

〈논 문〉

호몰로지 제한조건을 이용한 다중하중하의 트러스 최적설계

이권희* · 김경근* · 심진욱** · 박경진***

(1996년 1월 8일 접수)

Truss Optimization Using Homology Constraints under Multiple Loadings

Kwon-Hee Lee, Kyung-Keun Kim, Jin-Wook Shim and Gyung-Jin Park

Key Words : Homologous Deformation(호몰로지 변형), Generalized Inverse Matrix(일반역행렬), Multiple Loading Condition(다중하중조건), Homology Index(호몰로지지수)

Abstract

The deformation of a structure shall be called homologous, if a given geometrical relation holds, for a given number of structural points, before, during, and after the deformation. Some researchers have utilized the idea on structural design with finite element method. The approaches use the decomposition of the FEM equation or equality equations to obtain homologous deformation. However, weight reduction and response constraints such as stress, displacement or natural frequency cannot be considered by those theories. An optimization method solving the above problems is suggested to gain homologous deformation. Homology constraints can be considered under multiple loading conditions as well as a single loading condition. Homology index is defined for the multiple loading conditions. Examples are solved to present the performances of the method.

1. 서 론

대부분의 구조설계에서는 역학적으로 변형 및 응력 등의 제한조건을 만족하는 설계변수를 결정하는데 목적을 두고 있으며, 근래에 와서는 비용절감 및 컴퓨터에 의한 자동설계를 위하여 많은 기법이 개발되어 응용되고 있다. 구조물 설계시 그 특성상 기하학적 형상이 제한조건이 될 수 있는 경우가 존재한다. 예를 들면, 지구국 위성안테나 또는 대형 망원경의 주반사판 설계^(1,2) 돔(dome) 구조물 설계 및 정반설계^(3~6) 등이 있다. 1967년 미국의

Hoerner는 대형 망원경을 연구하면서 기하학적 형상이 제한조건이 될 수 있는 구조물의 호몰로지 설계에 대한 개념을 정립하였다.⁽⁷⁾ 호몰로지 설계는 호몰로지 변형을 구현할 수 있는 설계변수의 해를 찾는 것이다. 호몰로지 변형은 초기상태에 일정한 기하학적 형상을 지니고 있는 구조물 또는 그 일부의 군(family)이 하중작용후에 동일 형상의 군으로 변형되는 것을 의미한다.

호몰로지 설계는 특정 반응치가 요구되는 구조물의 등장과 더불어 80년대 말부터 많은 연구가 진행되고 있는데 이들은 대부분 유한요소법과 연계하여 그 이론을 재구성하였다.^(3~6) 이 방법에서는 전체 자유도를 호몰로지 변형을 만족해야 하는 종속자유도와 만족할 필요가 없는 독립자유도로 분리하여 두 자유도 사이의 관계를 제약행렬(constraint matrix)로써 정의하였다. 그리고 제약행렬에 의해

*회원, 한양대학교 대학원 기계설계학과

**진영테크놀로지

***회원, 한양대학교 기계공학과

유한요소법의 지배방정식을 분할한 후 테일러급수 전개를 하고 무어-펜로즈(Moore-Penrose)의 일반 역행렬⁽⁸⁾을 이용하여 설계변수가 수렴할 때까지 설계변화량을 구하였다. 그러나 위의 방법은 유한요소법의 지배방정식에서 강성행렬 및 힘벡터를 분할해야 하는 비효율성이 존재한다.

호몰로지 설계에 대한 다른 방법으로는 알의 단점을 해결하기 위하여 독립자유도와 종속자유도의 관계식을 등제한조건함수(equality constraints)로 정의함으로써 그 변화량이 계속 등제한조건을 만족하도록 하여 설계변수를 찾는 방법이다.^(1,2) 이 방법은 기존 연구의 단점인 강성행렬의 분할과정이 없고 설계변수에 대한 변위의 변화량만을 계산하므로 알고리즘이 단순화되며 독립자유도와 종속자유도 사이의 관계를 수식적으로 표시할 수 있다면 쉽게 해를 구할 수 있다. 그러나 이러한 방법은 최적화의 개념을 도입하지 않고 단지 호몰로지 변형을 만족시키는데 목적을 두고 있으므로 중량의 최소화 및 역학적인 제한조건의 처리가 곤란하다.

