

<논 문>

## 접촉문제에서의 변분부등식의 유한요소해석과 A Priori 오차계산법

이 춘 열\*

(1996년 4월 1일 접수)

### A Solution of Variational Inequalities and A Priori Error Estimations in Contact Problems with Finite Element Method

Choon-Yeol Lee

**Key Words :** Contact Problem(접촉문제), Friction(마찰), Variational Inequalities(변분부등식), Regularization(정규화), Finite Element Approximation(유한요소 근사식), Error Estimation(오차계산)

#### Abstract

Governing equations in frictional contact problems are introduced using variational inequality formulations which are regularized to overcome the difficulties of non-differentiability of the friction functional. Also finite element approximations and a priori error estimations are derived based on those formulations. Numerical simulations are performed illustrating the theoretical results.

#### 1. 서 론

접촉문제는 문제에 내재하는 비선형성으로 인하여 해석이 용이하지 않음이 잘 알려져 왔다.<sup>(1,2,3)</sup> 특히 마찰을 고려한 접촉문제에서는 마찰의 역학적 인 모델로 잘 알려진 쿨롬의 마찰법칙을 사용할 경우 마찰법칙에 존재하는 불연속 속성으로 인하여 지배방정식 자체의 해가 존재하지 않거나 다중해가 존재하여 해석시 많은 어려움이 발생한다.<sup>(4,5)</sup> 이것은 쿨롬의 마찰법칙 자체가 비선형 불연속함수를 사용하기 때문인데 여기에서는 이를 극복하기 위해 쿨롬의 마찰법칙을 일반화하고 이에 연속성을 추가한 법선 유연성(normal compliance) 법칙<sup>(6)</sup>을 소

개한다. 또한 이를 사용하여 접촉문제를 변분부등식으로 표현하고 접촉문제의 유한요소식을 구한다. 유한요소법에 의한 해의 a priori 오차계산식을 유도하고 유한요소해석을 수행하여 그 결과를 비교하였다.

#### 2. 접촉문제의 Formulation

여기에서는 소볼레프계<sup>(7)</sup>의 표기법을 사용하며  $H^s(\Omega)$ 는  $R^N(N=2,3)$ 에서의 개방영역  $\Omega$ 에서 정의된 힐버트계를 표시하도록 한다. 또한 반복되는 첨자는 수열의 합을 의미하도록 한다.

먼저 고정된 지지면 위에서의 탄성체의 변형을 생각하기로 한다. 탄성체는  $R^N(N=2,3)$ 에서 영역  $\Omega$ 로 구성되고 영역 전체에 걸쳐 체적 하중  $f$ 가 작용한다. 영역의 경계는 림프지스의 경계조건을 단

\*회원, 영남대학교 기계공학과

족하는 경계  $\Gamma$ 로 가정하고 고정경계  $\Gamma_D$ 와 경계하중  $t$ 가 가해지는  $\Gamma_F$  그리고 지지면과 접촉하게되는 접촉경계  $\Gamma_C$ 로 구성된다. 탄성체와 지지면과의 초기 간격은 함수  $g(g \geq 0)$ 로 정의한다.

미소 탄성범위 내에서의 일반적인 후크의 법칙은 다음과 같다.

$$\sigma_{ij}(u) = E_{ijkl}u_{k,l} \text{ in } \Omega, \quad 1 \leq i, j \leq N \quad (1)$$

여기에서  $u, \sigma, E$ 는 각각 변위, 응력, 탄성계수를 나타낸다.

접촉경계에서의 경계조건으로는 서본에서 기술한 바와 같이 Oden과 Martins의 법선 유연성 접촉모델을 사용한다.

$$\begin{aligned} \sigma_n &= -c_n a^{m_n} \\ \sigma_\tau &= c_\tau a^{m_\tau} \tau \end{aligned} \quad (2)$$

여기서,  $c_n, m_n, c_\tau, m_\tau$ 는 물체의 마찰법칙에서의 마찰계수와 같이 재료의 특성치이며,  $\tau$ 는 접촉경계면에서의 마찰이 진행되는 방향의 단위벡터이다.

