

〈논 문〉

끝단에 스프링과 질량을 가진 단진보의 자유진동해석

유춘성* · 홍동표** · 정태진*** · 정길도****

(1996년 1월 23일 접수)

Free Vibration Analysis of a Stepped Cantilever Beam with a Mass and a Spring at the End

Chun-Seung Yu, Dong-Pyo Hong and Tae-Jin Chung and Kil-To Chung

Key Words : Frequency (주파수), Mode Shape (모드형상), Bernoulli-Euler Formulation (베르누이 오일러공식), Piezoelectric Bimorph Cells (압전소자)

Abstract

A cantilever beam with a mass and a spring at the end can be used to model a miniature flexible arm. It is necessary to know the natural frequencies and mode shapes to discuss its free vibration, especially when modal analysis is employed. A beam is clamped-free. In this paper we look at the lateral vibration of beams that have step changes in the properties of their cross sections. The frequency equation is derived by Bernoulli-Euler formulation and is solved by the separation of variable. The parameters of the beam, 'mass and spring stiffness' are defined as nondimensionalized parameters for wide application of the results. According to the change of a mass, a spring stiffness, and the position of the stepped part, the changes of eigenvalue and mode shape are presented for this beam. The results presented are the eigenvalues and the natural frequencies for the first three modes of vibration. Results show that the parameters have a significant effect on the natural frequencies.

1. 서 론

압전소자(piezoelectric bimorph cells)는 사람의 손가락과 같이 부드럽고 정밀한 작용을 하는 물질로서 산업현장과 실험실에서 많이 응용되고 있다. 얇은 마이크로센서(micro sensor)와 액추에이터(actuator)를 비롯하여 커다란 우주 구조물에 이르기까지 다양하게 사용된다. 이 논문의 목적은 압전소자를 액추에이터로 사용하는 유연보의 자유진동을

해석하기 위한 것이다.

압전소자와 관련된 보에 관한 연구는 주로 단면의 변화가 없는 유연보의 제어에 관하여 많이 연구되어 왔다. 이는 지금까지 단면변화가 없는 유연보에 관한 자유진동해석이 완벽하게 이루어져 왔기 때문이다. 그러나, 일반적으로 단면변화가 있는 유연보에 관한 해석은 단면보의 해석보다 어려웠기 때문에 제어에 많이 적용되어지지 않고 있었다. 그러던 중에 Chonan^(3~5)은 단면의 변화가 있는 유연보의 제어에 관한 연구를 수행하였다. 그러나, 그의 논문들은 일반적인 경우의 자유진동해석이 되어 있지 않았다. 이 논문에서는 무차원변수를 도입하여, 단면진 유연보의 자유진동 특성을 스프링상수, 선단질량, 그리고 압전소자의 접합위치의 변화에

*전북대학교 대학원 정밀기계공학과

**회원, 전북대학교 정밀기계공학과

***회원, 군산대학교 기계설계학과

****회원, 전북대학교 제어계측공학과

대하여 연구하였다. 이 결과들은 단면변화가 있는 경우의 유연보의 제어에 많은 영향을 미칠 것이라고 생각한다.

2. 이론해석

Fig. 1은 양쪽에 압전소자가 붙어 있는 유연보이다. 자유단에는 선단질량과 스프링이 매달려 있고, 압전소자는 보의 중간에 붙어 있다. 압전소자의 길이는 “a”이고, “y”방향의 보의 변위는 “y(x, t)”이다. 그리고 압전소자 부분에는 굽힘모멘트 “Mp”가 일정하게 작용한다. 이 보의 운동방정식은 다음과 같다.

$$\rho A(x) \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[EI(x) \left(1 + c \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right] = M_p [\delta'(x - L_1) - \delta'(x - L_e)] \quad (1)$$

여기에서, c는 감쇠계수, ρ는 밀도, A는 단면적, 그리고 EI는 굽힘강성이다. ρA(x), EI(x)를 상수라 하고 Mp를 0이라고 하면, 위의 식 (1)은 간단하게 아래와 같이 된다.