본 연구에서는 최적화기법을 적용하여 목적함수로 중량을, 등제한조건으로 호몰로지 변형에 대한 기하학적인 제한조건을, 그리고 부등제한조건으로 역학적인 반응치를 고려하였다. 기존의 호몰로지 설계방법에서는 단일하중(single loading) 조건만을 고려할 수 있었으나 이것은 호몰로지기법을 구조물 설계에 적용할 경우 설계 적용범위가 매우 제한적일 가능성이 있다. 최적화정식을 이용한 방법에서는 다중하중(multiple loading)조건하에서 호몰로지 설계가 가능하도록 최소자승법을 이용한 호몰로지 지수를 개발하였다. 호몰로지지수는 문제의 중요도에 따라 호몰로지 설계의 완성도를 조절할 수 있는 장점이 있다. 다중하중이 작용하는 문제에서 호몰로지 변형에 대한 제한조건의 수는 하중조건의 수와 동일하다. 따라서 다중하중의 각 하중조건에 대하여 호몰로지 변형을 만족시키는 해를 구할 수 없는 경우가 존재할 수 있다. 이러한 문제는 비록 엄밀해를 구할 수는 없지만 호몰로지지수에 대한 한계값과 부등제한조건을 만족하면 호몰로지 설계가 구현된 것으로 간주한다.

제시된 최적화정식에 의한 호몰로지 설계법을 이용하면 역학적인 제한조건을 만족하면서 구조물의 중량을 최소화시키는 설계해를 구할 수가 있으며 다중하중하에서도 호몰로지 설계가 가능한 장점이 있다. 본 연구와 기존연구의 호몰로지 만족도 및

중량감소 등을 비교하기 위하여 각 방법을 7바(seven-bar) 및 안테나 설계문제에 적용하였다. 그리고 다중하중조건하에서 호몰로지 설계법을 200바(two-hundred-bar) 및 안테나 설계문제에 적용하여 그 성능을 검토하였다. 각 문제의 최적해는 IDESIGN3 프로그램에 내장되어 있는 반복이차계획(recursive quadratic programming) 알고리즘^(9,10)을 이용하여 구하였다.

2. 호몰로지 설계법

호몰로지 설계는 설계자가 구조물의 일부나 구조물 전체의 변형 또는 고유진동수 등을 미리 예측하여 이러한 반응치가 얻어지도록 설계변수를 결정하는 기법이며 구조물 일부의 변형을 예측하는 경우에는 기하학적인 제한조건이 상수, 선형함수 또는 비선형 함수가 가능하다. 기존의 호몰로지 설계법인 지배방정식을 분할하는 방법과 등제한조건함수를 이용한 방법에 대해 요약하면 다음과 같다.

2.1 지배방정식을 분할하는 호몰로지 설계

정적문제에서 유한요소법으로 표현된 계의 지배방정식은 다음으로 표시할 수 있다.

$$[K]\{U\}=\{f\} \quad (1)$$

여기서, $[K]$ 는 강성행렬, $\{U\}$ 는 변위벡터, 그리고 $\{f\}$ 는 외력벡터를 의미한다. 변위 $\{U\}$ 는 호몰로지 변형의 제한을 받는 성분인 종속자유도에 관한 변위 $\{U_d\}$ 와 제한을 받지않는 성분인 독립자유도에 관한 $\{U_i\}$ 로 분리하면 그 관계식은 다음과 같이 표시된다.

$$\{U_d\}=[C]\{U_i\} \quad (2)$$

$[C]$ 는 문제의 성격에 따라 종속자유도와 독립자유도를 결정할 후 설계자가 작성해 주는 제약행렬으로서 그 크기는 N_d (종속자유도 수), N_i (독립자유도 수)이다.

