〈논 문〉

유연한 보구조물의 탄성 유한요소해석

정동원* · 임세영**

(1995년 12월 20일 접수)

Elastic Finite Element Analysis for a Flexible Beam Structure

Dong Won Jung and Sae Young Lim

Key Words: Tangent Stiffness(접선강성), Finite Element Method(유한요소법), Arc Length Method(호장방법), Buckling(좌굴), Beam Structure(보구조물)

Abstract

A finite element analysis is performed for large deformations of a flexible beam. The total Lagrangian formulation for a general large deformation, which involves finite rotations, is chosen and the exponential map is used to treat finite rotations from the Eulerian point of view. The finite element results are confirmed for several cases of deformations through comparison to a first order elasticity solution obtained by numerical integration, and the agreement between the two is found to be excellent. For lateral buckling, the point of vanishing determinant of the resulting unsymmetric tangent stiffness is traced to examine its relationship to bifurcation points. It is found that the points of vanishing determinant is not corresponding to bifurcation points for large deformations in general, which suggests that the present unsymmetric tangent stiffness is not an exact first derivative of internal forces with respect to displacement.

기호설명

A : 보의 단면적

$Assem$: 요소행렬을 전체계에 대한 행렬로 조합함을 의미

$\boldsymbol{C}$: 기준좌표계의 탄성텐서

$diag[\ ]$: 행렬의 대각항

$\boldsymbol{E}_i^k$: K절점 단면벡터의 최초에 변형되지 않은 기준벡터

$\boldsymbol{e}_i$: 공간(spatial)좌표계에서의 단위벡터 (i=1, 2, 3)

$\boldsymbol{E}_i$: 기준(reference)좌표계에서의 단위벡터 (i=1, 2, 3)

EA : 축강성(axial stiffness)

EI_1, EI_2 : 주축굽힘강성(principal bending stiffness)

E, G : 인장 및 전단강성계수

F : 내력(internal force)

GA_1, GA_2 : 전단강성(shear stiffness)

GJ : 비틂강성(torsional stiffness)

I_1, I_2 : 면적 주관성모멘트

I_e^h : 어떤 절점(node)에 관계되는 요소

J : 비틂상수(torsion constant)

$\boldsymbol{K}^e$: 요소접선 강성행렬(element tangent stiffness matrix)

K : 접선강성행렬

l : 변형전 보의 전체길이(Fig. 4 참조)

L : 변형된 형상에서 보의 x방향 길이, 즉 x축에 투영(projection)된 길이(Fig. 4 참조)

$L[\ ]$: 선형부분(linear part)

m : 공간좌표계상의 모멘트(stress couple)

$\boldsymbol{M}$: 기준좌표계상의 모멘트

*현대자동차(주) 프레스기술실

**회원, 한국과학기술원 기계공학과

$\bar{\boldsymbol{m}}$: 공간좌표계상의 외부모멘트
n : 공간좌표계상의 힘(stress resultant)
$\boldsymbol{N}$: 기준좌표계상의 힘
$\bar{\boldsymbol{n}}$: 공간좌표계상의 외부힘
N_i : 형상함수(shape function)
$\boldsymbol{p}_e$: 비평형 절점하중(unbalanced nodal force)
$\boldsymbol{p}_o$: 비례하중을 표시하는 기준하중벡터
s : 변형전 보의 도심축에 따른 곡선좌표계(curvilinear coordinate system)
$\boldsymbol{S}_e$: 요소재료 강성행렬(element material stiffness matrix)
t : 시간
$\boldsymbol{T}_e$: 요소기하학적 강성행렬(element geometric stiffness matrix)
${}^n\boldsymbol{t}_i^k$: 변형단계 n의 k절점 단면벡터
$\boldsymbol{u}$: 변위
$\boldsymbol{x}$: 공간좌표계상의 임의점의 위치

그리스문자

θ^k : 전체 직각좌표계(global cartesian coordinate system)에서의 회전각벡터
Θ^k : θ^k을 축벡터(axial vector)로 하는 스큐대칭텐서(skew symmetric tensor)
${}^n\Lambda^k$: k절점의 변형단계 n에서의 회전(rotation)
Φ_o : 공간좌표계상의 도심점의 위치
γ : 공간좌표계에서의 변형률(strain)
ω_i : 공간좌표계에서의 곡률(curvature) (i=1, 2, 3)
Ω : ω_i을 축벡터로 하는 스큐대칭텐서
Γ : 기준좌표계에서의 변형률
κ_i : 기준좌표계에서의 곡률(i=1, 2, 3)
K : κ_i을 축벡터로 하는 스큐대칭텐서
κ : 전단계수(shear coefficient)
ν : 푸아송(poisson)비
$\eta(s)$: 임의의 가용변분(admissible variation)
$\eta_o(s)$, $\theta(s)$: 가용변분의 변위, 회전각 성분
Π : 6×6 회전텐서
λ : 비례하중일 때의 하중인자
Δ : 증분량을 의미
$\psi(s)$: 회전인자(rotation parameters)
π_p : 포텐셜에너지
β : Nondimensional buckling load $=pl^2/\sqrt{BC}$
β_0 : Classical nondimensional buckling load $=4.0126$

상첨자

k : 절점
n : 변형단계
t : Transpose
$'$: s에 대한 도함수(s-derivatives)
$-$: Prescribe됨

하첨자

i : 좌표계에서 세 방향을 의미, i=1, 2, 3
중복된 첨자 : Summation rule 적용

I. 서 론

건축물의 구조와 같은 일반적인 구조물은 그 기하학적 형상이 매우 잘 정열되어 있으며 사용되는 부재도 강성이 매우 강하므로 기하학적인 비선형성을 고려하지 않아도 충분히 해석되어질 수 있었다. 그러나 형상이 복잡하고 경량화된 구조물의 경우에는 기하학적인 비선형성이 두드러지게 나타나므로 비선형성을 고려하여 해석해야 한다. 또 사람의 활동영역이 해양과 우주로 넓어지고, 이에 따라 가늘고 긴 구조물들이 응용되고 있다. 이들은 그 특성상 무게는 작고 유연성은 커 대변위가 고려된 설계가 필요하다. 그리고 보구조물의 안정성을 검토하기 위한 좌굴후 해석을 할 경우 대변위를 수반하므로 이를 고려한 해석이 필요하다. 비선형 현상의 복잡성으로 인하여 간단한 경우를 제외하고는 해석해가 없어 많은 경우 수치적 방법으로 문제를 해결할 수 밖에 없다.

대변위에 따른 운동학적 비선형성에 대한 본격적 연구는 Yang[1]이 그 효시로 좌표변환과 초기응력 강성을 포함한 증분해법을 이용하였다. 이후 대변형 보에 대한 많은 연구가 되어 여러가지 수치해석 방법이 제시되었다.[2~10] Simo[3,4] 등은 완전한 삼차원 보이론으로 대변형에 대한 비선형 수식화를 하여 비대칭 접선강성(nonsymmetric tangent stiffness)를 얻었다. 그러나 수렴단계(convergence step)에서는 접선강성이 대칭이 됨을 보였다. Cardona 등[7]은 Eulerian, total Lagrangian, updated Lagrangian의 관점에서 회전을 처리하여 Eulerian일 때는 보존하중(conservative load)일 경우에도 비대칭 접선강성이 됨을 보였고, 이는

Simo 등[4]의 결과와 일치한다. 나머지 total Lagrangian, updated Lagrangian일 경우에는 대칭 강성을 얻을 수 있고 특히 Updated Lagrangian일 경우에는 임의의 큰 회전도 처리할 수 있음을 보였다. 또 이들 3가지 방법의 장단점을 보였다.

Argyris 등[10]은 전체 직각좌표계(global cartesian coordinate system)에서 고정된 축에 대한 회전자유도를 이용하여 비대칭 접선강성을 유도하였다. 여기서, Iura 등[6]은 회전변수로서 유한회전 텐서의 임의의 3개 독립요소를 사용해서 항상 대칭이 되는 접선강성을 얻었다.

본 수식화과정에서는 대변위 현상을 설명하기 위하여 고정된 공간좌표계(fixed spatial coordinate system)에서 요소의 변형형상을 기술하는 Total lagrangian 수식표현을 사용한다. 비선형 변형률-변위관계를 증분식으로 고치고 비선형 증분응력-변형률 관계를 선형화해서 가상일의 원리(principle of virtual work)를 적용하여 기하학적인 비선형을 고려하는 증분형 비선형 평형방정식(incremental equilibrium equation)을 유도한다. 보요소는 절점의 변위와 회전을 각각 독립변수로 하였고 이에따른 전단에 의한 강성과잉을 방지하기 위하여 보중심선을 따라서 감차적분(reduced integration)을 하였다. 이때 형상함수는 보다 정확성을 기하기 위하여 2차 형상함수(quadratic shape function)을 사용하였다. 재료는 등방성 탄성재료로 가정하였으며 단면의 형상과 크기는 변형중에 변하지 않는다고 가정하였다. 내부 응력성분은 단면내에서 볼때 도심방향 인장성분과 두 전단성분만 있다.