$$\rho A \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + EI \left(1 + c \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = 0 \quad (2)$$

단, 여기서

$$\rho A(x) = \begin{cases} (\rho A)_b & (\text{for } 0 \leq x \leq L_1 \text{ and } L_e \leq x \leq L) \\ (\rho A)_{bp} & (\text{for } L_1 \leq x \leq L_e) \end{cases}$$

$$EI(x) = \begin{cases} (EI)_b & (\text{for } 0 \leq x \leq L_1) \\ (EI)_{bp} & (\text{for } L_1 \leq x \leq L_e) \end{cases} \quad (3)$$

이 된다.

위의 식 (2)를 풀기 위하여, c가 아주 작은 값이기 때문에 0이라 하고 (Table 1과 Table 3 참

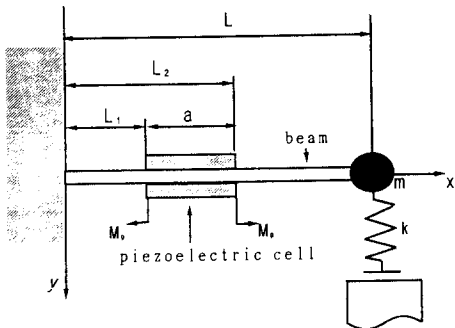


Fig. 1 Geometry of model and coordinates. (The three-stepped beam model)

조), $y = w(x) e^{i\omega t}$ 라고 가정하면,

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - \beta^{*4} w = 0 \quad (4)$$

를 얻을 수 있다.

여기에서

$$\beta^{*4} = \frac{\rho A \omega^2}{EI} \quad (5)$$

이 된다.

공간과 변위의 무차원변수를 이용하면 많은 편리한 점들이 있기 때문에 식 (4)를 무차원화하면 아래와 같은 식을 얻을 수 있다.

$$\frac{\partial^4 w(\xi)}{\partial \xi^4} - \beta^4 w(\xi) = 0 \quad (6)$$

여기에서

$$\xi = x/L, \quad \beta^4 = \frac{\rho A \omega^2 L^4}{EI} \quad (7)$$

이 된다.

계는 세 개의 일정한 단면을 가진 단순보로 가정하였기 때문에 위의 식 (6)의 해는

$$w^i(\xi) = A^i S(\beta^i \xi) + B^i T(\beta^i \xi) + C^i U(\beta^i \xi) + D^i V(\beta^i \xi) \quad [\text{단, } i=1, 2, 3] \quad (8)$$

이 된다. 여기에서 w^i 는 고정단으로부터 계산된 i번째 단면의 측면변위이고, S, T, U, V 함수는 아래와 같다.

$$S(\beta \xi) = \frac{1}{2} [\cosh(\beta \xi) + \cos(\beta \xi)]$$

$$T(\beta \xi) = \frac{1}{2} [\sinh(\beta \xi) + \sin(\beta \xi)]$$

$$U(\beta \xi) = \frac{1}{2} [\cosh(\beta \xi) - \cos(\beta \xi)]$$

$$V(\beta \xi) = \frac{1}{2} [\sinh(\beta \xi) - \sin(\beta \xi)] \quad (9)$$

미지수 A^i 로부터 D^i 까지와 고유치 β^j (j=1, 2, 3)는 계의 경계조건으로부터 구할 수 있다. 여기서 j는 모드이다. 일반적인 단면진보의 경계조건은 단면변화가 없는 단면보와 달리 전단력성분과 모멘트성분에 굽힘강성의 비를 곱해주어야 하므로 변형된 경계조건은 아래와 같다.⁽¹⁾

