

<논 문>

## Hertz 접촉하중하에서의 복수표면균열의 상호간섭

김상우\* · 김석삼\*\*

(1995년 10월 9일 접수)

### Mutual Interference of Two Surface Cracks under Hertzian Contact Loading

Sang Woo Kim and Seock Sam Kim

**Key Words:** Wear Mechanism(마멸기구), Hertzian Contact(헤르쯔접촉), Linear Fracture Mechanics(선형 파괴역학), Inclined Surface Crack(경사진 표면균열), Stress Intensity Factor(응력확대계수)

#### Abstract

Analytic model containing two inclined surface cracks on semi-infinite elastic body is established and analyzed on the basis of linear fracture mechanics to examine mutual interference of two surface cracks. Muskhelishvili's complex stress functions are introduced and a set of singular integral equations is obtained for a dislocation density function. The stress intensity factors at crack tip are obtained by using the Gerasoulis' method. When two surface cracks are parallel and have the same length, the values of  $K_I$  and  $\Delta K_{II}$ (variation of  $K_{II}$ ) for crack 1 and crack 2 decrease by the mutual interference of two surface cracks as the distance between the two surface cracks shortens. The effect of mutual interference is remarkable in high friction coefficient. In case that two surface cracks are parallel, the values of  $K_I$  and  $\Delta K_{II}$  for crack 2 decrease as the length ratio of crack 2 to crack 1 becomes small. As the crack inclination angle rises, the value of  $K_I$  and the mutual interference of  $K_I$  for crack 2 increase and the value of  $\Delta K_{II}$  for crack 1 becomes smaller than that for crack 2.

#### 기 호 설 명

|                 |                                      |   |  |
|-----------------|--------------------------------------|---|--|
| $c$             | : 헤르쯔접촉부의 반 폭                        | $\nu$   | : 푸아송비                                       |
| $\tilde{l}_k$   | : $k$ 번째 균열의 길이                      | $\alpha$  | : $3-4\nu$ (평면변형률), $(3-\nu)/(1+\nu)$ (평면응력) |
| $\tilde{d}$     | : 두 균열간의 거리                          | $(\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \tau_{xy})$                   | : $(x, y)$ 좌표계에서의 응력                         |
| $\tilde{x}_k$   | : $k$ 번째 균열개구부에서 $\tilde{y}$ 축까지의 거리 | $(\sigma_{\xi\xi}, \sigma_{\zeta\zeta}, \tau_{\xi\zeta})$ | : $(\xi, \zeta)$ 좌표계에서의 응력                   |
| $\tilde{x}_k^*$ | : $k$ 번째 균열선단에서 $\tilde{y}$ 축까지의 거리  | $(U_\xi, V_\zeta)$  | : $(\xi, \zeta)$ 좌표계에서의 변위                   |
| $\mu$           | : 마찰계수                               | $K_I, K_{II}$   | : 응력확대계수                                     |
| $z$             | : 복소수 ( $\tilde{x} + i\tilde{y}$ )   | $\Delta K_{II}$   | : 응력확대계수 $K_{II}$ 의 변화폭                      |
| $\alpha$        | : 전위밀도                               |   |  |
| $G_o$           | : 횡탄성계수                              |   |  |

#### 1. 서 론

\*회원, 경북대학교 대학원 기계공학부

\*\*회원, 경북대학교 기계공학부

최근 기계장비의 정밀화와 함께 신뢰성과 정도유지에 마멸이 중요한 문제로 대두되고 있다. 마멸이

란 두 물체간의 접촉부에서 상대운동으로 인해 일어나는 재료의 점진적 손실로서 정의한다. 마멸현상은 이에 관련되는 인자들이 많으므로 아주 다양하고 복잡한 양상을 보이고 있다. 이러한 마멸현상은 그 발생기구에 따라 응착마멸, 어브레시브(abrasive)마멸, 표면피로마멸, 부식마멸, 침식마멸 등이 있다. 산업의 첨단화와 더불어 신뢰성이 더욱 요구되어 마멸에 관한 연구도 점점 활발해지고 있다.

Hornbogen<sup>(1)</sup>이 마멸률에는 파괴인성이 중요한 영향을 미친다는 점을 보고한 이래 마멸기구에 관한 파괴역학적 연구가 수행되고 있다. Suh 등<sup>(2)</sup>은 Delamination이론을 제창하여 접촉압력을 받는 표면하수평균열의 발생과 성장조건에 관하여 연구를 수행하였다. 표면피로균열의 파괴기구를 규명하기 위해 몇몇 이론적 모델이 제안되어 Keer 등<sup>(3)</sup>은 반무한 탄성체에서 헤르츠압력에 의한 2차원 표면균열의 전파거동을 다루었으며 피로 균열전파에 관한 Paris의 법칙을 적용하여 구름피로수명을 추정하는 방법을 제안하였다. Bryant 등<sup>(4)</sup>은 동일 모델에서 헤르츠압력분포를 암자아래의 규정된 형상변위로 대체시켜 그 결과가 헤르츠압력에 의한 결과와 잘 일치한다고 보고하였다. Kaneta 등<sup>(5)</sup>은 경사진 미소균열이 존재하는 반무한체 위를 헤르츠압력분포가 이동할 때 그 균열선단의 응력확대계수를 해석하여 종동축에 pitting이 발생하기 쉬운 이유를 설명하고 균열의 경사각과 유압작용의 상호관계를 고찰하고 있다.

이상과 같은 연구는 단일표면균열이나 내부균열을 대상으로 하고 있다. 실제의 마멸현상을 고려할 때 접촉표면은 상당히 많은 표면균열이 산재해 있으므로 복수표면균열에 있어서 균열들간의 상호간섭에 관한 연구가 필요하다고 생각된다. Goshima 등<sup>(6)</sup>은 복수표면균열이 있는 반무한 탄성체 표면이 규정된 형상변위를 주는 강체 롤러(roller)의 구름접촉을 받을때 두 표면균열간의 상호간섭을 고찰하였다. 본 연구에서는 파괴역학적인 관점에서 마멸이론의 규명과 아울러 접촉표면에서 표면균열간의 상호간섭을 고찰하기 위하여 반무한 탄성체 표면에 복수의 경사진 표면균열이 존재하고 이 표면위를 접촉하중이 이동하는 모델을 설정하여 해석하였다. 접촉면에서의 접촉압력은 헤르츠압력분포로 가정하고 Goshima 등<sup>(6)</sup>의 해석방법을 참고로 해석하여 두 표면균열선단의 무차원 응력확대계수 값을 구함

으로써 접촉압력의 이동에 따른 두 표면균열간의 상호간섭을 수치적으로 고찰하였다.