이 식에 의하여 지배방정식을 재구성하여 분할하면 다음과 같이 표시된다.

$$[K_s]\{U_i\}=\{f_i\} \quad (3)$$

$$[K_r]\{U_i\}=\{f_d\} \quad (4)$$

여기서, $[K_s]=[K_{ii}]+[K_{id}]+[K_{id}][C]$, $[K_r]=[K_{di}]+[K_{dd}][C]$ 그리고 K_{ii} , K_{id} , K_{di} , K_{dd} ,

f_i , f_a 는 $\{U_i\}$, $\{U_a\}$ 의 분할에 의해 분리된 $[K]$ 및 $\{f\}$ 의 성분이다. 식 (3)에서 $[K_s]$ 의 크기는 $N_i \times N_i$ 이며, 식 (4)에서 $[K_r]$ 의 크기는 $N_a \times N_i$ 가 된다. 따라서 임의의 설계치에 대하여 식 (3)은 유일한 $\{U_i\}$ 의 해를 갖고 있지만 그 해가 반드시 식 (4)를 만족시키지 않는다. 식 (4)에서 각 항을 1차의 테일러급수 전개하여 대입하고 2차 이상의 항을 무시하면 다음식과 같이 표시할 수 있다.

$$\begin{aligned} & \sum_{i=0}^M ([K_r]\{\bar{U}_i\} + [\bar{K}_r]\{U_i\}) \delta b_j \\ & = \{f_a\} - [\bar{K}_r]\{\bar{U}_i\} \end{aligned} \quad (5)$$

여기서, M 은 설계변수의 수, $[K_r]$ 는 설계변수의 변화에 따른 $[K_r]$ 의 변화량, $\{U_i\}$ 는 설계변수의 변화에 따른 $\{U_i\}$ 의 변화량, 그리고 δb_j 는 설계변수의 변화량이며 각 항의 기호 -는 현재 설계점에서의 값을 의미한다. 식 (5)에서 계수행렬은 정방행렬이 아니고, $N_a \times M$ 의 크기를 가지므로 해는 무수히 많이 존재한다. 그러나 무어-펜로즈의 일반 역행렬을 이용하면 현재 설계점으로부터 설계변수의 변화량을 최소로 하는 유일해를 구할 수 있다. 식 (5)에서 δb_j 가 구해지면 설계변수는 다음과 같이 대치된다.

$$b_j = b_j + \delta b_j, \quad j=1, M \quad (6)$$

식 (6)이 수렴조건을 만족하면 호몰로지 설계가 구현된 것이다.

2.2 등제한조건함수를 이용한 호몰로지 설계

강성행렬 및 변위벡터를 분할하지 않으면서 설계해를 구하기 위하여 독립자유도와 종속자유도 사이의 관계식을 등제한 조건함수로 설정하여 호몰로지 설계를 실현하는 알고리즘이다.^(1,2) 이 방법을 이용하면 계의 지배방정식을 분할하는 과정이 없으므로 설계변수의 변화에 따른 강성행렬 및 변위벡터의 변화량을 보다 효율적으로 구할 수 있다. 식 (2)의 독립자유도와 종속자유도의 관계로부터 등제한조건함수벡터, E 는 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$E = \{U_a\} - [C]\{U_i\} \quad (7)$$

식 (7)은 설계변수의 미소변화 후에도 만족되어야 하는 조건이므로, 다음 식도 역시 성립해야 한다.

$$E + \delta E = 0 \quad (8)$$

식 (7)을 식 (8)에 대입하고 이것을 행렬식으로 바꾸면 다음과 같이 표시할 수 있다.

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} \frac{\partial U_{d1}}{\partial b_1} & \dots & \frac{\partial U_{d1}}{\partial b_M} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial U_{Nd}}{\partial b_1} & \dots & \frac{\partial U_{Nd}}{\partial b_M} \end{bmatrix} - [C] \\ & \begin{bmatrix} \frac{\partial U_{i1}}{\partial b_1} & \dots & \frac{\partial U_{i1}}{\partial b_1} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial U_{Ni}}{\partial b_M} & \dots & \frac{\partial U_{Ni}}{\partial b_M} \end{bmatrix} \delta b \\ & = [C]\{U_i\} - \{U_a\} \end{aligned} \quad (9)$$

이 식을 간단히 하면 다음과 같이 표시할 수 있다.

$$[A]\delta b = \{F_{res}\} \quad (10)$$

여기서,

$$\begin{aligned} [A] &= \begin{bmatrix} \frac{\partial U_{d1}}{\partial b_1} & \dots & \frac{\partial U_{d1}}{\partial b_M} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial U_{Nd}}{\partial b_1} & \dots & \frac{\partial U_{Nd}}{\partial b_M} \\ \frac{\partial U_{i1}}{\partial b_1} & \dots & \frac{\partial U_{i1}}{\partial b_M} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial U_{Ni}}{\partial b_1} & \dots & \frac{\partial U_{Ni}}{\partial b_M} \end{bmatrix} - [C] \\ \{U_a\} &= [U_{d1}, U_{de}, \dots, U_{Nd}]^T \\ \{U_i\} &= [U_{i1}, U_{ie}, \dots, U_{Ni}]^T \\ \{F_{res}\} &= [C]\{U_i\} - \{U_a\} \end{aligned} \quad (11)$$