이상에서 소개한 함수들이 충분히 매끄럽다고 가정을 하면 다음과 같은 지배방정식을 구할 수 있다.

$$\sigma_{ij}(u), , + f_i = 0 \text{ in } \Omega \quad (3)$$

$$u_i = 0 \text{ on } \Gamma_D$$

$$\sigma_{ij}(u) n_j = t_i \text{ on } \Gamma_F \quad (5)$$

또한 접촉경계면  $\Gamma_C$ 에서의 경계조건은 다음과 같이 표현된다.

$$u_\tau = 0 \text{ 일 경우 (미끄러짐이 있을 경우)} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \sigma_n &= -c_n (u_n - g)^{m_n} \\ |\sigma_\tau| &< c_\tau (u_n - g)^{m_\tau} \end{aligned}$$

$$u_\tau \neq 0 \text{ 일 경우 (미끄러짐이 없을 경우)}$$

$$\begin{aligned} |\sigma_\tau| &= -c_\tau (u_n - g)^{m_\tau} \\ u_\tau &= -\lambda \sigma_\tau, \text{ for } \lambda \geq 0 \end{aligned}$$

이러한 접촉경계조건은 기존의 쿨롱의 마찰법칙을 일반화한 것이며  $m_n = m_\tau, \mu = c_\tau / c_n$ 으로 하면 원래의 쿨롱의 마찰법칙과 같아짐을 알 수 있다.

이러한 지배방정식을 이용하여 접촉문제의 weak 문제를 구하기 위하여 다음과 같이 인장변위계를 정의한다.

$$V \equiv \{ v \in [H^1(\Omega)]^N \mid v = 0 \text{ on } \Gamma_D \} \quad (7)$$

정의된 함수  $f, t, g$ 의 정규도는 다음과 같이 가

정한다.

$$f_i \in L^2(\Omega), \quad t_i \in L^2(\Gamma_F), \quad g \in H^{1/2}(\Gamma_C) \quad (8)$$

또한 접촉경계에서의 경계적분이 정의되기 위하여 재료의 특성치인  $c_n(x), c_\tau(x), m_n, m_\tau$ 에 다음과 같은 제한을 한다.

$$c_n(x), c_\tau(x) \in L^\infty(\Gamma) \quad (9)$$

$$N=2 \text{ 일 경우 } 1 \leq m_n, m_\tau < \infty$$

$$N=3 \text{ 일 경우 } 1 \leq m_n, m_\tau \leq 3$$

그러면 다음과 같이 마찰을 고려한 접촉문제의 weak 문제를 구할 수 있다.

$$\text{Find } u \in V \text{ such that for all } v \in V \quad (10)$$

$$\begin{aligned} a(u, v - u) + j_n(u, v - u) \\ + j_\tau(u, v) - j_\tau(u, u) \geq F(v - u) \end{aligned}$$

여기서, 복선형 형태의  $a(\cdot, \cdot)$ 와 범함수  $j_n, j_\tau, F$ 는 다음과 같이 정의된 것이다.

$$a(u, v) \equiv \int_\Omega E_{ijkl} u_{i,j} v_{k,l} dx$$

$$j_n(u, v) \equiv \int_{\Gamma_C} c_n(x) (u_n - g)^{m_n} + v_n ds$$

$$j_\tau(u, v) \equiv \int_{\Gamma_C} c_\tau(x) (u_n - g)^{m_\tau} |v_\tau| ds$$

$$F(v) \equiv \int_\Omega f_i v_i dx + \int_{\Gamma_F} t_i v_i ds$$

여기서, 주의해야 할 점은 이 weak 문제는 변분 부등식의 형태이며, 이 식에는<sup>(8,9)</sup>에서 증명이 되어 있는 바와 같이 해가 존재하기는 하나 유일해가 아니라는 점이다.