## 2. 이론 해석

### 2.1 해석모델 및 좌표계

Fig. 1은 본 연구의 해석모델 및 좌표계를 나타낸 것이다. 마찰표면을 두 개의 표면균열이 존재하는 반무한 탄성체의 표면으로 간주하고 여기에 접촉압력  $P(\bar{x})$ , 접선력  $T(\bar{x})$ 가 작용하여 상대편 표면과의 접촉부가 좌에서 우로 이동하는 것으로 한다. Fig. 1과 같이 접촉부의 중심을 원점으로 하여 좌표계  $z(=\bar{x} + i\bar{y})$ 를 취하고 표면균열 1과 2에 관한 좌표계  $(\xi_1, \zeta_1)$ 과  $(\xi_2, \zeta_2)$ 를 취하여 표면균열 1과 2를 침자로 구분한다. 이때  $\xi_k$ 축과  $\zeta_k$ 축은 각각 균열 1과 균열 2의 균열면으로 한다.  $x_k^*(k=1, 2)$ 는 접촉부의 중심과 균열선단의 거리를 나타내고  $\bar{l}_k(k=1, 2)$ 는 균열의 길이,  $\beta_k(k=1, 2)$ 는 균열의 경사각,  $\bar{d}$ 는 두 균열간의 거리를 각각 나타낸다.

Fig. 1에서 접촉부의 접촉압력분포  $P(\bar{x})$ 와 접선력  $T(\bar{x})$ 는 각각 식 (1)과 같이 표현된다.

$$P(\bar{x}) = P_0 \sqrt{1 - (\bar{x}/c)^2}$$

$$T(\bar{x}) = \mu P(\bar{x}) \tag{1}$$

여기서,  $P_0$ 는 최대 헤르츠압력이고  $c$ 는 접촉반경이며  $\mu$ 는 헤르츠접촉부의 마찰계수를 나타낸다. 본 연구에서는 반무한 탄성체를 평면변형률(plane strain)상태로 간주하여 해석하였다.

### 2.2 무차원 변수의 정의 및 경계조건

Fig. 1에서 설정한 좌표계를 이용하여 수식정개를 하기전에 다음과 같은 무차원 변수를 정의한다.

$$(x, y) = (\bar{x}/c, \bar{y}/c)$$

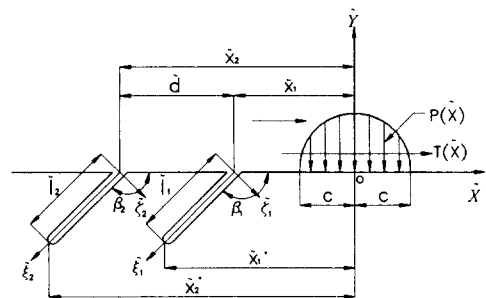


Fig. 1 Analytic model and coordinate systems

$$\begin{aligned}
 (\xi_k, \zeta_k) &= (\tilde{\xi}_k/c, \tilde{\zeta}_k/c) \\
 x_k &= \tilde{x}_k/c \\
 x_k^* &= \tilde{x}_k^*/c \\
 d &= \tilde{d}/c \\
 l_k &= \tilde{l}_k/c \\
 (k=1, 2)
 \end{aligned} \tag{2}$$

Muskhelishvili<sup>(9)</sup>에 의한 응력식과 변위식은 복소응력함수  $\phi(z)$ ,  $\psi(z)$ 을 도입하여 다음과 같이 주어진다.

$$\begin{aligned}
 \sigma_{yy} + \sigma_{xx} &= 2(\phi(z) + \overline{\phi(z)}) \\
 \sigma_{yy} - \sigma_{xx} - 2i\tau_{xy} &= 2(z\overline{\phi'(z)} + \overline{\psi(z)}) \\
 2G_o(U'_x/c + V'_y/c) &= x\phi(z) - \overline{\phi(z)} - z\overline{\phi'(z)} - \overline{\psi(z)}
 \end{aligned} \tag{3}$$

식 (3)에서 '는  $z$ 에 관한 미분을 표시하며  $-$ 는 공액복소함수를 나타낸다. 또 식 (3)의 첫번째 식과 두번째 식으로부터 다음의 응력식을 이용하기도 한다.

$$\sigma_{yy} - i\tau_{xy} = \phi(z) + \overline{\phi(z)} + z\overline{\phi'(z)} + \overline{\psi(z)} \tag{4}$$

식 (4)의 응력식을 이용하여 헤르쯔접촉압력과 관련한 반무한 탄성체의 표면에서의 경계조건은 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
 \sigma_{yy} - i\tau_{xy} &= -P(x) - iT(x) \quad (y=0, |x| \leq 1) \\
 \sigma_{yy} - i\tau_{xy} &= 0 \quad (y=0, |x| \geq 1)
 \end{aligned} \tag{5}$$

균열면간의 마찰의 영향을 무시하면 균열면상에서 경계조건은 식 (6)과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned}
 \sigma_{\xi_k \xi_k} - i\tau_{\xi_k \xi_k} &= 0 \quad (0 \leq \xi_k \leq l_{op}) \\
 i\tau_{\xi_k \xi_k} &= 0 \quad (l_{op} \leq \xi_k \leq l_k), \quad (k=1, 2)
 \end{aligned} \tag{6}$$

여기서,  $l_{op}$ 는 균열에서 열린부분의 길이이며  $l_k$ 는 균열의 길이이다.

### 2.3 복소응력함수

경계조건 (5)를 만족하고 헤르쯔접촉압력을 받는 균열이 없는 반무한 탄성체에 관한 복소응력함수  $\phi_1(z)$ 는 다음 식과 같이 주어진다.<sup>(7)</sup>

$$\phi_1(z) = \frac{P_o(\mu - i)}{2c}(\sqrt{z - c}\sqrt{z + c} - z) \tag{7}$$

여기서,  $z = x + iy$ 이고,  $\mu$ 는 헤르쯔접촉부의 마찰 계수이다. 이 때의 응력은 다음식과 같이 표현된다.

$$\sigma_{yy} - i\tau_{xy} = \phi_1(z) - \phi_1(\bar{z}) + (z - \bar{z})\overline{\phi_1'(z)} \tag{8}$$

균열에 관한 복소응력함수를 구하기 위해 먼저 두 균열선상의 임의의 점  $z = z_{ok}(z_{ok} = x_k + \eta_k e^{-i\theta_k})$ 에 다음식과 같이 2개의 독립된 전위밀도  $\alpha_k$ 로서 정의되는 인상전위를 분포시킨다.<sup>(8)</sup>

$$\alpha_k = \frac{G_o\{[U_{\xi_k}] + i[V_{\xi_k}]\}e^{-i\theta_k}}{i\pi c(x+1)} \quad (k=1, 2) \tag{9}$$

여기서,  $\{[U_{\xi_k}] + i[V_{\xi_k}]\}$ 는 변위의 불연속량을 나타낸다. 위에서 정의된 2개의 독립된  $\alpha_k$ 에 의한 응력장을 결정하기 위한 복소응력함수는 다음과 같이 주어진다.<sup>(8)</sup>

$$\begin{aligned}
 \phi_2(z) &= \sum_{j=1}^2 \left\{ \frac{\alpha_j}{z - z_{oj}} \right\} \\
 \psi_2(z) &= \sum_{j=1}^2 \left\{ \frac{\overline{\alpha_j}}{z - z_{oj}} + \frac{\alpha_j z_{oj}}{(z - z_{oj})^2} \right\}
 \end{aligned} \tag{10}$$

이 때의 응력식을 Muskhelishvili<sup>(9)</sup>에 의한 표시로 나타내면

$$\begin{aligned}
 \sigma_{yy} + \sigma_{xx} &= 2\{\phi_2(z) + \overline{\phi_2(z)}\} \\
 \sigma_{yy} - \sigma_{xx} - 2i\tau_{xy} &= 2\{z\overline{\phi_2'(z)} + \overline{\psi_2(z)}\}
 \end{aligned} \tag{11}$$

으로 표현된다. 여기서, '는  $z$ 에 관한 미분을 표시한다.