$\xi=0$ 일 때

$$w^1(0) = 0, \quad \frac{dw^1(0)}{d\xi} = 0$$

$\xi = l_1$ 일 때

$$\begin{aligned} w^1(l_1) &= w^2(l_1) \\ \frac{dw^1(l_1)}{d\xi} &= \frac{dw^2(l_1)}{d\xi} \\ \frac{d^2w^1(l_1)}{d\xi^2} &= \alpha^4 \frac{d^2w^2(l_1)}{d\xi^2} \\ \frac{d^3w^1(l_1)}{d\xi^3} &= \alpha^4 \frac{d^3w^2(l_1)}{d\xi^3} \end{aligned}$$

$\xi = l_2$ 일 때

$$\begin{aligned} w^2(l_2) &= w^3(l_2) \\ \frac{dw^2(l_2)}{d\xi} &= \frac{dw^3(l_2)}{d\xi} \\ \alpha^4 \frac{d^2w^2(l_2)}{d\xi^2} &= \frac{d^2w^3(l_2)}{d\xi^2} \\ \alpha^4 \frac{d^3w^2(l_2)}{d\xi^3} &= \frac{d^3w^3(l_2)}{d\xi^3} \end{aligned}$$

$\xi = 1$ 일 때

$$\begin{aligned} \frac{d^2w^3(1)}{d\xi^2} &= 0 \\ \frac{d^3w^3(1)}{d\xi^3} &= (K - M\beta^4) w^3(1) \end{aligned} \tag{10}$$

여기서, α 는 단면변화가 있는 부분의 굽힘강성의 비이다. 그리고,

$$\begin{aligned} \alpha &= \left[\frac{(EI)_b}{(EI)_{bp}} \right]^{1/4} \\ l_1 &= \frac{L_1}{L}, \quad l_2 = \frac{L_2}{L} \\ M &= \frac{m}{(\rho A)_b L}, \quad K = \frac{kL^3}{(EI)_b} \end{aligned} \tag{11}$$

가 된다.

식 (10)을 식 (6)에 대입하면 계산하면 A_1, B_1 은 0이 되므로, 위의 경계조건은 아래와 같은 행렬식으로 식 (6)를 나타낼 수 있다.

$$TX = 0 \tag{12}$$

여기에서 T 행렬을 10×10 행렬이고 X 행렬은 아래와 같이 나타낼 수 있고

$$\begin{aligned} T &= \begin{bmatrix} U(\theta, \beta, \xi_1) & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \\ X &= [C_1 \ D_1 \ A_2 \ B_2 \ C_2 \ D_2 \ A_3 \ B_3 \ C_3 \ D_3]^T \end{aligned} \tag{13}$$

여기에서

$$\varphi = \left[\frac{(\rho A)_b}{(\rho A)_{bp}} \right]^{1/4}, \quad \theta = \frac{\varphi}{\alpha} \tag{14}$$

이 된다.

식 (12)를 만족하는 nontrivial solution X 를 얻기 위한 조건식 $\det(T) = 0$ 의 해 β 를 구하면 고유치를 얻을 수 있고, 고유치 β 를 식 (7)에 대입하면 고유진동수를 얻을 수 있다.

$$w = \frac{\beta^2}{L^2} \left[\frac{EI_{bp}}{(\rho A)_{bp}} \right]^{1/2} \tag{15}$$

고유치 β 를 식 (8)에 대입하면 모드함수 $w^i(x)$ 를 얻을 수 있다.

3. 시뮬레이션 결과

시뮬레이션은 Chonan의 결과^(3~5)와 비교하기 위하여 l_1 이 0과 0.0593인 두 가지 모델을 가지고 수행되어졌다. 여기에서는 세 번째 모드까지만을 고려하였다.

3.1 경우 1($l_1=0$ 인 경우)

시뮬레이션한 첫 번째 모델은 $l_1=0$ 인 경우인데 어린 경우에 단면의 변화가 한번 있게 된다. Fig. 2는 시뮬레이션한 모델을 보여주고 있다. Table 1은 사용된 모델의 물성치이다.