유한회전(finite rotation)은 벡터가 아니기 때문에 삼차원 해석에서는 이에 대한 처리가 중요하다. 본 연구에서의 회전에 대한 처리는 다음과 같다. 보단면을 이루는 직교하는 두축과 이에 수직인 축으로 단면좌표계(fiber coordinate system)를 정의한다. 증분 유한요소해석(incremental finite element analysis)에서 구한 회전자유도는 미소회전(infinitesimal rotation)으로 이는 벡터라고 볼 수 있고 이를 축벡터(axial vector)로 하는 스큐대칭 텐서(skew-symmetric tensor)의 지수함수는 유한회전을 기술하는 직교(orthonormal)텐서가 된다. 이것으로 단면좌표계를 회전시키면 단면의 궤적을 추적할 수 있다. 또 다른 좌표계로 변형전보 단면을 이루는 고정 기준좌표계(fixed reference coordinate system)를 설정하여 보의 변형전 단면방향을 나타내고 단면좌표계의 기준이 된다. 유한회전은 더하거나 곱할 수 없으므로 보간할 수 없다. 따라서 유한회전을 벡터로 바꾸어서 보간할 수 밖에 없는데 본 프로그램에서는 Quaternion parameters를 이용하여 보간하였다. 좌표변환(coordinate transformation)을 위하여 Euler parameter[17]을 이용하였고 또 다른 방법으로 dummy절점을 이용하여 공간좌표계에서 변형전 보의 형상을 구하여 좌표변환을 하였다.

비선형 경계조건 문제를 풀기위한 방법으로 뉴우톤(newton)해법과 호장법(arclength method)[15,16]을 병용하였으며 하중증분과 원호의 길이는 자동조절하는 알고리즘을 채택하여 효율성을 높였다. 반복계산(iteration)중 수렴 여부는 변위증분과 에너지변화 크기를 이들의 첫번째 계산치와 비교하여 결정한다.

2. 유한요소의 수식화 및 수치해법

2.1 보의 형상과 변형의 기술

보요소의 변형에 따른 거동을 기술하기 위한 기본가정은 다음과 같다. 변형시 또는 변형중 보요소내의 변형률은 아주 작다고 가정한다. 그러나 전체적인 변위와 회전에 대한 제한은 없다. 단면의 형상과 크기는 변하지 않으며 전단응력으로 인하여 보 중심축에 수직이 아닐 때도 있다. 단면의 모양이 변하지 않으므로 보 내부의 응력상태는 단면내 두 성분의 전단응력과 길이방향 인장응력만으로 단순화된다.

본 연구에서 사용한 좌표계는 다음과 같다. (Fig. 1) $s\in[0,\ L]$은 변형전 보의 도심축에 따른 곡선좌표계(curvilinear coordinate system)을 나타낸다. 공간좌표계(spatial coordinate system)는 보의 형상과 변형을 기술하기 위하여 고정시킨 좌표계이다. 변형중에 단면의 방향을 나타내기 위하여 단면좌표계(fiber coordinate system)를 사용하는데 단면좌표계는 변형중에 하나의 좌표축이 단면에 수직하도록 잡은 좌표계이다. 변형전 단면의 방향을 나타내기 위하여 기준좌표계(reference coordinate system)를 사용하는데 변형전 단면좌표계(fiber coordinate system)와 일치한다. 절점의 단면벡터(단면좌표계 단위벡터)와 공간좌표계에서의 절점위치로 보의 형상은 결정된다.

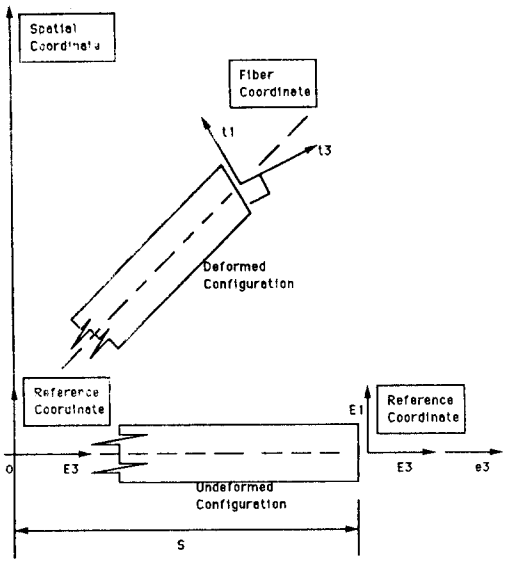

Fig. 1 Undeformed and deformed configuration defined coordinate system

단면벡터를 변형단계 n의 형상에서 $n+1$로 개정해야 되는데 회전이 큰 경우 단면벡터 개정은 유한회전으로 다루어야 한다.[9,11,12] 유한(finite)회전은 직교텐서로 기술되고 이는 세가지 독립성분을 갖는다. 미소회전(infinitesimal rotation)이 되면 이는 스큐대칭(skew-symmetric)텐서가 되고 이의 축벡터(axial vector)를 벡터량이라 볼 수 있다. 따라서 K절점의 회전자유도 θ^k 크기가 미소이면 다음과 같이 적을 수 있다.

$$\boldsymbol{\theta}^k = \theta_1^k \boldsymbol{e}_1 + \theta_2^k \boldsymbol{e}_2 + \theta_3^k \boldsymbol{e}_3 \tag{2.1}$$

위의 회전벡터를 축벡터로 하는 스큐대칭텐서를 Θ^k라고 하면 이에 대한 회전의 정확한 표현은 $\exp(\Theta^k)$이므로 이를 변형단계 n의 단면벡터 ${}^n\boldsymbol{t}_i^k$에 작용하면 다음과 같다.

$$\exp(\Theta^k)\,{}^n\boldsymbol{t}_i^k = {}^{n+1}\boldsymbol{t}_i^k, \quad i=1,\ 3 \tag{2.2}$$

식 (2.2)와 같이 하면 단면벡터를 정확하게 회전시켜 개정한다. 텐서의 지수함수는 부록A와 같이 계산하여 직교텐서를 얻는다.

단면좌표계는 각 절점에서 정의된다. 최초에 변형되지 않은 기준좌표계의 단위벡터를 각 하중단계마다 절점의 회전자유도로 직교변환하여 개정되어지는 좌표계이다. 변형단계 n의 형상에서 k절점 단면벡터를 변형되지 않은 기준벡터와 관련지우면 다음과 같다

$${}^n\boldsymbol{t}_i^k = \exp({}^{n-1}\Theta^k)\exp({}^{n-2}\Theta^k)\cdots\exp({}^0\Theta^k)\,\boldsymbol{E}_i^k \tag{2.3}$$

여기서, 회전(rotation)을 다음과 같이 정의한다.

$${}^n\Lambda^k = \exp({}^{n-1}\Theta^k)\exp({}^{n-2}\Theta^k)\cdots\exp({}^0\Theta^k) \tag{2.4}$$

2.2 힘과 모멘트

Nonsymmetric first Piola-Kirchhoff stress tensor, $\boldsymbol{P}\equiv\boldsymbol{T}_i\times\boldsymbol{E}_i$에 의해 현재 형상에서 단면 $\Gamma\subset R^2$에 걸친 공간좌표상의 힘(stress resultant) $\boldsymbol{n}=n_i\boldsymbol{e}_i$와 모멘트(stress couple) $\boldsymbol{m}=m_i\boldsymbol{e}_i$은 아래와 같이 표현된다.

$$\boldsymbol{n}=\int_\Gamma \boldsymbol{T}_3 d\Gamma, \quad \boldsymbol{m}=\int_\Gamma [x-\boldsymbol{\Phi}_o(s,\ t)]\times\boldsymbol{T}_3 d\Gamma \tag{2.5}$$

단, $\boldsymbol{x}$: 공간좌표상의 임의점의 위치

$\boldsymbol{\Phi}_o$: 공간좌표상의 도심점의 위치

기준좌표계에서의 힘(stress resultant) $\boldsymbol{N}=N_i\boldsymbol{E}_i$와 모멘트(stress couple) $\boldsymbol{M}=M_i\boldsymbol{E}_i$는 식 (2.4)의 회전을 이용하여 구할 수 있다.

$$\begin{aligned}\boldsymbol{n}(s,\ t)&=\boldsymbol{\Lambda}(s,\ t)\boldsymbol{N}(s)\\ \boldsymbol{m}(s,\ t)&=\boldsymbol{\Lambda}(s,\ t)\boldsymbol{M}(s)\end{aligned} \tag{2.6}$$

공간좌표계와 기준좌표계에서의 변형률과 곡률은 각각 다음과 같이 표현된다.