반무한 탄성체의 표면은 자유표면이므로  $\phi_2(z)$ 와  $\psi_2(z)$ 에 의해 반무한 탄성체 표면에 생기는 전위에 의한 응력이 무응력상태가 되기 위해서 다음의 복소응력함수  $\phi_3$ 가 요구되어진다.<sup>(9)</sup>

$$\phi_3(z) = \begin{cases} \phi_2(z), & \text{Im}(z) > 0 \\ -\phi_2(z) - z\overline{\phi_2'(z)} - \overline{\psi_2(z)}, & \text{Im}(z) < 0 \end{cases} \tag{12}$$

이 때의 응력식을 Muskhelishvili<sup>(9)</sup>에 의한 표시로 나타내면

$$\sigma_{yy} - i\tau_{xy} = \phi_3(z) - \phi_3(\bar{z}) + (z - \bar{z})\overline{\phi_3'(z)} \tag{13}$$

으로 표현된다.

### 2.4 특이적분방정식의 유도

복소응력함수  $\phi_1(z)$ ,  $\phi_2(z)$ ,  $\psi_2(z)$ ,  $\phi_3(z)$ 의 조합은 경계조건 (5)를 만족시킨다. 복소응력함수  $\phi_2(z)$ ,  $\psi_2(z)$ 에 의한 직선  $z_k = x_k + \xi_k e^{-i\theta_k}$ 를 따라서의 응력식은  $\phi_2(z)$ 와  $\psi_2(z)$ 의 항으로 다음식과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned}
 & (\sigma_{z_k z_k} - i\tau_{\xi_k \xi_k}) \phi_{2, \psi_2} \\
 &= \phi_2(z_k) + \overline{\phi_2(z_k)} + \{z_k \phi_2'(z_k) + \overline{\phi_2'(z_k)}\} e^{2i\beta_k} \\
 &= \sum_{j=1}^2 \left\{ \frac{\alpha_j}{z_k - z_{0j}} + \frac{\overline{\alpha_j}}{(z_k - z_{0j})} + e^{2i\beta_k} \right. \\
 & \quad \left. \left[ -z_k \frac{\overline{\alpha_j}}{(z_k - z_{0j})^2} + \frac{\alpha_j}{z_k - z_{0j}} + \frac{\overline{\alpha_j} z_{0j}}{(z_k - z_{0j})^2} \right] \right\} \\
 & \quad (k=1, 2) \tag{14}
 \end{aligned}$$

식 (14)에서  $k \neq j$ 이면 식 (14)는 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned}
 (\sigma_{z_k z_k} - i\tau_{\xi_k \xi_k}) \phi_{2, \psi_2} &= \sum_{j=1}^2 [\alpha_j L_{1k}(\xi_k, \eta_j) \\
 & \quad + \overline{\alpha_j} L_{2k}(\xi_k, \eta_j)] \tag{15}
 \end{aligned}$$

여기서,

$$\begin{aligned}
 L_{1k}(\xi_k, \eta_j) &= \phi_2^*(z_k : z_{0j}) + \overline{\phi_2^*(z_k : z_{0j})} e^{2i\beta_k} \\
 L_{2k}(\xi_k, \eta_j) &= \phi_2^*(z_k : z_{0j}) + [z_k \phi_2'^*(z_k : z_{0j}) \\
 & \quad + \overline{\phi_2'^*(z_k : z_{0j})}] e^{2i\beta_k} \\
 \phi_2^*(z : z_0) &= \frac{1}{(z - z_0)} \\
 \phi_2'^*(z : z_0) &= \frac{-z_0}{(z - z_0)^2} \tag{16}
 \end{aligned}$$

식 (14)에서  $k=j$ 이면 식 (14)는 다음과 같이 표현된다.

$$(\sigma_{z_k z_k} - i\tau_{\xi_k \xi_k}) \phi_{2, \psi_2} = 2\gamma \frac{\alpha_k}{(\xi_k - \eta_k)} e^{i\beta_k} \tag{17}$$

복소응력함수  $\phi_1(z)$ 과  $\phi_3(z)$ 에 의한 직선  $z_k = x_k + \xi_k e^{-i\beta_k}$ 를 따른 응력식은 각각  $\phi_1(z)$ 과  $\phi_3(z)$ 의 항으로 다음식과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned}
 (\sigma_{z_k z_k} - i\tau_{\xi_k \xi_k}) \phi_j &= \phi_j(z_k) + (1 - e^{2i\beta_k}) \overline{\phi_j(z_k)} - e^{2i\beta_k} \phi_j(\overline{z_k}) \\
 & \quad + e^{2i\beta_k} (z - \overline{z}) \phi_j'(z_k) \\
 & \quad (k=1, 2; j=1, 3) \tag{18}
 \end{aligned}$$

특히, 복소응력함수  $\phi_3(z)$ 에 대한 식 (18)은 다음과 같이 정리될 수 있다.

$$\begin{aligned}
 (\sigma_{z_k z_k} - i\tau_{\xi_k \xi_k}) \phi_3 &= \sum_{j=1}^2 [\alpha_j D_{1k}(\xi_k, \eta_j) + \overline{\alpha_j} D_{2k}(\xi_k, \eta_j)] \\
 & \quad (k=1, 2) \tag{19}
 \end{aligned}$$

여기서,

$$\begin{aligned}
 D_{1k}(\xi_k, \eta_j) &= \hat{\phi}_3(z_k : z_{0j}) + (1 - e^{2i\beta_k}) \\
 & \quad \frac{\overline{\phi_3^*(z_k : z_{0j})} - e^{2i\beta_k} \overline{\hat{\phi}_3(z_k : z_{0j})}}{+ e^{2i\beta_k} (z_k - \overline{z_k}) \phi_3'^*(z_k : z_{0j})} \\
 D_{2k}(\xi_k, \eta_j) &= \phi_3^*(z_k : z_{0j}) + (1 - e^{2i\beta_k}) \\
 & \quad \frac{\overline{\phi_3^*(z_k : z_{0j})} - e^{2i\beta_k} \overline{\phi_3^*(z_k : z_{0j})}}{+ e^{2i\beta_k} (z_k - \overline{z_k}) \overline{\phi_3^*(z_k : z_{0j})}} \tag{20}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \hat{\phi}_3(z : z_0) &= \begin{cases} \frac{1}{(z - z_0)}, & \text{Im}(z) > 0 \\ \frac{-1}{(z - z_0)}, & \text{Im}(z) < 0 \end{cases} \\
 \phi_3^*(z : z_0) &= \begin{cases} 0, & \text{Im}(z) > 0 \\ -\frac{z_0 - z_0}{(z - z_0)^2}, & \text{Im}(z) < 0 \end{cases} \tag{21}
 \end{aligned}$$