이 weak 문제의 특별한 경우로서 미끄러짐만 일어나고 미끄러짐의 방향을 알고 있을 때는 식 (6)은 다음과 같이 된다.

$$\sigma_n = -c_n (u_n - g)^{m_n} \text{ on } \Gamma_C$$

$$\sigma_\tau = c_\tau (u_n - g)^{m_\tau} \tau \text{ on } \Gamma_C \quad (11)$$

이때 weak 문제는 다음과 같은 등식으로 표현될 수 있다.

$$\text{Find } u \in V \text{ such that for all } v \in V$$

$$a(u, v) + j_n(u, v) + j_\tau(u, v) = F(v) \quad (12)$$

여기서,  $\tau$ 는 접촉경계  $\Gamma_C$ 에 평행한 단위벡터이며 미끄러짐의 방향을 나타내고  $j_\tau$ 은 다음과 같이 정의되는 경계적분식이다.

$$j_\tau(u, v) = - \int_{\Gamma_C} c_\tau (u_n - g)^{m_\tau} \tau \cdot v ds \quad (13)$$

### 3. 유한요소 근사식

이제 이와 같이 구해진 식들을 사용하여 유한요소 근사식을 구성하도록 한다.

탄성체의 영역  $\Omega$ 가 유한요소  $\Omega_K$ 의 집합에 의해 다음과 같이 표현된다고 가정하자.

$$\bar{\Omega} = \bigcup_K \Omega_K \quad (14)$$

각각의 요소  $\Omega_K$ 에서 정의된 유한요소계  $V_h(\Omega_K)$ 로부터 다음과 같이 유한요소계를 정의한다.

$$V_h \subset V, \quad V_h = \prod_K V_h(\Omega_K) \quad (15)$$

여기에서  $V_h(\Omega_K)$ 의 정확한 정의는<sup>(2)</sup>를 참조하기 바란다.

그러면 식 (10)과 (12)의 유한요소 근사식을 각각 다음과 같이 구할 수 있다.

Find  $u_h \in V_h$  such that for all  $v_h \in V_h$  (16)

$$a(u_h, v_h - u_h) + j_n(u_h, v_h - u_h) + j_T(u_h, v_h) - j_T(u_h, u_h) \geq F(v_h - u_h)$$

Find  $u_h \in V_h$  such that for all  $v_h \in V_h$  (17)

$$a(u_h, v_h) + j_n(u_h, v_h) + j_T(u_h, v_h) = F(v_h)$$

이러한 각각의 유한요소 근사식에 대해 a priori 오차해석을 수행할 수 있으며 자세한 증명과정은<sup>(2)</sup>를 참조하기 바람에, 여기에서는 그 결과만을 소개하기로 한다.

#### 정리 3.1

$u \in [H^s(\Omega)]^N \cap V$ 가 식 (12)의 해이며  $u_h \in V_h$ 은 유한요소 근사식 (17)의 해라고 할 때 다음과 같이 정의된  $\mu_n, \mu_T$ 가 Korn부등식에서의  $C_K$ 에 의해 다음과 같이 제한되면

$$\mu_n \equiv \|c_n(x)\| L^\infty(\Gamma_C)$$

$$\mu_T \equiv \|c_T(x)\| L^\infty(\Gamma_C)$$

$$C_K > C_1\mu_n + C_2\mu_T$$

다음을 만족하는 양의 상수  $C$ 가 존재한다.

$$\|u - u_h\|_{1, \Omega} \leq C \frac{h^t}{p^{s-1}} \|u\|_{s, \Omega}$$

$$t = \min\{p, s-1\}$$

#### 정리 3.2

$u \in [H^s(\Omega)]^N \cap V$ 가 식 (10)의 해이며  $u_h \in V_h$

은 유한요소 근사식 (16)의 해라고 할 때 다음의 가정을 만족하면

$$s > \frac{3}{2}$$

$$(u_n - g)^{m_T} \in H^{s-3/2}(\Gamma_C)$$

$$\sigma_T \in [H^{s-3/2}(\Gamma_C)]^N$$

$$C_K > C_1\mu_n + C_2\mu_T$$

다음을 만족하는 양의 상수  $K_1$ 과  $K_2$ 가 존재한다.