Spatial :

strain $\quad \boldsymbol{\gamma}=\dfrac{\partial\boldsymbol{\Phi}_o(s,\ t)}{\partial s}-\boldsymbol{t}_3$

curvature ω (2.7a)

Reference :

strain $\quad \boldsymbol{\Gamma}=\boldsymbol{\Lambda}^t\dfrac{\partial\boldsymbol{\Phi}_o(s,\ t)}{\partial s}-\boldsymbol{E}_3$

curvature $\boldsymbol{\kappa}=\boldsymbol{\Lambda}^t\boldsymbol{\omega}$ (2.7b)

윗식에서 구한 변형률과 곡률로부터 기준좌표계의 힘과 모멘트를 다음과 같이 구한다.

$$\begin{Bmatrix}\boldsymbol{N}\\ \boldsymbol{M}\end{Bmatrix}=\boldsymbol{C}\begin{Bmatrix}\boldsymbol{\Gamma}\\ \boldsymbol{\kappa}\end{Bmatrix} \tag{2.8}$$

여기서, $\boldsymbol{C}$는 기준좌표계의 elasticity tensor로 아래와 같이 나타내진다.

$$\boldsymbol{C}=diag[GA_1,\ GA_2,\ EA,\ EI_1,\ EI_2,\ GJ] \tag{2.9}$$

A_1과 A_2는 $A_1=A_2=\kappa A$로 전단계수(shear coefficient)[21]에 의해 관계 지워진다.

$$\kappa=\frac{10(1+\nu)}{12+11\nu} \tag{2.10}$$

2.3 Weak form of balance equations : Tangent operator

공간좌표상에서 local balance law는 아래와 같이 나타낼 수 있다.

$$\frac{\partial}{\partial s}\boldsymbol{n}+\bar{\boldsymbol{n}}=\boldsymbol{0}$$
$$\frac{\partial}{\partial s}\boldsymbol{m}+\frac{\partial \boldsymbol{\Phi}_o}{\partial s}\times\boldsymbol{n}+\bar{\boldsymbol{m}}=\boldsymbol{0} \tag{2.11}$$

위의 식에 임의의 가용변분(admissible variation) $\boldsymbol{\eta}(s)=(\boldsymbol{\eta}_o(s),\ \boldsymbol{\theta}(s))$을 곱하면

$$\begin{aligned}G(\boldsymbol{\Phi},\ \eta)=&\int_{[0,l]}\left[\left(\frac{d\boldsymbol{n}}{ds}+\bar{\boldsymbol{n}}\right)\cdot\eta_o\right.\\&\left.+\left(\frac{d\boldsymbol{m}}{ds}+\frac{d\boldsymbol{\Phi}_o}{ds}\times\boldsymbol{n}+\bar{\boldsymbol{m}}\right)\cdot\boldsymbol{\theta}\right]ds\\=&0\end{aligned} \tag{2.12}$$

윗식에서 $\boldsymbol{\Phi}=(\boldsymbol{\Phi}_o,\ \boldsymbol{\Lambda})$이고 변분 $\boldsymbol{\eta}(s)$는 경계(boundary)에서 없어지기 때문에 윗식을 부분적분하면

$$\begin{aligned}G(\boldsymbol{\Phi},\ \eta)=&\int_{[0,l]}\left\{\boldsymbol{n}\cdot\left[\frac{d\eta_o}{ds}-\boldsymbol{\theta}\times\frac{d\boldsymbol{\Phi}_o}{ds}\right]\right.\\&\left.+\boldsymbol{m}\cdot\frac{d\boldsymbol{\theta}}{ds}\right\}ds\\&-\int_{[0,l]}(\bar{\boldsymbol{n}}\cdot\eta_o+\bar{\boldsymbol{m}}\cdot\theta)\,ds\end{aligned} \tag{2.13}$$

윗식을 기준좌표계에서 나타내면

$$\begin{aligned}G(\boldsymbol{\Phi},\ \eta)=&\int_{[0,l]}\left\{\boldsymbol{N}\cdot\boldsymbol{\Lambda}^t\left[\frac{d\eta_o}{ds}-\boldsymbol{\theta}\times\frac{d\boldsymbol{\Phi}_o}{ds}\right]\right.\\&\left.+\boldsymbol{M}\cdot\boldsymbol{\Lambda}^t\frac{d\boldsymbol{\theta}}{ds}\right\}ds\\&-\int_{[0,l]}(\bar{\boldsymbol{n}}\cdot\eta_o+\bar{\boldsymbol{m}}\cdot\theta)\,ds\end{aligned} \tag{2.14}$$

$\boldsymbol{\Phi}=\bar{\boldsymbol{\Phi}}$에서 함수의 선형부분은

$$L[G(\bar{\boldsymbol{\Phi}},\ \eta)]=G(\bar{\boldsymbol{\Phi}},\ \eta)+DG(\bar{\boldsymbol{\Phi}},\ \eta)\cdot\Delta\boldsymbol{\Phi} \tag{2.15}$$

윗식에서 $G(\bar{\boldsymbol{\Phi}},\ \eta)$항은 $\boldsymbol{\Phi}=\bar{\boldsymbol{\Phi}}$에서 비평형힘(unbalanced force)을 나타내고 $DG(\bar{\boldsymbol{\Phi}},\ \eta)$는 접선강성을 나타낸다. 식 (2.14)은 부록 B에 있는 $\boldsymbol{R}$, $\boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{\Xi}$과 같은 표기법(notation)을 도입하고 $\bar{\boldsymbol{r}}$가 prescribe된 $\boldsymbol{r}$을 나타낸다면

$$G(\boldsymbol{\Phi},\ \eta)=\int_{[0,l]}[(\boldsymbol{\Xi}^t\eta)\cdot(\Pi\boldsymbol{R})-\eta\cdot\bar{\boldsymbol{r}}]ds \tag{2.16}$$

식 (2.16)을 선형화하면

$$\begin{aligned}DG(\bar{\boldsymbol{\Phi}},\ \eta)\cdot\Delta\boldsymbol{\Phi}=&D_1G(\bar{\boldsymbol{\Phi}},\ \eta)\cdot\Delta\boldsymbol{\Phi}\\&+D_2G(\bar{\boldsymbol{\Phi}},\ \eta)\cdot\Delta\boldsymbol{\Phi}\end{aligned} \tag{2.17}$$

윗식의 첫번째 항 $D_1G(\bar{\boldsymbol{\Phi}},\ \eta)$은 내력(internal force) R의 선형화에 의한 접선강성행렬의 재료부분(material part)에 해당한다. 두번째 항 $D_2G(\bar{\boldsymbol{\Phi}},\ \eta)$은 operator $[\boldsymbol{\Xi}\Pi]$의 선형화로부터 나온 접선강성의 기하학적 부분(geometric part)에 해당한다.

$$D_1G(\bar{\boldsymbol{\Phi}},\ \eta)\cdot\Delta\boldsymbol{\Phi}=\int_{[0,l]}(\bar{\boldsymbol{\Xi}}^t\eta)\cdot(\bar{\boldsymbol{c}}\bar{\boldsymbol{\Xi}}^t\Delta\boldsymbol{\Phi})\,ds \tag{2.18}$$

윗식에서 $\bar{\boldsymbol{c}}$는 $\bar{\boldsymbol{c}}=\bar{\boldsymbol{\Pi}}\hat{\boldsymbol{C}}\bar{\boldsymbol{\Pi}}^t$로 공간좌표계에서의 elasticity tensor의 형태이다.

$$D_2G(\bar{\boldsymbol{\Phi}},\ \eta)\cdot\Delta\boldsymbol{\Phi}=\int_{[0,l]}(\boldsymbol{\Psi}^t\eta)\cdot(\bar{\boldsymbol{B}}\boldsymbol{\Psi}^t\Delta\boldsymbol{\Phi})\,ds \tag{2.19}$$

윗식에서 $\boldsymbol{\Psi}$와 $\boldsymbol{B}$는 부록 C에 나와 있다.