표면균열을 전위의 연속분포로 치환하기 위해 전위밀도  $\alpha$ 는 직선  $z_k = x_k + \xi_k e^{-i\beta_k}$ 를 따라 연속적으로 분포된 전위밀도  $\alpha(\xi) d\xi$ 로 대체하면 복소응력함수  $\phi_2(z)$ ,  $\psi_2(z)$ ,  $\phi_3(z)$ 는 적분식으로 표현된다. 식 (14)와 (19)를 고려하여 균열면에서의 응력식은 다음식과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned}
 \sigma_{z_k z_k} - i\tau_{\xi_k \xi_k} &= (\sigma_{z_k z_k} - i\tau_{\xi_k \xi_k}) \phi_1 \\
 & \quad + \sum_{i=2}^3 \sum_{j=1}^2 \int_0^{l_j} (\sigma_{z_k z_k} - i\tau_{\xi_k \xi_k}) \phi_{i, \psi_2} d\eta_j \tag{22}
 \end{aligned}$$

식 (22)를 균열면을 따른 경계조건식인 식 (6)에 대입하면  $\alpha_k(\eta_k)$ 에 관한 다음의 특이적분방정식이 얻어진다.

$$\begin{aligned}
 2e^{i\beta_k} \int_0^{l_k} \frac{\alpha_k(\eta_k)}{(\xi_k - \eta_k)} + \sum_{j=1}^2 \int_0^{l_j} [\alpha_j(\eta_j) C_{1k}(\xi_k, \eta_j) \\
 + \overline{\alpha_j(\eta_j)} C_{2k}(\xi_k, \eta_j)] d\eta_j \\
 = -(\sigma_{z_k z_k} - i\tau_{\xi_k \xi_k}) \phi_1, \quad (k=1, 2) \tag{23}
 \end{aligned}$$

여기서,

$$\begin{aligned}
 C_{1k}(\xi_k, \eta_j) &= D_{1k}(\xi_k, \eta_j) \\
 & \quad + (1 - \delta_{kj}) L_{1k}(\xi_k, \eta_j) \\
 C_{2k}(\xi_k, \eta_j) &= D_{2k}(\xi_k, \eta_j) \\
 & \quad + (1 - \delta_{kj}) L_{2k}(\xi_k, \eta_j) \\
 \delta_{kj} &= \begin{cases} 1, & k=j \\ 0, & k \neq j \end{cases} \tag{24}
 \end{aligned}$$

### 3. 수치해석

유도되어진 특이적분방정식 (23)을 Gerasoulis<sup>(10)</sup>의 piecewise quadratic method에 의해 수치해석하기 위해 먼저 식 (23)을 전위밀도  $\alpha_k(\eta_k)$ 와 적분변수  $\eta_k$ 를 식 (25)와 같이 치환한다.

$$\begin{aligned}
 \alpha_k(\eta_k) &= \frac{P_0 \bar{\alpha}_k(\hat{\eta}_k) e^{-i\beta_k}}{(1 - \hat{\eta}_k^2)^{1/2}} \\
 \hat{\eta}_k &= \frac{2\eta_k}{l_k} - 1 \tag{25}
 \end{aligned}$$

적분구간  $-1 \leq \hat{\eta}_k \leq 1$ 을  $2N_k$ 등분하여 절점  $\hat{\eta}_{k,n}(n$

=1~2N<sub>k</sub>+1)을 결정하고 3절점마다 Lagrange의 보간을 적용하였다.

선점을  $\xi_{k,r} = \bar{\eta}_{k,r} + 1/2N_k (r=1\sim 2N_k)$ 이 되도록 선택하고 반무한체 표면과 표면균열이 만나는 점 ( $\bar{\eta}_{k,1} = -1$ )에서 전위밀도  $\alpha_k(\eta_k)$ 의 특이성이 1/2 이하가 됨을 고려하여  $\bar{\alpha}_k(-1)=0$ 라고 가정하면  $\bar{\alpha}_k(\bar{\eta}_{k,n})$ 에 관한  $2(\sum_{k=1}^2 N_k)$ 원의 다음과 같은 연립 1차 방정식이 얻어진다.

$$\begin{aligned} & -2 \sum_{n=1}^{2N_k+1} \{w_{r,n} \bar{\alpha}_k(\bar{\eta}_{k,n}) \\ & + \sum_{j=1}^2 [0.5e^{-i\beta_j} l_j v_n C_{1k}(\xi_{k,r}, \bar{\eta}_{j,n}) \bar{\alpha}_j(\bar{\eta}_{j,n}) \\ & + 0.5e^{i\beta_j} l_j v_n C_{2k}(\xi_{k,r}, \bar{\eta}_{j,n}) \bar{\alpha}_j(\bar{\eta}_{j,n})]\} \\ & = \Gamma_k(\xi_{k,r}) \quad (k=1, 2; r=1\sim 2N_k) \end{aligned} \quad (26)$$

여기서,

$$\Gamma_k(\xi_{k,r}) = -(\sigma_{\xi_k \xi_k} - i\tau_{\xi_k \xi_k})_{\phi, \xi_k=0} / P_o$$

$w_{r,n}$ ,  $v_n$ 은 weight function으로서 Gerasoulis<sup>(10)</sup>가 유도한 것과 동일하다. 본 연구에서는  $N_k=10(k=1, 2)$ 으로 하여 계산하였다. 실제의 수치해석에 있어서는 최초의 각 균열의 전영역이 열려( $l_{op}=l_k$ ,  $k=1, 2$ )있다고 가정하고 식 (26)의 연립방정식을 풀었다. 균열선상의 임의의 절점 ( $\bar{\eta}_{k,p}$ )에 있어 변위식은 식 (27)과 같이 주어진다.

$$\begin{aligned} (U_{\xi_k} + iV_{\xi_k})_{\xi_k=0} &= \frac{4\pi i(1-\nu)cl_k P_o}{G_o} \\ & \sum_{n=p}^{2N_k+1} v_n \bar{\alpha}_k(\bar{\eta}_{k,n}) \\ & (k=1, 2, p=1, 2N_{k,1}) \end{aligned} \quad (27)$$

변위식에 의해 얻어지는 균열개구변위가 음( $V_\xi < 0$ )이 되는 영역에서는  $Re\{\bar{\alpha}_k(\bar{\eta}_{k,n})\}=0$ 으로 놓고 식 (26)의 연립방정식을 다시 풀었으며 이러한 수치계산과정을 균열개구변위가 음이 되는 영역이 없어질 때까지 반복하였다. 주어진 헤르쯔접촉하중의 각 위치에 따른 식 (6)의  $l_{op}$ 가 결정되어지며 연립방정식을 풀어서 구한  $\bar{\alpha}_k(\bar{\eta}_{k,n})$ 을 이용하여  $k$ 번째의 균열선단( $n=2N_k+1$ )에 있어서 응력확대계수는 다음과 같이 구하여진다.

$$K_I - iK_{II} = \pi P_o \sqrt{2l_k c} \bar{\alpha}(1) \quad (28)$$

### 4. 결과 및 고찰

헤르쯔접촉하중의 이동에 따른 경사진 복수표면

균열의 상호간섭의 영향을 수치적으로 분석 검토하기 위해 본 연구에서는 모드 I, 모드 II 무차원 응력확대계수  $K_I/P_o\sqrt{c}$ 와  $K_{II}/P_o\sqrt{c}$  그리고 재료의 파괴현상에 있어서 중요한 파라메터인 모드 II 무차원 응력확대계수의 변화폭  $\Delta K_{II}/P_o\sqrt{c}((K_{II\max} - K_{II\min})/P_o\sqrt{c})$ 의 상대적인 크기의 변화를 고찰하였다.