$$\|u - u_h\|_{1, \Omega} \leq$$

$$K_1 \|u - v_h\|_{1, \Omega} + K_2 \{ \|u - v_h\|_{-s+2, \Omega} \}^{1/2}$$

### 4. 정규화 문제

식에 나타난 바와 같이 식 (10)의 복잡성은 마찰 범함수  $j_T$ 가 미분불가하다는 사실에 기인한다. 이러한 미분불가성은 마찰의 모델링과정에서 미끄러지는 부분과 접촉하여 정지하여 있는 부분이 정확하게 구분이 되고, 이것의 경계가 점 또는 선으로 표현할 수 있다는 가정 때문이다. 그러나 실제로는 실험을 통하여도 밝혀진 바와 같이 그러한 명확한 경계는 존재하지 않으며 접촉영역과 미끄러짐영역 간에 경계층이 존재하게 된다.<sup>(2)</sup> 이러한 사실은  $j_T$ 를 미분 가능한 근사식으로 변환하고 매개변수를 이용하여 이 근사식이 본래의  $j_T$ 에 무한히 가깝도록 하는 것을 가능하도록 한다. 여기에서는  $j_T$ 에 포함되어있는 미분불가성의 절대값 함수를 다음과 같은 근사식으로 치환하도록 한다.

$$\psi_\varepsilon : [L^q(\Gamma_C)]^N \rightarrow L^q(\Gamma_C)$$

$$\psi_\varepsilon(v_T) \equiv \begin{cases} |v_T| - \frac{1}{2}\varepsilon & \text{if } |v_T| \geq \varepsilon \\ \frac{1}{2\varepsilon}|v_T|^2 & \text{if } |v_T| < \varepsilon \end{cases} \quad (18)$$

이 때 주의할 점은 근사식에 사용된 매개변수  $\varepsilon$ 을 무한히 작게 하면 본래의 절대값 함수에 무한히 근접시킬 수 있다는 것이다.

이러한 근사식을 사용하여  $j_T$ 의 근사식으로서 다음과 같은 정규화 범함수를 정의할 수 있다.

$$j_{T\varepsilon} : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$$

$$j_{T\varepsilon}(u, v) = \int_{\Gamma_C} G_T(x) (u_n - g)^{m_T} \psi_\varepsilon(v_T) ds \quad (19)$$

이 근사식은 볼록함수이며 변수  $v$ 에 대해 미분 가능하다. 그리고 두 번째 변수에 대해서  $v$ 방향으로

의 부분 Gateaux 도함수는 다음과 같이 주어진다.

$$\begin{aligned} & \langle J_\epsilon(u, w), v \rangle \\ & \equiv \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{1}{\theta} \{ j_{T\epsilon}(u, w + \theta v) - j_{T\epsilon}(u, w) \} \\ & = \langle \partial_2 j_{T\epsilon}(u, w), v \rangle \\ & = \int_{\Gamma_c} c_T(x) (u_n - g)^{m_T} [\phi_\epsilon(w_T) \cdot v_T] ds \\ & \text{for all } u, v, w \in V \end{aligned} \tag{20}$$

여기에서 사용된 방향도함수  $\phi_\epsilon$ 은 다음과 같이 정의된다.

$$\begin{aligned} \phi_\epsilon : [L^q(\Gamma_c)]^N & \rightarrow L^\infty(\Gamma_c) \\ \phi_\epsilon(v_T) & = \begin{cases} \frac{1}{|v_T|} v_T & \text{if } |v_T| \geq \epsilon \\ \frac{1}{\epsilon} v_T & \text{if } |v_T| < \epsilon \end{cases} \end{aligned} \tag{21}$$