Fig. 3은 M 이 3.033(무차원)이고 스프링상수가 0에서 1000까지 변화하는 경우의 고유치와 고유진동수의 변화를 보여주고 있다. 첫 번째 고유치는 스프링상수에 따라 변하고, 나머지 2개의 것은 거의 변하지 않는 것을 알 수 있다. 그리고 $K=0$ 일 때 첫 번째 고유진동수는 71.6 Hz이고, 두 번째 고유진동수는 596.9 Hz인데, 이 결과는 Chonan의 결과^(3,4)와 잘 일치한다는 것을 Table 2를 통하여 알 수 있다.

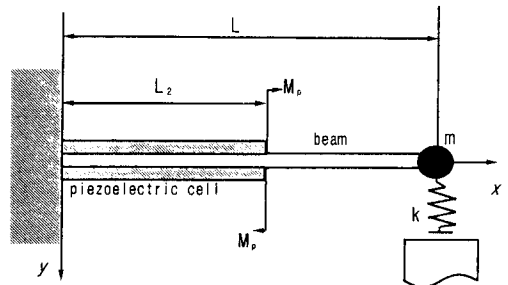


Fig. 2 The two-stepped beam model

Table 1 Physical parameters of bimorph cell and beam (two-stepped)

Beam	Piezoelectric cell
L(length)=51.9 mm	a(length)=33.3 mm
b(width)=12.2 mm	b(width)=12.2 mm
h_b (height)=0.3 mm	h_p (height)=0.65 mm
$\rho_b=8.67 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$	$\rho_p=8.3 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$
$E_b=102.5 \times 10^9 \text{ N/m}^2$	$E_p=58.03 \times 10^9 \text{ N/m}^2$

Spring stiffness= $2.11 \times 10^9 \text{ N/m}$
 $m=5.05 \text{ g}$, $c=4.05 \times 10^{-5} \text{ sec}$
 $\psi=0.6630$, $\alpha=0.328$, $l_1=0$, $l_2=0.6416$

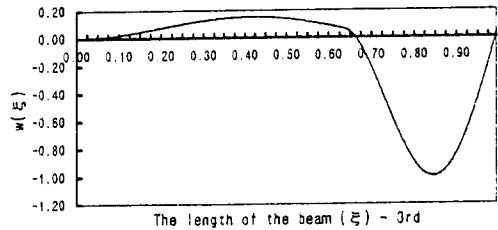
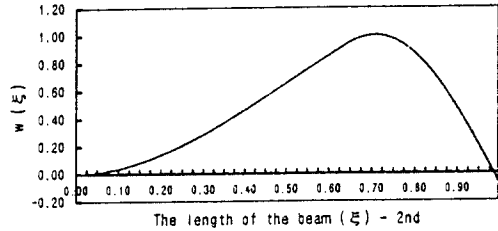
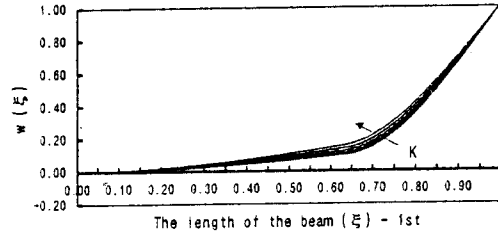


Fig. 4 Mode shape for Fig. 3. ($M=3.033$)

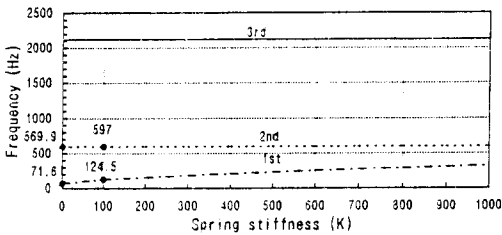
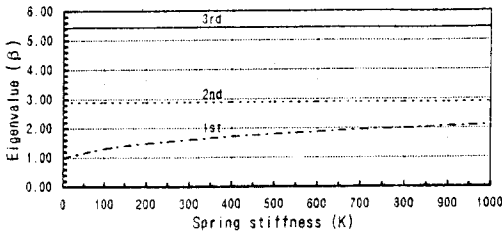


Fig. 3 Eigenvalues and frequencies versus spring stiffness : $M=3.033$

Fig. 4는 M 이 3.033이고 K 가 0에서 1000까지 변할 때의 모드형상(mode shape)을 그려보았다. Fig. 3과 마찬가지로 첫 번째 경우에만 모드형상의 변화만 있고, 두 번째, 세 번째 경우에는 K 의 증가에도 불구하고 모드형상은 거의 변화가 없음을 알 수 있다.