2.4 유한요소 수식화(Finite element formulation)

변위와 회전각은 아래와 같이 보간(interpolation)된다.

$$\begin{aligned}\boldsymbol{u}_{oe}^h(\xi)&=\sum_{i=1}^{3}N_i(\xi)\,\boldsymbol{u}_i^h\\\boldsymbol{\theta}_e^h(\xi)&=\sum_{i=1}^{3}N_i(\xi)\,\boldsymbol{\theta}_i^h\end{aligned} \tag{2.20}$$

형상함수는 부록 D에 있다.

$$G^h(\bar{\boldsymbol{\Phi}},\ \eta^h)=\sum_{e=1}^{E}G_e^h(\bar{\boldsymbol{\Phi}},\ \eta^h) \tag{2.21}$$

단, E는 총 요소수

절점 I에 관계되는 요소 I_e^h에서 비평형 절점하중 $\boldsymbol{p}_{eI}^h$은

$$\boldsymbol{p}_{eI}^h(\bar{\boldsymbol{\Phi}})=\int_{I_e^h}\left(\bar{\boldsymbol{\Xi}}_i\begin{Bmatrix}\boldsymbol{n}_e^h\\\boldsymbol{m}_e^h\end{Bmatrix}-\begin{bmatrix}N_I\mathbf{1}&\mathbf{0}\\\mathbf{0}&N_I\mathbf{1}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\bar{\boldsymbol{n}}\\\bar{\boldsymbol{m}}\end{Bmatrix}\right)ds \tag{2.22}$$

$$G_e^h(\bar{\boldsymbol{\Phi}},\ \eta^h)=\eta_e^h\cdot\boldsymbol{p}_e^h(\bar{\boldsymbol{\Phi}})=\sum_{I=1}^{3}\eta_I^h\cdot\boldsymbol{p}_{eI}^h(\boldsymbol{\Phi}) \tag{2.23}$$

식 (2.23)의 선형부분을

$$I.[G_e^h(\Phi,\ \eta^h)]=\eta^h\cdot[\{S_e^h(\Phi)+T_e^h(\Phi)\}\cdot\Delta\Phi_e^h+p_e^h(\Phi)] \quad (2.24)$$

여기서, S_e^h와 T_e^h는 각각 요소재료 강성행렬(element material stiffness matrix)과 요소기하학적 강성행렬(element geometric stiffness matrix)을 나타낸다. S_{eij}^h와 T_{eij}^h가 S_e^h와 T_e^h에서 절점 I와 J의 중첩(coupling)된 submatrice이고 i, j는 E에 포함되어 있다. 따라서 요소접선 강성행렬은

$$K^e=S_e^h+T_e^h \quad (2.25)$$

전체 행렬식은 요소행렬로부터 다음과 같이 조합된다.

$$K\Delta u=\Delta P \quad (2.26)$$

단, $K=Assem(e=1,\ E)K^e$

$$\Delta P=Assem(e=1,\ E)\Delta p_e$$

Δu는 전체계의 일반화된 변위증분벡터이고 K는 접선강성이다. ΔP는 비평형하중이고, $Assem$은 운동학적 경계조건을 고려하여 요소행렬의 적절한 위치에 조합시키는 것을 의미하며, E는 요소수이다. K^e와 Δp_e은 e요소의 접선강성과 비평형하중이다. 식 (2.26)은 경계조건 문제로 증분과 반복계산의 조합으로 푼다.

2.5 비선형 유한요소해석을 위한 수치해법

좌굴이 있는 구조물의 비선형 유한요소해석의 수치해석에서는 하중이 변위의 단조함수로 표현되지 않으므로 변위를 독립변수로 하거나 하중을 독립변수로 하는 다가함수(multiple valued function)로 표현되게 된다. 이러한 경우 증분시킬 변수결정 및 증분량결정에 어려움이 많다. 이러한 문제를 해결하기 위하여 여러가지의 알고리즘이 제시되었으나 Crisfield의 호장방법(Arc-length method)[16]이 수치해석의 안정성과 효율성의 면에서 가장 좋은 것으로 평가되고 있다. 이 방법은 Riks[14]가 제시한 수치해석방법을 유한요소해석에 집합하도록 수정한 것으로 각 증분단계마다 호장벡터의 크기를 일정하게 제한시키면서 증분해를 구하는 방법이다. 이 방법의 개요는 다음과 같다.

구조물에 작용하는 하중이 비례하중이라면 하중인자 λ를 도입하여 i번째 축차(iteration)까지의 하중인자 증분량을 $\Delta\lambda^{(i)}$, i번째 축차에서의 축차에 의한 변위증분량을 $\Delta u^{(i)}$라고 표현하면 아래와 같이 쓸 수 있다.

$$^tK^{(i)}\Delta u^{(i)}=\Delta\lambda^{(i)}p_o+{}^{t+\Delta t}\lambda^{(i-1)}p_o-{}^{t+\Delta t}F^{(i-1)} \quad (2.27)$$

윗식에서 첨자 $t+\Delta t$가 loading step을 나타내고 p_o는 비례하중을 표시하는 기준하중벡터이다. 한 축차에서의 변위증분량 $\Delta u^{(i)}$을 다음과 같이 두 성분으로 나눈다.

$$\Delta u^{(i)}=\Delta u^I\Delta\lambda^{(i)}+\Delta u^{II(i)}$$
$$\Delta u^I={}^tK^{-1}p_o$$
$$\Delta u^{II(i)}={}^tK^{-1}[{}^{t+\Delta t}\lambda^{(i-1)}p_o-{}^{t+\Delta t}F^{(i-1)}] \quad (2.28)$$

각각의 양에 대한 도식적인 표시는 Fig. 2와 같이 표시된다. 식 (2.27), (2.28)은 유한요소 모델의 총 자유도수를 N이라 하면 $(N+1)$개의 미지수를 갖는 N개의 방정식이 되는데, 여기서 Arc-length에 관한 다음과 같은 방정식을 추가시키면 증분량을 구할 수 있다.[15]

$$\kappa\Delta\lambda^{(i)2}+\Delta u^{(i)}\rightarrow^T\Delta u^{(i)}=s^2 \quad (2.29)$$

여기서, s는 Arc-length이며 κ는 Arc-length를 재는데 있어서의 하중인자에 대한 scaling parameter로 본 프로그램에서는 $\kappa=0$로 하였다. 식 (2.27)과 (2.28)을 (2.29)에 대입하면 다음과 같은 방정식이 얻어진다.

$$a\Delta\lambda^{(i)2}+b\Delta\lambda^{(i)}+c=0$$
$$s=\Delta\lambda^{(i)}\sqrt{a} \quad (2.30)$$

여기서,

$$a=\kappa+\Delta u^I\rightarrow^T\Delta u^I$$

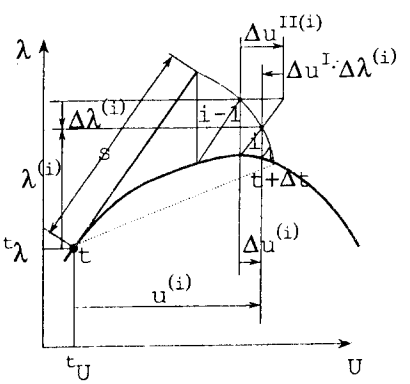

Fig. 2 Geometrical interpretation of the Arc-length method

$$b=2(\boldsymbol{u}^{(i-1)}+\Delta\boldsymbol{u}^{II(i)})^T\Delta\boldsymbol{u}^T+2\kappa\lambda^{(i-1)}$$
$$c=(\boldsymbol{u}^{(i-1)\rightarrow T}\cdot\boldsymbol{u}^{(i-1)}-S^2)$$
$$+(\Delta\boldsymbol{u}^{II(i)}+2\boldsymbol{u}^{(i-1)})^T\cdot\Delta\boldsymbol{u}^{II(i)}+\kappa\lambda^{(i-1)2}$$

식 (2.30)로부터 축차과정의 하중인자 증분량 $\Delta\lambda^{(i)}$를 구한 후 식 (2.28)에 대입하여 $\Delta\boldsymbol{u}^{(i)}$를 구하면 한번의 축차가 끝난다. 본 프로그램에서는 $\Delta\lambda^{(i)}$를 선택하는데 다음과 같은 방법을 택하였다.

(a) 만약 $\Delta\lambda$가 복소수이면 한 단계전의 평형상태로부터 Full Newton-Raphson 방법으로 증분해석한다.

(b) 두 개의 실근인 $\Delta\lambda$가 얻어지면 $\boldsymbol{u}^{(i)\rightarrow T}\cdot\boldsymbol{u}^{(i-1)}$의 값을 양으로 하는 $\Delta\lambda^{(i)}$를 택하고 만약에 이것을 양으로 하는 근이 없거나 두 근 다 양을 만족하는 경우에 $\Delta\lambda^{(i)}$에 가까운 값의 근을 택한다

그리고 증분해석을 효율적으로 하기위해 매증분단계마다 Arc-length를 조정하는데 그 방법은 다음과 같다.

$$S_{new}=\sqrt{\frac{N_o}{N}}S_{old} \tag{2.31}$$

N_o는 경험적으로 고려된 적절한 값이 입력으로 들어가고 N는 바로 전 단계 증분에서의 축차횟수를 나타낸다. 이 식을 사용하면 수렴에 소요되는 축차의 수가 균일해지고 증분단계의 수가 감소하여 전체 해석시간을 줄일 수가 있다.