이제 이러한 근사식을 이용하여 식 (10)을 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned} & \text{Find } u_\epsilon \in V \text{ such that for all } v \in V \\ & a(u_\epsilon, v) + j_n(u_\epsilon, v) + \langle J_\epsilon(u_\epsilon, u_\epsilon), v \rangle = F(v) \end{aligned} \tag{22}$$

이 식은  $u$  대신  $u_\epsilon$ 을 사용하고 접촉경계조건을 다음과 같이 바꾸면 식 (3)~(6)과 비슷한 형태의 지배방정식과 대등하다.

$$\sigma_T(u) = -c_T(x) (u_n - g)^{m_T} \phi_\epsilon(u_T) \tag{23}$$

여기서, 주목할 점은 이러한 정규화 문제는 변분 부등식이 아닌 일반 변분식의 형태이므로 식 (10)보다 풀기가 간단하다는 것과 임의의  $\epsilon$ 에 대해 유일해가 존재하는 장점이 있다. 그러나 여기서 주의해야할 점은 과연  $u_\epsilon$ 가  $\epsilon$ 이 0으로 접근해감에 따라 식 (10)의 해  $u$ 에 수렴해 가느냐하는 것이다. 이 점에 대해서는<sup>(2)</sup>에 자세한 증명이 있으며 여기에서는 다음과 같이 그 결과만을 소개하기로 한다.

**정리 4.1**

식 (10)과 (22)의 해를 각각  $u$ 와  $u_\epsilon$ 이라 하고 다음과 같은 조건이 만족되면

$$C_K > C_1 \mu_n + C_2 t_T$$

$\epsilon$ 에 관계없이 다음과 같은 식을 만족하는 양의 상수  $C$ 가 존재한다.

$$\|u - u_\epsilon\|_{1,\Omega} \leq C\sqrt{\epsilon} \tag{24}$$

정리 4.1에 의하여  $u_\epsilon$ 은  $\epsilon$ 이 0에 접근함에 따라  $u$ 로 수렴하게된다. 즉 매개변수  $\epsilon$ 의 값을 임의로 작게 함에 따라 식 (22)는 식 (10)에 근접하게되고 각각의 해 또한 근접하게 된다.

전술한 것과 같은 방법으로 다음과 같이 식 (22)에 대한 유한요소 근사식을 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} & \text{Find } u_{eh} \in V_h \text{ such that for all } v_h \in V_h \\ & a(u_{eh}, v_h) + j_n(u_{eh}, v_h) \\ & + \langle J_\epsilon(u_{eh}, u_{eh}), v_h \rangle = F(v_h) \end{aligned} \tag{25}$$

이때 정리 4.1의 결과를 응용하면 식 (16)과 (25)의 유한요소 근사해는 다음과 같이 수렴함을 알 수 있다.

$$\|u_h - u_{eh}\|_{1,\Omega} \leq C\sqrt{\epsilon} \tag{26}$$

또한 이 정규화 문제에 대하여도 정리 3.1의 방법을 사용하여 다음과 같이 a priori 오차를 계산할 수 있다.

**정리 4.2**

$u_\epsilon \in [H^s(\Omega)]^N \cap V$ 가 식 (22)의 해이며  $u_{eh} \in V_h$ 은 유한요소 근사식 (25)의 해라고 할때 다음과 같은 조건을 만족하면

$$\begin{aligned} C_K & > C_1 \mu_n + C_4 t_T \\ (u_{eh} - g)^{m_T} & \in L^2(\Gamma_c) \end{aligned}$$

다음을 만족하는 양의 상수  $C$ 가 존재한다.

$$\begin{aligned} \|u_\epsilon - u_{eh}\|_{1,\Omega} & \leq C \frac{h^t}{p^{s-1}} \|u_\epsilon\|_{s,\Omega} \\ t & = \min\{p, s-1\} \end{aligned}$$

이제 결론적으로 본래의 식 (10)과 정규화 문제의 유한요소 근사식 (25) 각각의 해  $u$ 와  $u_{eh}$ 의 차이를 구하면 다음과 같이 표현된다.

