitivity," *Int. J. Num. Meth. Engng.*, Vol. 26, pp. 2457~2485.
- (17) Miller, A. K. and Tanaka, T. G., 1988, "NONSS:A New Method for Integrating Unified Constitutive Equations under Complex Histories," *J. Engng. Mater. Technol.*, Vol. 110, pp. 205~211.
- (18) Honberger, K. and Stamm, H., 1989, "An Implicit Integration Algorithm with A Projection Method for Viscoplastic Constitutive Equations," *J. for Num. Meth. Engng.*, Vol. 28, p. 2397.
- (19) Walz, G., Hornberger, K. and Stamm, H., 1990, "An Implicit Integration Algorithm for Plane Stress Viscoplastic Constitutive Equations," *Comp. and Struc.*, Vol. 36, pp. 539~546.