2.6 형상과 응력의 개정 알고리듬

보의 형상을 개정(update)시키면

$$\boldsymbol{\Phi}_{on+1}=\boldsymbol{\Phi}_{on}+\boldsymbol{u}_o$$
$$\boldsymbol{\Lambda}_{n+1}=\exp[\boldsymbol{\Theta}]\boldsymbol{\Lambda}_n \tag{2.32}$$

개정된 곡률과 변형률을 아래와 같이 계산한다.

$$\boldsymbol{\Omega}_{n+1}=\frac{d\exp[\boldsymbol{\Theta}]}{ds}\exp[-\boldsymbol{\Theta}]$$
$$+\exp[\boldsymbol{\Theta}]\boldsymbol{\Omega}_n\exp[-\boldsymbol{\Theta}]$$
$$=\boldsymbol{\Theta}'+\exp[\boldsymbol{\Theta}]\boldsymbol{\Omega}_n\exp[-\boldsymbol{\Theta}] \tag{2.33a}$$
$$\boldsymbol{\kappa}_{n+1}=\boldsymbol{\Lambda}_{n+1}^t\boldsymbol{\Omega}_{n+1}\boldsymbol{\Lambda}_{n+1} \tag{2.33b}$$
$$\boldsymbol{\Gamma}_{n+1}=\boldsymbol{\Lambda}_{n+1}^t\boldsymbol{\Phi}_{on+1}'-\boldsymbol{E}_3 \tag{2.33c}$$

윗식에서 $\boldsymbol{\Omega}_{n-1}$은 공간좌표계에서 곡률, $\boldsymbol{\kappa}_{n+1}$은 기준좌표계에서 곡률, $\boldsymbol{\Gamma}_{n+1}$은 기준좌표계에서 변형률을 나타낸다. 따라서 개정된 힘과 모멘트은 아래식에서 구할 수 있다.

$$\begin{Bmatrix}\boldsymbol{N}_{n+1}\\ \boldsymbol{M}_{n+1}\end{Bmatrix}=\boldsymbol{C}\begin{Bmatrix}\boldsymbol{\Gamma}_{n+1}\\ \boldsymbol{\kappa}_{n+1}\end{Bmatrix} \tag{2.34}$$

3. 예제 및 고찰

3.1 외팔보의 이차원 대변형 해석

외팔보의 자유단에 Fig. 3의 하중각이 0°인 x_2 방향 집중하중이 작용할때 보의 거동을 계산하였다. 이 문제의 일차 탄성론해는 Shield[18]의 논문에서 찾을 수 있다. Shield의 이론에서 외팔보 자유단에 고정된 방향의 집중하중이 작용할때의 보변형에 대한 지배방정식은 아래와 같다. (Fig. 4)

$$\varepsilon=-\frac{PLa}{EI} \tag{3.1}$$

$$L=X(l)=\int_0^l\cos\theta dx \tag{3.2}$$

$$\theta''+\frac{\varepsilon}{aL}\cos\theta=0 \tag{3.3}$$

경계조건 $x=0$에서 $\theta=0,\ \theta'=\frac{\varepsilon}{a}$

$x=l$에서 $\theta'=0$

윗식은 3차원 탄성론의 엄밀한 지배방정식에서 변형률이 작을 때 회전과 변위의 크기에 관계없이 일차근사해가 되고 변형된 형상에서 자유단의 x방향 길이 L과 θ 및 θ'가 결정되어야 할 변수이다. 이 문제를 푸는 방안은 다음과 같다.

먼저 하중의 크기를 무차원 하중변수 $K\left(=\frac{PLl}{EI}=\frac{\varepsilon l}{a}\right)$를 선정하여 $x=0$에서의 경계조건을 결정한 다음 적절한 L을 가정한다. $x=l$의 경계조건을 맞추도록 L을 수정하는 슈팅방법으로 문제를 푼다. 변형이 큰 경우에는 선형이론에서 구한 초기 L로는 수렴하기 어렵다. 유한요소해와 비교할 경우에는 유한요소해석 결과로 L을 가정하면 쉽게 계산할 수 있다.

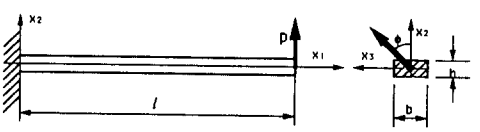

Fig. 3 Geometry and loading of cantilever beam

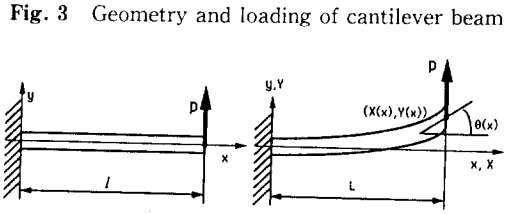

Fig. 4 Deflection of cantilever beam

계산은 이차보요소 열 개를 사용하였고, 보의 형상은 다음과 같다. 길이(l)=200 m, 단면폭(b)=0.1 m, 단면높이(h)=0.1 m이고 탄성계수(E)=200×10^9 Pa, 푸아송비(n)=0.3이다. Fig. 5와 Fig. 6에서 Shield의 일차 탄성론 해와 수치해의 차이를 보여주고 있는데 거의 똑같은 결과를 얻을 수 있었다. 변형중 최대 변형률은 1.245×10^{-3}로 본 논문의 기본 가정인 "변형에서 보요소내의 변형률은 아주 작다."를 잘 만족시켰다.

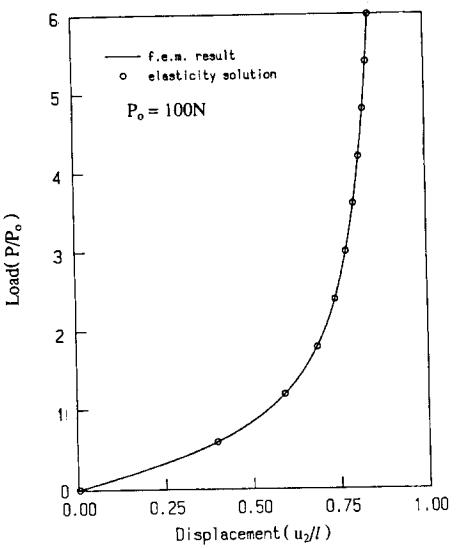

Fig. 5 Load-deflection curve of beam (u_2-direction)

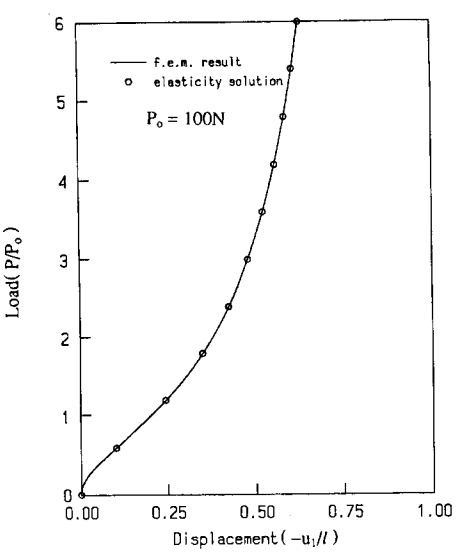

Fig. 6 Load-deflection curve of beam ($-u_1$-direction)

3.2 외팔보의 삼차원 변형해석

Fig. 3에서 하중각은 30°이고, 길이(l)=200 m, 단면폭(b)=0.25 m, 단면높이(h)=0.1 m이며 재료성질은 이차원 예제와 같은 경우를 계산하였고 이차보요소 열개를 사용하였다. 이 문제의 일차탄성론해는 Shield와 Im[19]의 논문에 있으며 변형률이 작을 때 회전과 변위의 크기에 관계없이 3차원 탄성론 엄밀해의 일차 근사해가 되고 이를 슈팅으로 풀어 계산치와 비교하였다. Fig. 7에서 x방향, y방향은 똑같은 값이 나오고 z방향은 0.02퍼센트 이하의 상대오차로 정확한 결과를 얻을 수 있었다. 변형중 최대 변형률은 대략 9.0×10^{-4} 정도로 기본가정을 만족시킬 정도로 충분히 작았다.