**정리 4.3**

$u \in [H^s(\Omega)]^N \cap V$ 가 식 (10)의 해이며  $u_{eh} \in V_h$ 은 유한요소 근사식 (25)의 해라고 할때 다음을 만족하는 양의 상수  $C$ 가 존재한다.

$$\begin{aligned} \|u - u_{eh}\|_{1,\Omega} & \leq C \left( \sqrt{\epsilon} + \frac{h^t}{p^{s-1}} \|u_\epsilon\|_{s,\Omega} \right) \\ t & = \min\{p, s-1\} \end{aligned}$$

위의 결과로부터 접촉문제를 정규화하고 그 것의 유한요소 근사식을 구했을 때의 오차를 알 수 있게 되며 이러한 사실을 이용하여 유한요소해석을 수행

할 수 있다.

### 5. 수치해석

이제 이와 같이 구해진 유한요소 근사식에 대한 수치해석을 수행하도록 한다. 먼저 식 (25)를 살펴 보면 비선형 변분등식으로 표현되어있다. 또한 접촉경계에서 정의된 범함수  $J_n$ 은 비선형적인 특성을 가지고 있을 뿐만 아니라 접촉경계를 넘어 두 물체가 서로 침투하지 못하도록 하기위해  $c_n(u_n - g)^{2n}$ 를 벌칙 매개변수로 하는 벌칙함수의 의미를 가지고 있게된다.

비선형성은 일반적으로 많이 사용하는 Newton 방법을 사용하면 되겠으나  $J_n$ 을 접촉경계면을 따라 적분할 때는 주의해야하는 점으로서 벌칙 함수에 의한 과도한 구속조건으로 인해 발생하는 고정 현상이다. 보통 이러한 고정현상을 방지하기 위하여

벌칙 함수의 수치적분시 적분함수의 차수에 따라 정확한 적분을 하기위해 필요한 적분점보다 적은 개수의 적분점을 사용하는 under integration방법을 사용하기도 하는데 본 문제에서도 이와 같이 under integration방법을 사용하였다.

종래의 under integration방법은 유한요소 근사식의 적분시 가장 많이 사용되는 일반적인 Gaussian적분법을 사용하고 다만 적분함수의 차수에 따라 필요한 적분점의 개수보다 1개 또는 2개 정도를 적게 하여 사용하였다. 그러나 여기에서와 같은 접촉문제에서는 이와 같은 방법을 사용할 경우 문제가 생기게된다. 우선 접촉경계에서의 적분을 생각하기로 한다. 접촉경계에서 Gaussian적분점은 유한요소의 경계에서 요소의 절점에 위치하지 않고 내부에 있게 되기때문에 절점에서는 상호 침투가 일어나게 된다. 이와 같은 현상은 일반적으로 틈요소에서 주로 사용되는 주중개념에도 어긋나는 현상이다. 그러므로 여기에서는 각각의 절점을 적분점에 포함하는 적분법으로서 Lobatto적분법을 사용하여 under integration을 구현하였다. Table 1에는 이와 같은 Lobatto적분과 Gaussian적분을 비교하였다.<sup>(10)</sup>