해석에 사용한 변수들은 마찰면의 윤활상태를 나타내는 마찰계수  $\mu$ , 균열 1과 균열 2에서 표면결합의 정도를 나타내는 무차원 표면균열의 길이  $l_1$ ,  $l_2$ , 균열의 경사각  $\beta_1$ ,  $\beta_2$  그리고 무차원 균열간의 거리  $d$  등으로 하였다.

#### 4.1 마찰계수의 변화에 따른 상호간섭

복수표면균열에서 두 균열간의 거리를 가까이 가져갈때 균열 1과 2의 각각의 무차원 응력확대계수의 변화를 주어진 마찰계수의 값들에 대해 고찰하고자 한다. 균열각도와 균열길이는 각각  $\beta_1=\beta_2=30^\circ$ ,  $l_1=l_2=0.1$ 로 두고 마찰계수를  $\mu=0.1\sim 0.9$ 범위에서 고찰하였다.

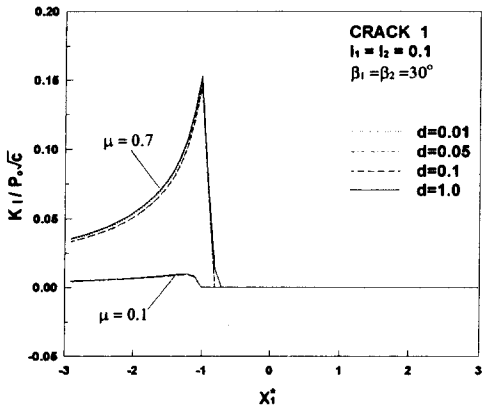
Fig. 2의 균열 1과 균열 2의 균열의 일부 또는 전체가 닫혀있는 영역인  $-1 < x_1^*$ 과  $-1 < x_2^*$ 에서는  $K_I/P_o\sqrt{c}$ 의 값이 0이 되고 균열이 완전히 열린 영역인  $-1 > x_1^*$ 과  $-1 > x_2^*$ 에서 값이 존재하며 균열의 개구부가 헤르쯔접촉부의 trailing edge영역이 되는  $x_1^*=-1$ 과  $x_2^*=-1$  부근에서 최대값이 나타나 이 때 균열의 전파가능성이 가장 큼을 알 수 있다. 마찰계수  $\mu$ 가 커짐에 따라  $K_I/P_o\sqrt{c}$ 의 값이 크게 나타나고 있다. Fig. 2(a)의 균열 1에서는 마찰계수가 0.1과 0.7 두 경우 모두 균열간의 거리가 변함에 따라  $K_I/P_o\sqrt{c}$ 의 값에 큰 변화가 나타나지 않으나 Fig. 2(b)의 균열 2에서는 균열간의 거리가 작아짐에 따라  $K_I/P_o\sqrt{c}$ 의 값이 균열 1의 간섭의 영향을 받아 작아짐을 알 수 있다.

Fig. 3의 (a)와 (b)는 각각 균열 1과 균열 2에서 마찰계수가 0.1과 0.7일 때  $K_{II}/P_o\sqrt{c}$ 의 변화를 나타낸 것으로 마찰계수  $\mu$ 가 커짐에 따라 그 변화폭이 커짐을 보인다.  $\mu=0.1$ 과  $\mu=0.7$ 인 두 경우 모두 균열간의 거리가 작아짐에 따라 균열간의 상호간섭에 의해  $K_{II}/P_o\sqrt{c}$ 의 감소가 발생하고  $\mu=0.1$ 인 경우보다  $\mu=0.7$ 의 경우가 그 감소폭이 크며 균열 2의 값이 균열 1에 비해 상대적으로 큰 폭으로 감소한다.

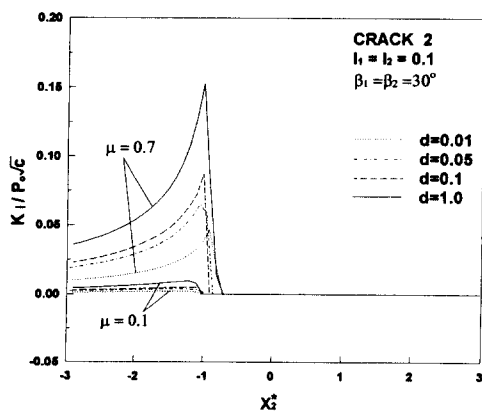
Fig. 4는 균열간의 거리  $d$ 에 대해  $\Delta K_{II}/P_o\sqrt{c}$ 의

값을  $\mu$ 의 변화에 따라 나타낸 것이다. 주어진 각 마찰계수의 값에 대해 균열간의 거리  $d$ 가 작아질수록 균열 1과 균열 2의  $\Delta K_{II}/P_0\sqrt{c}$ 의 값은 감소하고 있으며 특히 약  $d=0.3$  이후 급격히 감소한다. 균열 1에서보다는 균열 2에서 감소폭이 더 크고 마찰계수의 값이 클수록 감소폭이 더 큼을 알 수 있다.

두 균열의 경사각도와 길이가 각각  $\beta_1=\beta_2=30^\circ$ 와 0.1로서 평행하고 길이가 같은 경우에 있어 균열간의 거리가 가까와질수록 균열 1과 균열 2의 응력확대계수  $K_I$ 의 값과  $K_{II}$ 의 변화폭,  $\Delta K_{II}$ 가 작아졌고 이는 균열 1에서 보다는 균열 2에서 현저했으며 마찰계수의 값이 클수록 두드러졌다. 이러한 결과는 Goshima<sup>(6)</sup>의 결과와도 일치한다.

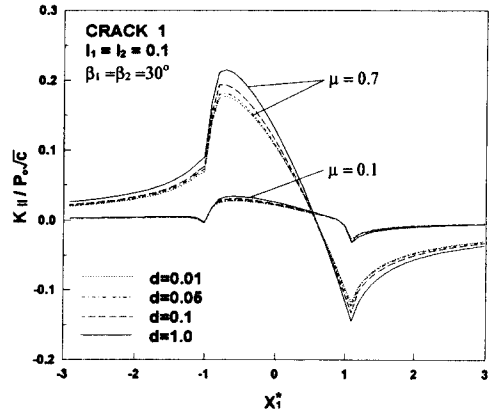


(a) Crack 1

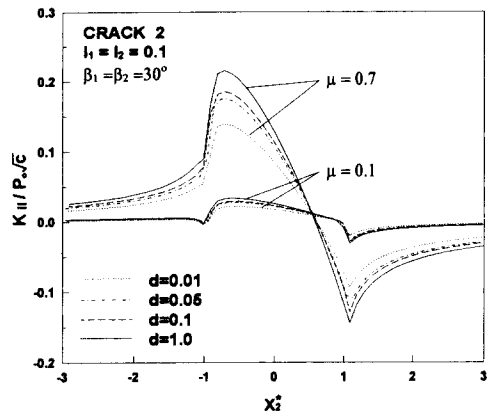


(b) Crack 2

Fig. 2  $K_I/P_0\sqrt{c}$  as a function of contact position showing effect of friction



(a) Crack 1



(b) Crack 2

Fig. 3  $K_{II}/P_0\sqrt{c}$  as a function of contact position showing effect of friction