3.3 굽은 외팔보의 변형해석

Fig. 8과 같이 반경이 100"이고 중심이 x_3축에 있으며 중심각은 45°인 원호형의 외팔보 자유단에 x_2방향 수직하중을 가한 문제를 해석하였고 이를 오일러각을 사용하여 해석한 Bathe[2]와 박문식[20]의 결과와 비교하였다. 계산은 이차 보요소 열개를 사용하였고 보요소에 초기곡률(initial curvature)은 고려하지 않았다. 3차원 구조물의 가장 단순한 경우로서 알고리듬과 프로그램의 정확성을 비교할 수 있는 문제이다. Fig. 9과 Fig. 10에서 수평변위일 경우에는 비슷한 결과를 나타내고, Fig. 8에서 수

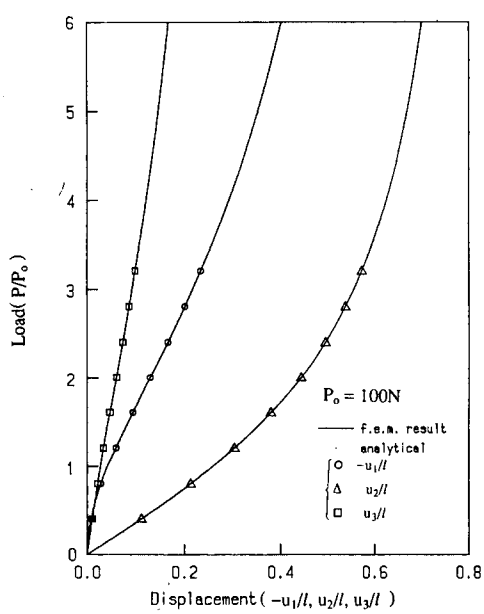

Fig. 7 Load-deflection curve of beam (3-dimension)

직변위일 경우에는 박문식[20]과 Bathe[2]의 중간정도의 결과를 나타내었다.

3.4 가는 기둥의 좌굴후 해석

Fig. 11과 같은 보는 축방향 하중이 오일러(Euler)하중에 도달하면 좌굴이 일어난다.[21] 예제로 한변이 0.01 m인 정사각형 단면에 길이 10 m인 보의 좌굴거동을 계산하였다. 재료성질은 앞의 이차원 외팔보와 같고 계산모델은 모두 동일한 길이의 이차요소 열개로 하였다. 좌굴의 양상을 미리 알 수 있으므로 수치적 어려움을 극복하기 위하여 자유단에 미리 x_1 방향으로 단면길이의 0.0001배 변위를 초기에 주어 계산하였다.

p_{cr}에 대한 표현식[21]은

$$p_{cr}=\alpha\frac{\pi^2 EI}{l^2} \tag{3.4}$$

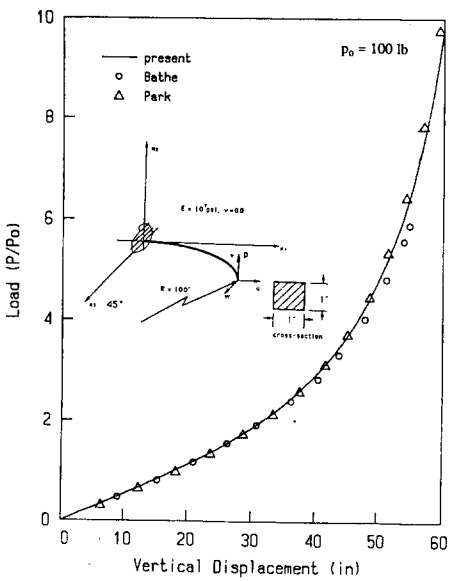

Fig. 8 Vertical displacement of curved beam

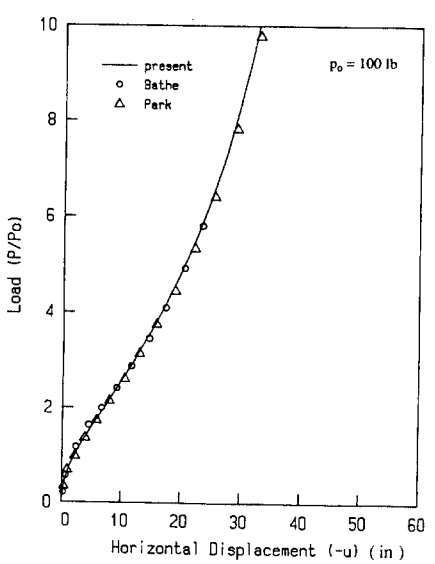

Fig. 9 Horizontal displacement of curved beam (−u-direction)

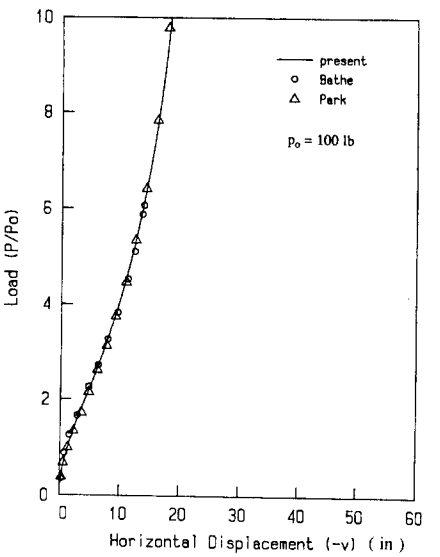

Fig. 10 Horizontal displacement of curved beam (−v-direction)

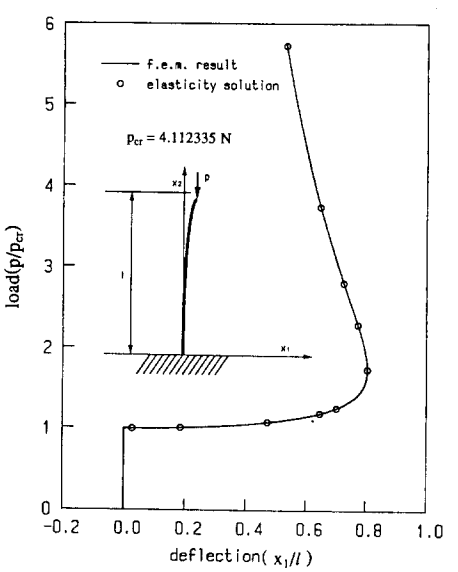

Fig. 11 Load-deflection curve of a thin column

단, $\alpha=\frac{1}{4}$

p_{cr}을 직접 계산을 해보면

$$p_{cr}=4.112335\ N$$

유한요소해석 결과는 Fig. 11에서와 같이 변형형상에 대한 지배방정식[21]을 슈팅으로 풀어 본 연구의 해와 비교하였다. 탄성론해와 정확히 일치하는 해를 얻을 수 있었다. 변형중 최대 변형률은 3.75×10^{-3} 정도로 충분히 작았다.

3.5 가느다란 얇은 보의 횡좌굴해석

Fig. 12에서와 같은 외팔보에 하중 P가 작용할때 하중방향으로 어느 정도 처진 후에 Lateral Buckling이 일어나 횡(lateral)방향 곡률 κ가 증가하게 된다. Peters 등[22]의 연구를 바탕으로 아래와 같은 결과를 얻을 수 있다.

$$\kappa_o=-\frac{d\zeta}{ds}$$

$$\frac{d^2\zeta}{ds^2}+\frac{P}{A}\cos\zeta=0 \tag{3.5}$$

경계조건, $s=0$에서 $\frac{d\zeta}{ds}=0$

$s=l$에서 $\zeta=0$

단, ζ는 Slope in plane of greatest flexural rigidity

A는 Bending stiffness in plane of greatest flexural rigidity

l은 Length of beam

또,

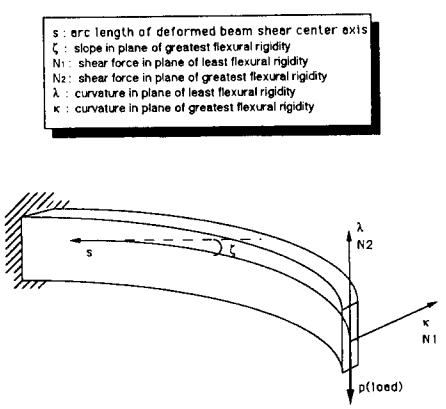

Fig. 12 Lateral buckling shape of uniform slender cantilever beam

$$\frac{1}{P}\frac{dN_1}{ds}=\tau\cos\zeta-\lambda\sin\zeta$$

$$B\frac{d\lambda}{ds}+(A-C)\kappa_o\tau+N_1=0$$

$$C\frac{d\tau}{ds}-(A-B)\kappa_o\lambda=0 \tag{3.6}$$

단, B는 Bending stiffness in plane of least flexural rigidity

C은 Torsion stiffness constant rigidity

t은 Elastic rate of twist

식 (3.6)에서 N_1을 소거하고 $c^2=\frac{C}{A}$, $b^2=\frac{B}{A}$라 두면

$$\frac{d^2\lambda}{ds^2}=\frac{c^2-2}{b^2}\tau\frac{P}{A}\cos\zeta+\frac{c^2-1}{b^2}\kappa_o\tau'+\frac{1}{b^2}\frac{P}{A}\lambda\sin\zeta$$

$$\frac{d\tau}{ds}=\frac{1-b^2}{c^2}\kappa_o\lambda \tag{3.7}$$

식 (3.5)의 κ_o 대신 $-\frac{d\zeta}{ds}$을 대입하고 정리하면

$$\frac{d^2\lambda}{ds^2}=\frac{c^2-2}{b^2}\tau\frac{P}{A}\cos\zeta+\left(1-\frac{1}{c^2}\right)\left(\frac{1}{b^2}-1\right)\lambda\zeta'^2+\frac{1}{b^2}\frac{P}{A}\lambda\sin\zeta$$

$$\frac{d\tau}{ds}=\frac{b^2-1}{c^2}\zeta'\lambda \tag{3.8}$$

단, 경계조건 $\lambda(0)=0$

$\lambda(l)=0$

$\tau(0)=0$

또 경계조건으로 아래와 같이 가정할 수 있다.