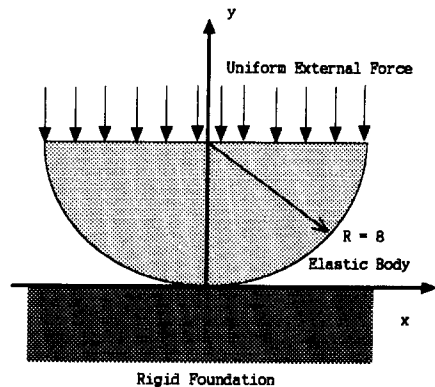
이상의 이론을 뒷받침하기 위하여 여기에서는 Fig. 1에 나타난 바와 같이 Herzian접촉의 전형적인 문제로서 탄성체의 원통이 강성체위에 접촉하는 2차원 평면 변형 접촉문제를 해석하였다. 탄성체에는 크기 100의 외부하중을 받고있으며 탄성체의 물성치로서 탄성계수  $E=2000$ , Poisson계수  $\nu=0.3$ 을 사용하였다. 정규화 매개변수  $\epsilon$ 은  $10^{-4}$ 로 충분히 작은 값을 사용하였다.

**Table 1** Comparison of gaussian and lobatto integration rules

Gaussian integration rule		
No.	$\pm r_i$	$w_i$
2	0.57735027	1.00000000
3	0.00000000	0.88888889
	0.77459667	0.55555556
4	0.33998104	0.65214515
	0.86113631	0.34785485
5	0.00000000	0.56888889
	0.53846931	0.47862867
	0.90617985	0.23692689

Lobatto integration rule		
No.	$\pm r_i$	$w_i$
2	1.00000000	1.00000000
3	1.00000000	0.33333333
	0.00000000	1.33333333
4	1.00000000	0.16666667
	0.44721360	0.83333333
5	1.00000000	0.10000000
	0.65465367	0.54444444
	0.00000000	0.71111111



**Fig. 1** Configuration of the example problem (a cylinder on a rigid foundation)

이 문제는 접촉점에서의 특이성이 접촉점으로부터의 거리  $r$ 에 대해  $\sqrt{r}$ 의 형태로 주어지게 되므로 오차의 수렴도는 전술된 정리에 의하여 유한요소의 크기  $h$ 에 대하여  $O(h^2)$ 가 된다. 또한 해의 정규도가 낮은 관계로 수렴도는 유한요소의 차수  $p$ 에 의존하지 않으며  $h$ 를 고정하고  $p$ 를 증가시키는  $p$ -method에 의한 수렴도가  $p$ 를 고정하고  $h$ 를 감소시키는  $h$ -method에 의한 수렴도보다 2배 빠른 것으로 예측할 수 있다.

해석결과는 사용되는 유한요소의 크기  $h$ 와 차수  $p$ 에 따라 Figs. 2~4에 나타나는 바와 같이 비교하였다. Fig. 2에서는  $h$ -method를 사용하여 경우의 상대오차를 나타내고있으며 Fig. 3에서는 위와 같은  $h$ -method를 사용하여 유한요소의 자유도에 따

른 상대오차를 나타낸다. Fig. 4에서는 위와는 반대로  $p$ -method를 사용한 결과로서 유한요소자유도에 따른 상대오차를 나타내고 있다. 유한요소 근사해의 수렴도는 각각의 그림에서 나타난 곡선의 기울기로부터 구해지며  $O(h^2)$ 인 것을 알 수 있다. 또한  $p$ -method를 사용하는 것이  $h$ -method를 사용하는 것에 비하여 수렴도가 2배 빠른 것으로 나타났으며 이것은 이론적인 a priori 오차 예측의 결과와 잘 일치함을 알 수 있다.

### 6. 결론

접촉문제에 있어서 범선 유연성 마찰법칙을 사용하여 변분부등식을 유도하고 이를 사용하여 유한요소해석을 수행한 결과 이론과 유한요소해석결과와 잘 일치하는 것을 알 수 있었다. 이것은 기존의 쿨롬마찰법칙에 의한 접촉문제의 해석이 지배방정식 자체가 해의 존재를 증명할 수 없음을 고려하면 상당한 차이라 할 수 있겠다. 우선 이러한 변분부등식에 의한 방법은 항상 해가 존재하며 그로 인해 유한요소해석시 비선형문제에서의 해의 수렴이 항상 보장이 되는 반면 쿨롬마찰법칙에 의한 방법은 해의 수렴이나 존재를 예측할 수가 없기 때문이다. 또한 해의 존재성을 알고있으므로 해서 변분부등식에 의한 접촉문제의 해석은 a priori 오차예측을 할 수가 있으므로 사용되는 요소의 크기와 유한요소의 차수만 알면 언제든지 접촉문제에 있어서 유한요소해석결과와 수렴도와 오차를 알 수 있다. 앞으로 접촉문제에 있어서 이러한 변분부등식을 사용하는 접근방법이 보편화되리라 기대하며 향후 hp-method와 연계한 접촉문제해석의 연구가 필요하다고 생각된다.