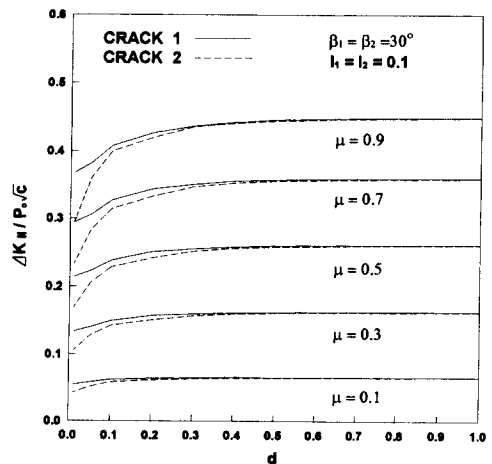


Fig. 4  $\Delta K_{II}/P_0\sqrt{c}$  as a function of distance between the two cracks showing effect of friction

4.2 균열의 길이비에 따른 상호간섭

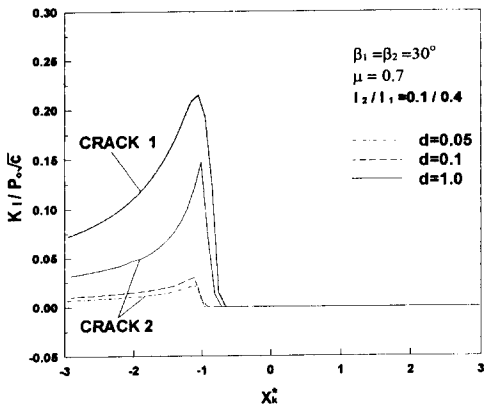
두 균열이 평행한 상태에서 균열 1의 길이는 일정( $l_1=0.4$ )하게 두고 균열 2의 길이를 변화시켜가며 무차원 응력확대계수의 변화를 고찰하고자 한다. 균열각도와 마찰계수를 각각  $\beta_1=\beta_2=30^\circ$ ,  $\mu=0.7$ 로 두고 균열의 길이비를  $l_2/l_1=0.1/0.4\sim 0.4/0.4$  범위에서 고찰하였다.

Fig. 5의 (a)와 (b)는 각각 균열의 길이비가  $l_2/l_1=0.1/0.4$ 과  $l_2/l_1=0.4/0.4$ 일 때  $K_I/P_0\sqrt{c}$ 의 값을 나타낸 것이다. 균열 1의  $K_I/P_0\sqrt{c}$ 의 값은 두 균열 길이비의 경우에 대해 모두 균열간의 거리에 따른 간섭의 영향이 거의 나타나지 않았다. Fig. 5(a)에서 균열 길이비가  $l_2/l_1=0.1/0.4$ 로서 균열 1에 비해 균열 2의 길이가 상대적으로 짧을때 균열 2의  $K_I/P_0\sqrt{c}$ 의 값은 작아져 최대값은 균열 1의 약

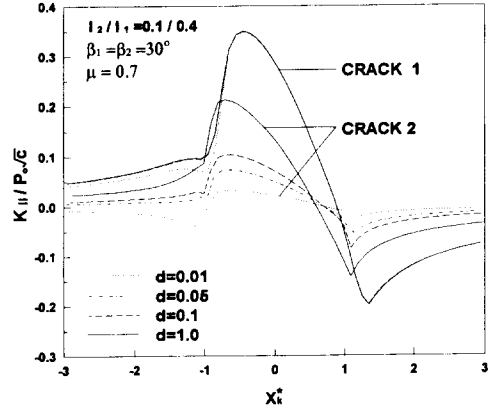
0.22에 비해  $d=1.0$ 일 때 약 0.15로 작으며 균열 2에서는 간섭의 영향이 크게 나타나 두 균열 길이비의 경우 모두 균열간의 거리가 가까워질 때  $K_I/P_0\sqrt{c}$ 의 값이 크게 감소했다.

Fig. 6의 (a)와 (b)는 균열 길이비에 따른  $K_{II}/P_0\sqrt{c}$ 의 값으로서 균열 1에서는  $K_I$ 의 경우와 같이 균열간의 간섭의 영향이 거의 보이지 않는다. 균열 2에서는 Fig. 6(a)의 균열 2의 길이가 균열 1보다 작은 0.1일 때 변화폭이 균열 1의 약 0.55보다 작아져  $d=1.0$ 일 때 약 0.35 정도이고 두 균열 길이비의 경우 모두 간섭의 효과가 크게 나타나 균열간의 거리가 가까워질때 변화폭이 크게 줄어들음을 알 수 있고 균열의 길이비가 작을 때 변화폭의 감소가 더 큼을 보인다.

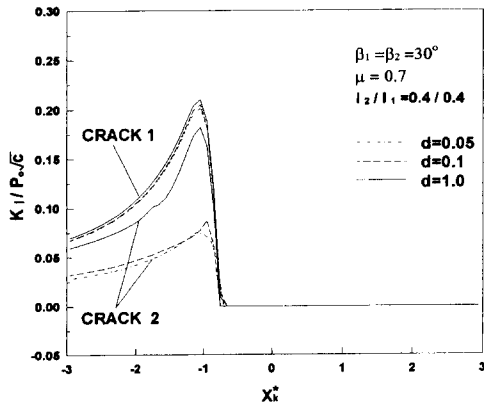
Fig. 7은 균열간의 거리  $d$ 에 따른  $\Delta K_{II}/P_0\sqrt{c}$ 의



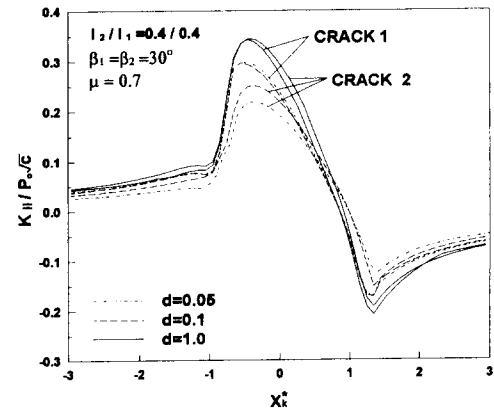
(a)  $l_2/l_1=0.1/0.4$



(b)  $l_2/l_1=0.4/0.4$



(b)  $l_2/l_1=0.4/0.4$



(a)  $l_2/l_1=0.1/0.4$

Fig. 5  $K_{II}/P_0\sqrt{c}$  as a function of contact position showing effect of ratio of crack length

Fig. 6  $K_{II}/P_0\sqrt{c}$  as a function of contact position showing effect of ratio of crack length

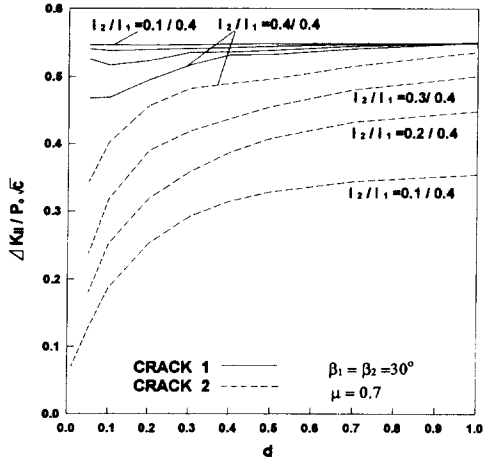


Fig. 7  $\Delta K_{II}/P_o\sqrt{c}$  as a function of distance between the two cracks showing effect of ratio of crack length