$$\lambda'(0)=\frac{1}{l} \tag{3.9}$$

이 식 (3.9)의 경계조건은 λ의 크기가 eigenvalue problem으로 정해지지 않고 또 식 (3.8)이 λ와 τ에 대하여 선형적이기 때문에 해에 영향을 미치지 않는다. 위의 식들과 경계조건을 슈팅으로 풀었다.

푸는 방안은 다음과 같다. 먼저 식 (3.5)와 경계조건을 슈팅방법(shooting method)을 이용하여 푼다. 이때 풀려진 ζ, ζ'값을 식 (3.8)에 대입한다. 다음 적절한 b값을 가정한다. 이때 비교하고자 하는 유한요소해석 결과로 b값을 가정하면 계산시간을 줄일 수 있다. 경계조건 $\lambda(0)=\tau(0)=0$과 식 (3.9)로 식 (3.8)를 푼다. 이때 얻어진 $\lambda(l)$값과 $\lambda(l)=0$의 경계조건으로부터 역보간법(inverse interpolation)을 이용하여 보다 정확하게 수렴된

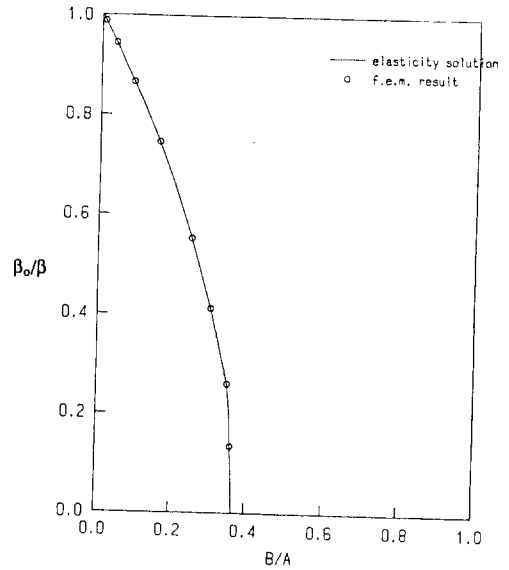

Fig. 13 Lateral buckling of uniform slender cantilever beam

b값을 얻을 수 있다. 즉, $\lambda_1(l)-\lambda_o(l)=\frac{\partial\lambda}{\partial b}(b_1-b_o)$에서 $\lambda_1(l)=0$이므로 개선된 b값 b_1

$$b_1=b_o-\frac{\lambda_o(l)}{\frac{\partial\lambda}{\partial b}} \tag{3.10}$$

같은 과정을 되풀이 하게 되면 어느 정도 정확한 b값을 얻을 수 있다. Fig. 13에서 본 프로그램으로 얻은 결과와 슈팅으로 푼 결과를 비교하였다. 비교적 정확히 일치하는 결과를 얻을 수 있었다. 각 경우에 이차보요소 열개를 사용하여 계산하였다.

또 좌굴하중을 정확히 수치적으로 구하기 위하여 접선강성행렬의 determinant가 영(zero)이 될때 하중을 좌굴하중이라 본다. 그러나 현재의 경우 처짐이 작은 상태에서 Lateral Buckling이 일어날때는 정확히 $\mathrm{Det}[K]=0$일 때 하중이 lateral buckling 하중을 나타내었으나 처짐이 커진 상태에서 lateral buckling이 일어날때는 정확히 일치하지 않고 많은 차이를 보였다. 즉 이 사실은 처짐이 커진 상태에서 lateral buckling이 일어날때는 현재의 비대칭 접선강성행렬이 변위에 관한 내력의 일차도함수와 정확히 일치하지 않음을 시사해 주고 있다.

4. 결 론

Total lagrangian원리를 보요소에 도입하여 유한요소 해석을 하였다. 회전처리는 Eulerian관점에서 처리하였고 이 결과 비대칭접선강성을 얻었다. 여기서 대칭접선강성을 얻을 수 있는 방법에 대해 기존의 문헌을 참고로 하여 정리하였다.

하중조절(load control), 변위조절(displacement control), 호장방법(Arc-length method)을 해석하고자 하는 문제성격에 맞게 마음대로 취사선택하도록 하였으며 하중조절(load control)과 변위조절(displacement control)를 동시에 사용할 수 있게 하였다.

예제에서 일부는 기존의 유한탄성론 지배방정식들을 슈팅(shooting)방법으로 풀은 결과와 비교하여 정확히 일치하는 결과를 얻을 수 있었다. 또 나머지 예제들은 기존의 결과들과 비교하여 비슷하게 일치하는 경향을 보였다.

좌굴현상에서 극한하중을 정확히 찾기 위하여 접선강성의 determinant를 각 수렴단계마다 구하여 영(zero)에 가까워졌을 때($10^{-7}\sim10^{-6}$ 이하) 이때의 하중을 극한하중으로 취하였다. 그러나 가는 외팔보(cantilever)의 lateral buckling현상에서는 보 단면의 가로 세로비 $\frac{\text{thickness}}{\text{height}}$가 $\frac{1}{10}$ 이하일때는 determinant가 영에 가까운 값이 될때 정확히 극한하중을 나타내었으나 $\frac{1}{10}$보다 커짐에 따라 오차가 점점 커져 신뢰할 수 없게 되었다. 즉, 이 사실은 처짐이 커진 상태에서 lateral buckling이 일어날때는 현재의 비대칭 접선강성행렬이 변위에 관한 내력의 일차도함수와 정확히 일치하지 않음을 시사해 주고 있다.

참고문헌

(1) Yang, T. Y., 1973, "Matrix Displacement Solution to Elastica Problems of Beams and Frames," *Int. J. Solids Structures*, Vol. 9, pp. 829~842.

(2) Bathe, K. J. and Bolourchi, S., 1979, "Large Displacement Analysis of Three-D. Beam Structures," *Int. J. for Num. Methods in Eng.*, Vol. 14, pp. 961~986.

(3) Simo, J. C., 1985, "A Finite Strain Beam Formulation. The 3-D Dynamic Problem Part I," *Comp. Methods in Appl. Mech. and Eng.*, Vol. 49, pp. 55~70.

(4) Simo, J. C. and Vu-Quoc, L., 1986, "A Three-

Dimensional Finite-Strain Rod Model. Part2: Computational Aspects," *Comp. Methods in Appl. Mech. and Eng.*, Vol. 58, pp. 79~116.

(5) Iura, M. and Atluri, S. N., 1989, "On a Consistent Theory, and Variational Formulation of Finitely Stretched and Rotated 3-D Space Curved Beams," *Computational Mechanics*, Vol. 4, pp. 73~88.

(6) Iura, M. and Atluri, S. N., 1988, "Dynamic Analysis of Finitely Stretched and Rotated Three-Dimensional Space-Curved Beams," *Computers & Structures*, Vol. 29, No. 5, pp. 875~889.

(7) Cardona, A. and Geradin, M., 1988, "A Beam Finite Element Non-linear Theory with Finite Rotations," *Int. J. for Num. Methods in Eng.*, Vol. 26, pp. 2403~2438.

(8) Geradin, M. and Cardona, A., "Kinematics and Dynamics of Rigid and Flexible Mechanisms Using Finite Elements and Quaternion Algebra," *Computational Mechanics, (in press)*.

(9) Argyris, J., 1982, "An Excursion into Large Rotations," *Comp. Methods in Appl. Mech. and Eng.*, Vol. 32, pp. 85~155.

(10) Argyris, J. H., Dunne, P. C. and Scharpf, D. W., 1978, "On Large Displacement-Small Strain Analysis of Structures with Rotational Degrees of Freedom," *Comp. Methods in Appl. Mech. and Eng.*, Vol. 14, pp. 401~451.