Fig. 5는 K 가 104.9(무차원)이고, 선단질량이 0에서 3.2까지 변할 때의 고유치와 고유진동수의 변화를 보여주고 있다. 선단질량이 0.2보다 작은 경우에는 고유치는 급격히 감소하게 되고, 선단질량이 0.2보다 큰 경우에는 고유치의 변화가 거의 없게 된다. M 이 3.033일때의 첫 번째 고유진동수는 124.5 Hz이고, 두 번째 고유진동수는 597 Hz인데,

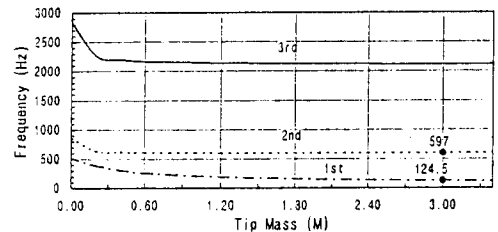
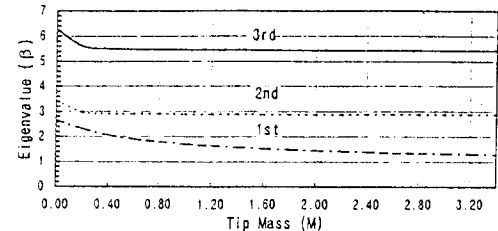


Fig. 5 Eigenvalues and frequencies versus tip mass : $K=104.9$

이 결과는 Chonan의 결과^(3,4)와 잘 일치한다는 것을 Table 2를 통하여 잘 알 수 있다.

Fig. 6은 M 이 0, 0.15, 0.6, 3.033때 모드형상을 보여주고 있다. 선단질량이 작은 구간에서는 모드

형상이 많이 변하지만, 0.15를 넘어갈 경우에는 거의 변화가 없다.

Figs. 7, 8은 M이 0, 0.3, 3.033이고 K가 0에서 1000까지 변할 때의 고유치와 고유진동수의 변화를 보여주고 있다. 여기서, M과 모드수(mode number)가 증가하게 됨에 따라 고유치 및 고유진동수의 변화는 거의 없다는 것을 알 수 있다.

3.2 경우 2($l_1=0.0593$, l_1 이 변하는 경우)

시뮬레이션한 두 번째 모델은 $l_1=0.0593$ 과 l_1 이

Table 2 The comparison of frequencies between our result and S. Chonan's result

Case	Mode	Present result		Ref. (3)	
		Theory	Exp.	Theory	Exp.
M=3.066 K=0	1st	71.6		71.5	71.5
	2nd	596.9		596	
M=3.066 K=104.9	1st	124.5		123	
	2nd	597		596	

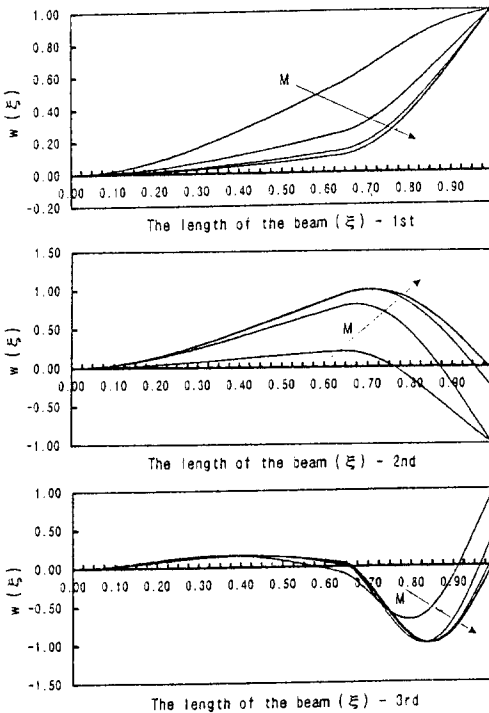


Fig. 6 Mode shape for Fig. 5. (M = 0, 0.15, 0.6 and, 3.033, K=104.9)