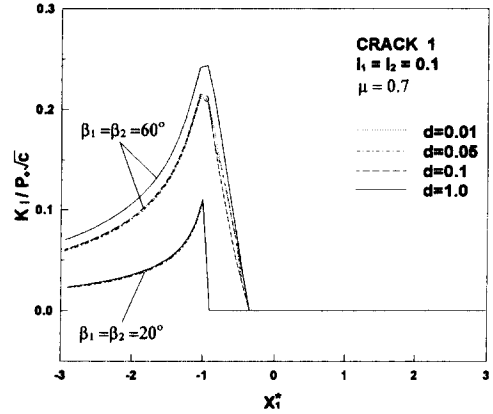
변동을 두 균열의 길이비  $l_2/l_1$ 을 변화시켜가며 나타낸 것이다. 균열 1에서는 균열 2의 길이,  $l_2$ 가 길어질수록 균열 2의 간섭의 영향으로  $\Delta K_{II}/P_o\sqrt{c}$ 의 값이 작아짐을 보인다. 균열 2에서는 균열 2의 길이가 짧아질수록  $K_{II}$ 의 변화폭이 작아져  $\Delta K_{II}/P_o\sqrt{c}$ 의 값이 감소한다. 그리고 두 균열간의 거리가 작아질수록 균열 1의 간섭의 영향에 의해 균열 1에 비해 상대적으로 크게 감소하며 균열 2의 길이가 짧아질수록 간섭의 효과가 더욱 두드러진다.

두 균열의 경사각 및 마찰계수가  $\beta_1 = \beta_2 = 30^\circ$ 와 0.7인 경우에 있어 균열의 길이비,  $l_2/l_1$ 가 작아질수록 균열 2의  $K_I$ 의 값 및  $K_{II}$ 의 변화폭,  $\Delta K_{II}$ 는 작아지며 간섭의 효과는 더욱 두드러졌다.

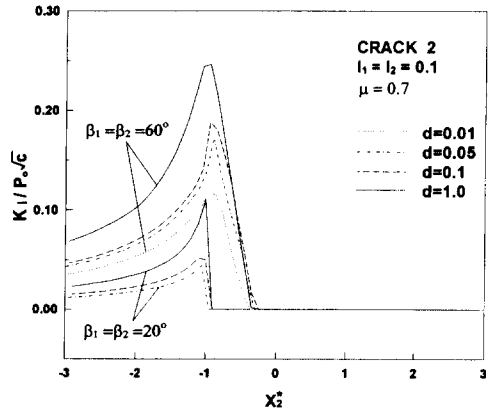
### 4.3 균열의 각도에 따른 상호간섭

두 균열의 길이가 서로 같고 평행한 상태에서 균열경사각의 변화에 따른 무차원 응력확대계수의 변화를 고찰하고자 한다. 균열길이와 마찰계수를 각각  $l_1 = l_2 = 0.1$ ,  $\mu = 0.7$ 로 두고 균열경사각을  $\beta_1 = \beta_2 = 20^\circ \sim 60^\circ$ 로 하여 고찰하였다.

Fig. 8(a)에서는  $K_I/P_o\sqrt{c}$  값이 존재하는 범위에서  $\beta_1 = \beta_2 = 60^\circ$ 의 경우가  $\beta_1 = \beta_2 = 20^\circ$ 의 경우에 비해  $K_I/P_o\sqrt{c}$ 의 값이 더 높게 나타남을 보여준다. 두 균열간의 거리가 작아짐에 따라  $\beta_1 = \beta_2 = 20^\circ$ 와  $\beta_1 = \beta_2 = 60^\circ$ 의 두 경우 모두  $K_I/P_o\sqrt{c}$ 의 값의 변화가 없어 균열 2의 영향을 거의 받지 않음을 알 수



(a) Crack 1



(b) Crack 2

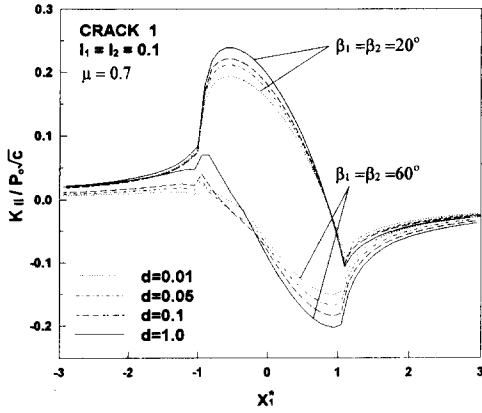
Fig. 8  $K_I/P_o\sqrt{c}$  as a function of contact position showing effect of crack inclination angle

있다. Fig. 8(b)는 균열 2의 경우로서 두 균열간의 거리가 작아짐에 따라  $\beta_1 = \beta_2 = 20^\circ$ 와  $\beta_1 = \beta_2 = 60^\circ$ 의 두 경우 모두 균열 1의 영향에 의해  $K_I/P_o\sqrt{c}$ 의 값이 감소하며  $\beta_1 = \beta_2 = 60^\circ$ 의 경우가  $\beta_1 = \beta_2 = 20^\circ$ 의 경우보다 더 감소폭이 크다.

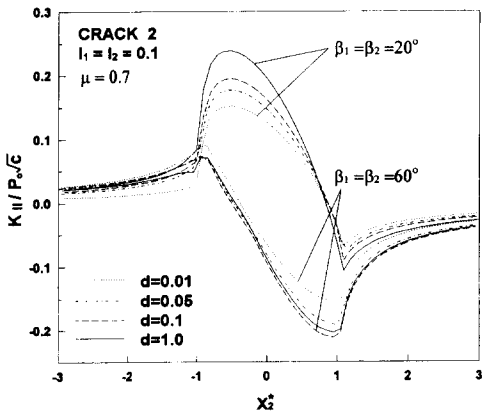
Fig. 9의 (a)와 (b)는 각각 균열 1과 균열 2의  $\beta_1 = \beta_2 = 20^\circ$ 와  $\beta_1 = \beta_2 = 60^\circ$ 일때  $K_{II}/P_o\sqrt{c}$ 를 나타낸 것으로  $\beta_1 = \beta_2 = 20^\circ$ 의 경우가  $\beta_1 = \beta_2 = 60^\circ$ 의 경우에 비해 변화폭이 더 크게 됨을 보이고 두 경우 모두 균열 1과 균열 2에서 두 균열간의 거리에 따른 간섭의 효과가 나타난다.  $\beta_1 = \beta_2 = 20^\circ$ 의 경우에는 균열 2에서 감소폭이 더 크게 됨을 알 수 있다.