(11) Pietraszkiewicz, W. and Badur, J., 1983, "Finite Rotations in the Descriptions of Continuum Deformations," *Int. J. Eng. Sci.*, Vol. 21, No. 9, pp. 1097~1115.

(12) Beatty, M. F., 1977, "Vector Analysis of Finite Rigid Rotations," *J. A. M.*, Vol. 44, pp. 501~502.

(13) Cowper, G. R., 1966, "The Shear Coefficient in Timoshenko's Beam Theory," *J. A. M.*, Vol. 33, pp. 335~340.

(14) Riks, E., 1979, "An Incremental Approach to the Solution of Spanning and Buckling Problems," *Int. J. Solid and Structures.*, Vol. 15, pp. 529~551.

(15) Forde, B. W. R. and Stiemer, S. F., 1987, "Improved Arc Length Orthogonality Method for Nonlinear Finite Element Analysis," *Computers and Structures*, Vol. 27, No. 5, pp. 625~663.

(16) Crisfield, M. A., 1981, "A Fast Incremental/Iterative Solution Procedure That Handles Snap-Through," *Computers and Structures*, Vol. 13, pp. 55~62.

(17) Parviz E. Nikravesh, "Computer-aided Analysis of Mechanical Systems."

(18) Shield, R. T., 1979, "A Consistent Theory for Elastic Deformations with Small Strains," *J. Appl. Mech.*, Vol. 46, pp. 861~866.

(19) Shield, R. T. and Im, S., 1986, "Small Strain Deformations of Elastic Beams and Rods Including Large Deflections," *J. Appl. Mach. Phys. (ZAMP)*, Vol. 37, pp. 491~513.

(20) 박문식, 1989, "국부좌굴을 고려할 수 있는 프레임 구조의 기하학적 비선형해석 프로그램 개발," 한국과학기술원 석사학위논문.

(21) Timoshenco, S. P. and Gear, J. M., 1963, *Theory of Elasticstability*, McGraw-Hill.

(22) Hodges, D. H. and Peters, D. A., 1975, "On The Lateral Buckling of Uniform Slender Cantilever Beams," *Int. J. Solids Structures*, Vol. 11, pp. 1269~1280.

부 록

부록 A

$$\boldsymbol{e}=\boldsymbol{\theta}/\|\boldsymbol{\theta}\|,\quad \bar{\boldsymbol{\theta}}=\tan\frac{1}{2}\|\boldsymbol{\theta}\|\boldsymbol{e} \tag{부1}$$

윗식을 이용하면

$$\exp[\boldsymbol{\Theta}]=\boldsymbol{I}+\frac{2}{1+\|\bar{\boldsymbol{\theta}}\|^2}(\bar{\boldsymbol{\Theta}}+\bar{\boldsymbol{\Theta}}^2) \tag{부2}$$

부록 B

$$\boldsymbol{R}=\begin{Bmatrix}\boldsymbol{N}\\ \boldsymbol{M}\end{Bmatrix},\quad \boldsymbol{r}=\begin{Bmatrix}\boldsymbol{n}\\ \boldsymbol{m}\end{Bmatrix}=\boldsymbol{\Pi}\boldsymbol{R} \tag{부3}$$

여기서, $\boldsymbol{\Pi}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\Lambda} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{\Lambda}\end{bmatrix}$

$$\boldsymbol{\Xi}=\begin{bmatrix}\frac{d}{ds}\boldsymbol{1} & [\boldsymbol{\Phi}_o'\times]\\ \boldsymbol{0} & \frac{d}{ds}\boldsymbol{1}\end{bmatrix} \tag{부4}$$

여기서,

$$[\Phi'_o\times]=\begin{bmatrix} 0 & -\Phi'_{o3} & \Phi'_{o2} \\ \Phi'_{o3} & 0 & -\Phi'_{o1} \\ -\Phi'_{o2} & \Phi'_{o1} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\frac{d}{ds}\mathbf{1}=diag\left[\frac{d}{ds},\ \frac{d}{ds},\ \frac{d}{ds}\right]$$

부록 C

$$\Psi=\begin{bmatrix} \left(\frac{d}{ds}\right)\mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \left(\frac{d}{ds}\right)\mathbf{1} & \mathbf{1} \end{bmatrix} \qquad (부5)$$

$$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & [\boldsymbol{n}\times] \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & [-\boldsymbol{m}\times] \\ [\boldsymbol{n}\times] & \mathbf{0} & [\boldsymbol{n}\otimes\Phi'_o-(\boldsymbol{n}\cdot\Phi'_o)\mathbf{1}] \end{bmatrix} \qquad (부6)$$

여기서, $\boldsymbol{B}$는 소위 말하는 기하학적 강성행렬이다.

$$\boldsymbol{c}_e^h=\boldsymbol{\Pi}^h\boldsymbol{C}\boldsymbol{\Pi}^{ht}$$

$$\boldsymbol{T}_{elJ}^h=\int_{l_e^h}\Psi_I^h B_e^h\Psi_J^t ds$$

$$=\int_{l_e^h}\begin{bmatrix} \mathbf{0} & -[\hat{\boldsymbol{n}}^h\times]N'_IN_J \\ [\hat{\boldsymbol{n}}^h\times]N_IN'_J & \{-[\tilde{\boldsymbol{m}}^h\times]N'_IN_J+[\hat{\boldsymbol{n}}\otimes\hat{\Phi}'_o-(\hat{\boldsymbol{n}}\cdot\hat{\Phi}'_o)\mathbf{1}]N_IN_J\} \end{bmatrix}ds \qquad (부9)$$

부록 F

$$S_{matIJ}=\int_{[0,\ l]}B_I^{hT}(s)\,CB_J^h(s)\,ds \qquad (부10)$$

단, $C=Diag[EA,\ GA_2,\ GA_3,\ GJ,\ EI_2,\ EI_3]$

$$S_{ge5mIJ}=\int_{[0,\ l]}\gamma_I^{hT}(s)\,D(s)\,\gamma_J^h(s)\,ds \qquad (부11)$$

단,

$$\boldsymbol{\gamma}_I^h(s)=\begin{bmatrix} N_I\mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & N'_I\mathbf{1} \\ \mathbf{0} & N_I\mathbf{1} \end{bmatrix}$$

$$D=\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & -R\tilde{N} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \tilde{N}R^T & \tilde{M} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

부록 D

$$N_1(\zeta)=\frac{1}{2}(\zeta-1)\cdot\zeta$$

$$N_2(\zeta)=(1+\zeta)\cdot(1-\zeta)$$

$$N_3(\zeta)=\frac{1}{2}\zeta\cdot(1+\zeta) \qquad (부7)$$

단, $-1\le\zeta\le1$

부록 E

$$\boldsymbol{S}_{elJ}^h=\int_{l_e^h}\hat{\boldsymbol{\Xi}}_I^h\boldsymbol{c}_e^h\hat{\boldsymbol{\Xi}}_J^{ht}ds \qquad (부8)$$

여기서,

$$\hat{\Xi}_I^h=\begin{bmatrix} N'_I\mathbf{1} & \mathbf{0} \\ -N_I[\hat{\Phi}'_o\times] & N_I\mathbf{1} \end{bmatrix}$$

또, $\boldsymbol{c}_e$는 spatial tangent elastic moduli로서

바로 윗식에서,

$$A=[(R^T\boldsymbol{x}'_o)\otimes N-((R^T\boldsymbol{x}'_o)\cdot N)\mathbf{1}$$
$$+K\otimes M-(K\cdot M)\mathbf{1}]$$

부록 G

$$\boldsymbol{T}(\boldsymbol{\psi})=\frac{\sin\|\boldsymbol{\psi}\|}{\|\boldsymbol{\psi}\|}\mathbf{1}+\left(1-\frac{\sin\|\boldsymbol{\psi}\|}{\|\boldsymbol{\psi}\|}\right)\boldsymbol{e}\otimes\boldsymbol{e}$$
$$-\frac{1}{2}\left(\frac{\sin\|\boldsymbol{\psi}\|/2}{(\|\boldsymbol{\psi}\|/2)}\right)^2\tilde{\boldsymbol{\psi}} \qquad (부12)$$

$$\boldsymbol{T}^{-1}(\boldsymbol{\psi})=\frac{\|\boldsymbol{\psi}\|/2}{\tan(\|\boldsymbol{\psi}\|/2)}\mathbf{1}$$
$$+\left(1-\frac{\|\boldsymbol{\psi}\|/2}{\tan(\|\boldsymbol{\psi}\|/2)}\right)\boldsymbol{e}\otimes\boldsymbol{e}+\frac{1}{2}\tilde{\boldsymbol{\psi}} \qquad (부13)$$