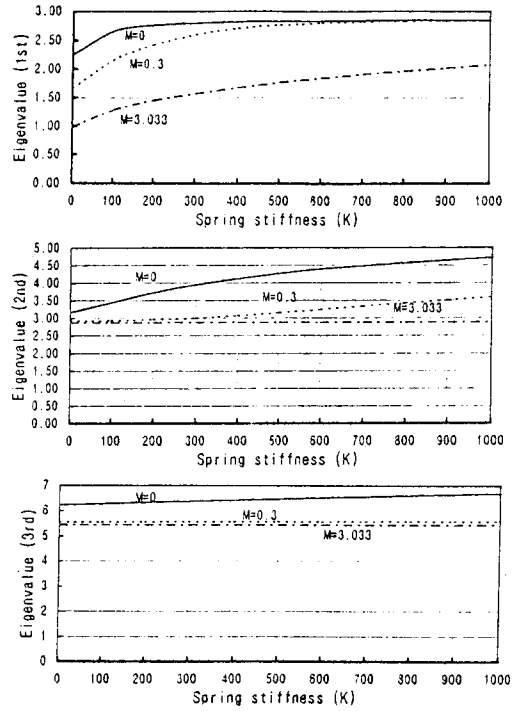


Fig. 7 Eigenvalues versus spring stiffness. (M = 0, 0.3, 3.033)

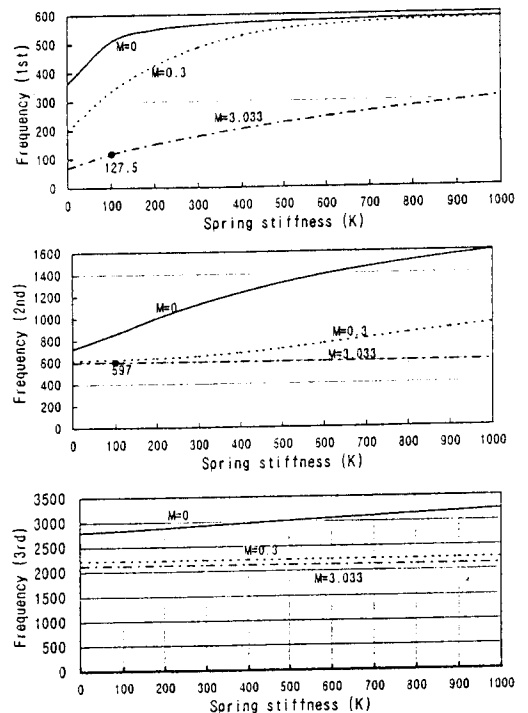


Fig. 8 Frequencies versus spring stiffness. (M = 0, 0.3, 3.033)

변하는 3개의 단진면을 가지고 있는 모델이다. Fig. 1은 모델을 보여주고 있다. Table 3은 사용된 보의 물성치를 나타낸다.