Fig. 10은 균열간의 거리  $d$ 의 변화에 따른  $\Delta K_{II}/P_o\sqrt{c}$ 의 값을 균열의 경사각을 변화시켜가며





(a) Crack 1



(b) Crack 2

Fig. 9  $K_{II}/P_0\sqrt{c}$  as a function of contact position showing effect of crack inclination angle

나타낸 것이다. 균열의 경사각이  $\beta_1 = \beta_2 = 30^\circ$ 인 경우에  $K_{II}$ 의 변화폭,  $\Delta K_{II}$ 의 값이 가장 크며  $\beta_1 = \beta_2 = 20^\circ$ 와  $\beta_1 = \beta_2 = 30^\circ$ 의 경우는 균열간의 거리가 감소할수록 균열 1에 비해 균열 2에서  $\Delta K_{II}/P_0\sqrt{c}$ 의 값이 감소가 더 크나  $\beta_1 = \beta_2 = 60^\circ$ 의 경우는 균열 1에서 감소가 더 큼을 알 수 있다. Fig. 11은 균열의 경사각,  $\beta$ 에 대해  $\Delta K_{II}/P_0\sqrt{c}$ 를 나타낸 것이다. 마찰계수가 0.7인 경우는 약  $30^\circ \sim 40^\circ$  범위에서 최대값을 가지며 두 균열간의 거리,  $d=0.05$ 와  $d=0.01$ 일때 각각 약  $40^\circ$ 와  $50^\circ$ 까지는 균열 2에서 간섭에 의한 감소가 더 크나 이후는 균열 1에서 감소가 더 큼을 알 수 있다.

두 균열이 길이가 같고 평행한 상태에서 균열 경사각이 커질수록  $K_I$ 의 값은 커지고 균열 2에서  $K_I$ 의 값의 간섭의 영향은 크게 나타났으나 균열 1에

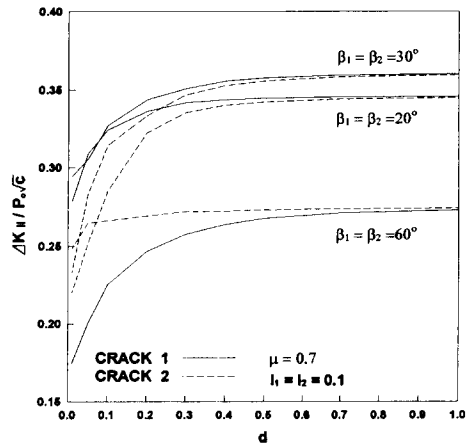


Fig. 10  $\Delta K_{II}/P_0\sqrt{c}$  as a function of distance between the the two cracks showing effect of crack inclination angle

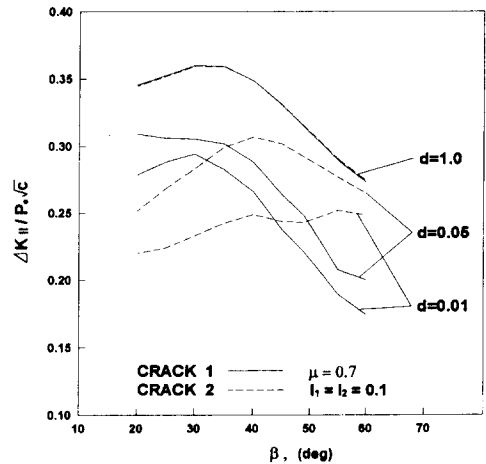


Fig. 11  $\Delta K_{II}/P_0\sqrt{c}$  as a function of crack inclination angle,  $\beta$

서는 거의 간섭의 효과가 나타나지 않았다. 마찰계수가 0.7일때  $30^\circ \sim 40^\circ$  범위에서 변화폭,  $\Delta K_{II}$ 는 최대값을 가지며 경사각이 커질수록 균열 2보다는 균열 1에서  $\Delta K_{II}$ 의 감소가 더 큼을 알 수 있다.

### 5. 결 론

두 개의 경사진 표면균열이 존재하는 반무한체 탄성체 위에 헤르쯔점촉하중을 받는 모델을 설정하여 수치해석으로 두 표면균열간의 상호간섭을 고찰을 한 결과 다음의 결론을 얻었다.

(1) 두 균열의 경사각도와 길이가 각각  $30^\circ$ 와 0.1로서 평행하고 길이가 같은 경우에 있어 균열간의 거리가 가까와질수록 균열 1과 균열 2의 응력화대계수  $K_I$ 의 값과  $K_{II}$ 의 변화폭,  $\Delta K_{II}$ 가 작아졌고 이는 균열 1에서 보다는 균열 2에서 현저했으며 마찰계수의 값이 클수록 두드러졌다.

(2) 두 균열의 경사각도가  $30^\circ$ 로 평행하고 마찰계수가 0.7인 경우에 있어 균열의 길이비,  $l_2/l_1$ 가 작아질수록 균열 2의  $K_I$ 의 값 및  $K_{II}$ 의 변화폭,  $\Delta K_{II}$ 는 작아지며 간섭의 효과는 더욱 두드러졌다.

(3) 두 균열이 길이가 같고 평행한 상태에서 균열 경사각이 커질수록  $K_I$ 의 값은 커지고 균열 2에서  $K_I$ 의 값의 간섭의 영향은 크게 나타났으나 균열 1에서는 거의 간섭의 효과가 나타나지 않았다. 마찰계수가 0.7일때  $30^\circ \sim 40^\circ$  범위에서 변화폭,  $\Delta K_{II}$ 는 최대값을 가지며 경사각이 커질수록 균열 2보다는 균열 1에서  $\Delta K_{II}$ 의 값은 더 크게 감소했다.

### 참고문헌

(1) Hornbogen, E., 1975, "The Role of Fracture Toughness in the Wear of Metals," *Wear*, Vol. 33, pp. 251~259.  
 (2) Fleming, J. R. and Suh, N. P., 1977, "Mechanics of Crack Propagation in Delamination Wear," *Wear*, Vol. 44, pp. 39~56.  
 (3) Keer, L. M. and Bryant, M. D., 1983, "A Pitting Model for Rolling Contact Fatigue," *ASME Journal of Lubrication Technology*, Vol. 105, pp.

198~205.  
 (4) Bryant, M. D., Miller, G. R. and Keer, L. M., 1984, "Line Contact Between a Rigid Indenter and a Damaged Elastic Body," *Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*, Vol. 37, pp. 467~478.  
 (5) Kaneta, M., Murakami, Y. and Okazaki, T., 1986, "Growth Mechanism of Subsurface Crack Due to Hertzian Contact," *Trans. ASME Journal of Tribology*, Vol. 108, pp. 134~139.  
 (6) Goshima, T., Miyao, K. and Kamishima, Y., 1991, "Mutual Interference of Two Surface Crack in a Semi-Infinite Body Due to a Rolling Contact," *JSME*, Vol. 57, No. 533, pp. 19~24.  
 (7) 김재호, 김석삼, 박중환, 1990, "반무한 탄성체의 헤르쯔접촉하의 경사진 표면균열의 전파거동," 대한기계학회논문집, 제14권, 제3호, pp. 624~635.  
 (8) Dundurs, J., 1975, "Elastic Interaction of Dislocations with Inhomogeneities," *ASME publication, Mathematical Theory of Dislocations*, pp. 70~115.  
 (9) Muskhelishvili, N. I., 1954, *Some Basic Problems in the Mathematical Theory of Elasticity*, 4th Ed., Noordhoff.  
 (10) Gerasoulis, A., 1982, "The Use of Piecewise Quadratic Polynomials for the Solution of Singular Integral Equations of Cauchy Type," *Comput. & Maths. with Applics.*, Vol. 8, pp. 15~22.