### 참고문헌

- (1) Kikuchi, N. and Oden, J.T., 1988, *Contact Problems in Elasticity*, SIAM, Philadelphia.
- (2) Lee, C.Y. and Oden, J.T., 1993, "A Priori Error Estimation of hp-Finite Element Approximations of Frictional Contact Problems with Normal Compliance," *International Journal of Engineering Science*, Vol. 31, No. 6, pp. 927~952.
- (3) Duvaut, G. and Lions, J.L., 1976, *Inequalities in Mechanics and Physics*, Springer, Berlin.

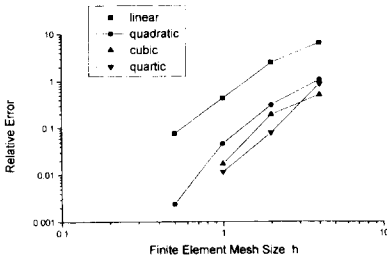


Fig. 2 Convergence rate with respect to mesh size  $h$

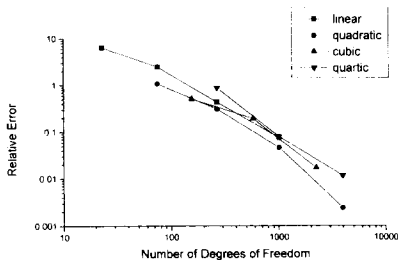


Fig. 3 Convergence rate with respect to number of degrees of freedom  $N$

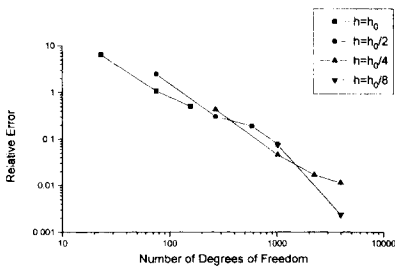


Fig. 4 Convergence rate with respect to order of elements  $p$

- (4) Demkowicz, L. and Oden, J.T., 1982, "On Some Existence and Uniqueness Results in Contact Problems with Nonlocal Friction, Nonlinear Analysis," *Theory Methods & App.*, 6, pp.1075~1093.
- (5) Rabier, P., Martins, J.A.C., Oden, J.T. and Campos, L., 1986, "Existence and Local Uniqueness of Solutions to Contact Problems in Elasticity with Nonlinear Friction Laws," *Int. J. Engng Sci.*, 24, pp. 1755~1768.
- (6) Oden, J.T. and Martins, J.A.C., 1985, "Models and Computational Methods for Dynamic Friction Phenomena," *Comp. Meth. App. Mech. Eng.*, 52, pp. 527~634.
- (7) Adams, R.A., 1975, *Sobolev Spaces*, Academic Press, New York.
- (8) Klarbring, A., Mikelic, A. and Shillor, M., 1988, "Frictional Contact Problems with Normal Compliance," *Int. J. Engng. Sci.*, 26, pp. 811~832.
- (9) Klarbring, A., Mikelic, A. and Shillor, M., 1989, "On Friction Problems with Normal Compliance," *Nonlinear Anal., TMA*, 13, pp. 935~955.
- (10) Abramowitz, M. and Stegun, I. (Eds.), 1964, *National Bureau of Standards Applied Math Series*.