Fig. 9는 M이 1.628 그리고 l_1 이 0.0593일 때 K가 변함에 따른 고유치와 고유진동수의 변화를 나타낸다. 첫 번째, 두 번째 고유치는 K가 증가하게 됨에 따라 증가하는데, 첫 번째 고유치의 경우는 K가 400까지 변하고, 두 번째 고유치의 경우는 K

Table 3 Physical parameters of bimorph cell and beam (three-stepped)

Beam	Piezoelectric cell
L (length) = 168.4 mm	a (length) = 40.9 mm
b (width) = 12.2 mm	b (width) = 12.2 mm
h_b (height) = 0.3 mm	h_b (height) = 0.65 mm
$\rho_b = 8.67 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$	$\rho_p = 7.8 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$
$E_b = 102.47 \times 10^9 \text{ N/m}^2$	$E_p = 58.03 \times 10^9 \text{ N/m}^2$

$L_1 = 10 \text{ mm}$, $m = 8.7 \text{ g}$, $c = 4.08 \times 10^{-4} \text{ sec}$
 $\phi = 0.6721$, $\alpha = 0.328$, $l_1 = 0.0593$, $l_2 = 0.3023$

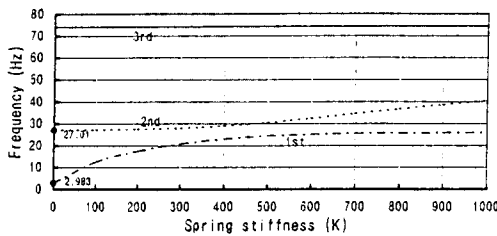
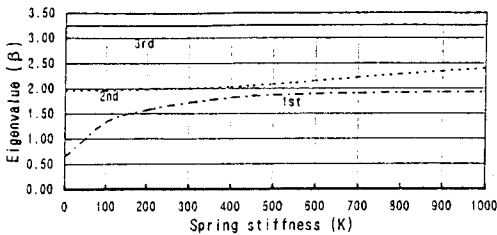


Fig. 9 Eigenvalues and frequencies versus spring stiffness ; $M=1.628$, $l_1=0.0593$

Table 4 The comparison of frequencies between our result and S. Chonan's result

Mode	Present result		Ref. (3)	
	Theory	Exp.	Theory	Exp.
1st	2.983		2.97	2.85
2nd	27.01		27.0	26.0

가 400부터 증가하게 된다. 세 번째 고유치는 거의 변화가 없음을 보여준다. K가 0일 때의 첫 번째 고유진동수는 2.983 Hz이고, 두 번째 고유진동수는 27.01 Hz인데, 이 결과는 Chonan의 결과⁽⁵⁾와

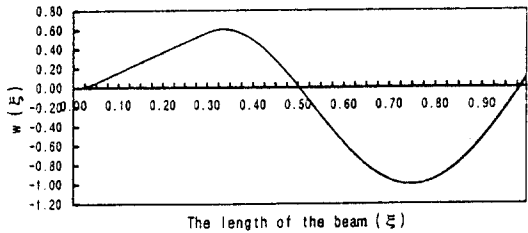
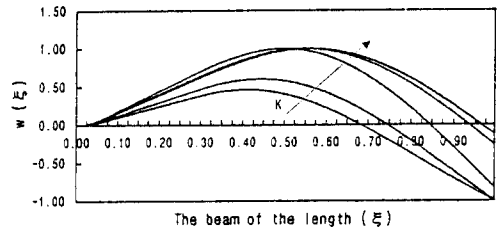
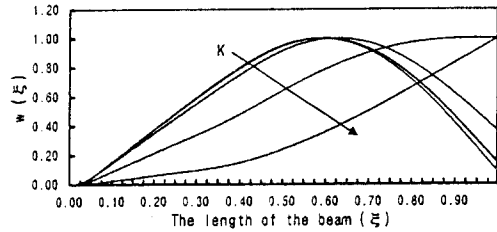


Fig. 10 Mode shape for Fig. 10. ($M = 1.628$, $l_1 = 0.0593$)

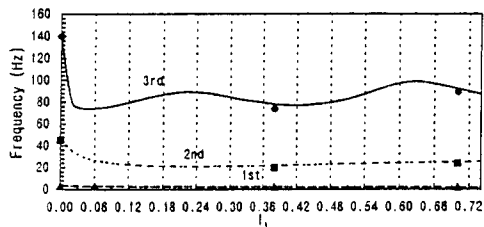
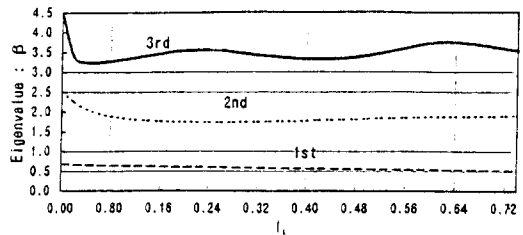


Fig. 11 Eigenvalues and frequencies versus l_1 ; $M = 1.628$, $K=0$. (■, ●, ▲ : Chonan's result)

Table 5 The comparison of the first three frequencies for l_1 between our result and S. Chonan's result

Case	l_1	Mode	Frequency (Hz)	
			Present	Ref. (3)
1	0.0	1st	3.2431	3.24
		2nd	45.2216	45.15
		3rd	141.1685	139.87
2	0.0593	1st	2.9822	2.97
		2nd	27.0045	
		3rd	74.0207	
3	0.38	1st	2.2507	2.21
		2nd	78.0338	19.57
		3rd	21.8540	73.62
4	0.7	1st	1.8892	1.79
		2nd	24.8888	23.60
		3rd	92.2706	89.23

잘 일치한다는 것을 Table 4를 통하여 잘 알 수 있다.

Fig. 10은 Fig. 9에 대한 모드형상을 보여주고 있다. K 가 매우 크게 되면 끝점의 변화가 거의 없다는 것을 알 수 있다.

Fig. 11은 M 이 1.628이고, K 가 0일 때 l_1 이 0에서 0.757까지 변할 때 고유치와 고유 진동수의 변화를 나타낸다. 여기서는 첫 번째 고유치는 거의 변화가 없다는 것을 알 수 있고, 두 번째나 세 번째 고유치는 l_1 이 0.03보다 작을 경우에 급격히 감소한다는 것을 알 수 있다. 세 번째 고유치의 경우는 특이하게 고유치의 변화가 sin함수 형태의 변화를 보인다. 그림상의 점들은 Chonan의 결과들⁽³⁾인데 약간의 차이가 있음을 알 수 있다. Table 5는 이 값들을 보여주고 있다.

4. 결 론

이 논문은 단진 유연보의 이론적, 수치적 해석을 하였다. 시뮬레이션을 통하여 얻은 결과는 Chonan의 결과^(3~5)와 거의 잘 일치한다는 것을 알 수 있다. 이 결과를 통하여 얻은 결론은 아래와 같다.

(1) 무차원변수를 이용한 고유치와 모드형상을 얻기 위한 수치 프로그램을 개발하였다.

(2) 선단질량과 스프링상수는 고유치의 변화에 크게 영향을 끼침을 알 수 있었다. 그 중에서도 첫 번째 고유치에 크게 영향을 끼친다는 것을 알 수 있었다.

(3) 단의 길이 l_1 은 첫 번째 고유치에는 거의 영향을 주지 않고, 두 번째, 세 번째 고유치에 영향을 끼침을 알 수 있었다.

참고문헌

- (1) Daniel J. Gorman, *Free Vibration Analysis of Beams and Shafts*, John Wiley & Sons. pp. 289~358
- (2) Robert D. Blevins, *Formulas for Natural Frequency and Mode Shape*, Van Nostrand Reinhold Company. p. 101~202.
- (3) Jiang, Z. W., Chonan, S. and Sakuma, S., 1993, "Force Control of a Miniature Gripper Driven by Piezoelectric Bimorph Cells," *JSME (C)*, Vol. 59(557) p. 150.
- (4) Chonan, S., Sato, H. and Ziang, Z. W., 1991, "End-Point Holding Control of a Miniature Flexible Robotic Arm Driven by Piezoelectric Cells," *JDME*, Vol. 26(11) p. 551.
- (5) Jiang, Z. W. Chonan, S. and Tani, J., 1990, "Control of a Flexible Arm Using Piezoelectric Bimorph Cells," *JSME (C)* Vol. 56(522) (1990-2) p. 416.