식 (10)의 해 중 변화량이 제일 작은 해는 무어-펜로즈의 역행렬을 이용하여 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\delta b = [A]^{-1}\{F_{res}\} \quad (12)$$

즉, 식 (10)의 해는 무어-펜로즈의 일반역행렬을 이용하므로 설계변수의 초기치로부터 변화량이 제일 작은 해를 구하게 된다. 외력벡터 $\{F_{res}\}$ 가 영이 된다면 그 때의 설계변수 값이 그 구조물의 호몰로지 변형을 실현하는 해가 되는 것이다. 즉, 식 (12)에서 설계변수의 변화량이 영이 될 때까지 이 과정을 반복하게 된다.

3. 최적화기법에 의한 호몰로지 설계

앞장에서 기술된 호몰로지 설계법의 특징은 주어진 기하학적인 제한조건을 만족하도록 설계변수를 초기값으로부터 최소한 변화시키면서 해를 찾아내는 것이다. 기존의 호몰로지 설계는 무어-펜로즈의 일반역행렬을 이용하여 초기치로부터 변화가 제일 작은 해를 찾아낼 수 있지만 그 해는 변위 및 응력 등의 역학적인 제한조건을 위배할 수 있다. 본 연구에서는 호몰로지 변형 및 응력 등의 제한조건을 만족시키면서 요구되는 성능을 극대화시키기 위하여 최적화기법을 호몰로지 설계에 적용하는 방법을 개발하였다. 경제적인 설계를 구현하기 위하여 최적화과정에서 목적함수는 중량으로 설정하였다. 기존의 호몰로지 변형에 대한 제한조건은 최적화 과정에서 등제한조건으로 설정하였으며 변형 및 응력 등의 역학적인 제한조건은 부등제한조건으로 고려하였다. 기존의 호몰로지 설계에서는 식 (5) 및 식 (10) 으로 구성되는 연립방정식으로부터 해를 구하기 때문에 다중하중하에서는 호몰로지 변형을 만족하는 해를 구하기가 불가능하다. 따라서 이 설계법은 호몰로지 설계가 요구되는 구조물에서 단일하중이 작용하는 경우에만 적용 가능하다. 그러나 구조물 설계에서 다중하중조건을 고려해야 하는 경우가 존재한다.

다중하중조건 문제에서 호몰로지 변형에 대한 제한조건은 하중조건 수만큼 부여되므로 문제에 따라 호몰로지 설계가 불가능할 수 있다. 그러나 다중하중하에서 기하학적인 제한조건을 만족하는 해가 존재하지 않는다면 존재하지 않는 범위에서 가장 근접된 해를 찾을 수 있는 방법이 필요하다. 이것을 위해 최소자승법에 의한 호몰로지지수를 개발하였다. 호몰로지지수의 한계값과 부등제한조건을 만족하면 호몰로지 설계가 구현된 것으로 간주하기 때문에 다중하중조건하에서는 이 값에 의하여 호몰로지 설계가 구현되는 정도를 조절할 수 있다. 단일하중조건 문제의 수렴조건은 최적화 알고리즘의 수렴조건을 이용하며 다중하중조건 문제의 수렴조건은 호몰로지지수를 이용한다.

3.1 최적설계의 정식화

호몰로지 변형에 대한 제한조건은 최적설계의 정식화 과정에서 등제한조건함수로 취급하며 목적함

수 및 부등제한조건은 각각 구조최적설계에서 설정되는 중량 및 역학적인 제한조건이다. 이것을 위한 정식화는 다음과 같다.⁽¹⁰⁻¹²⁾

$$\begin{aligned} \text{Minimize} & : \Psi_0(\mathbf{u}, \mathbf{b}) \\ \text{Subject to} & : \mathbf{h}(\mathbf{u}, \mathbf{b}) = \mathbf{K}\mathbf{u} - \mathbf{f} \\ & \mathbf{h}(\mathbf{u}, \mathbf{b}) = \mathbf{0} \\ & \Psi(\mathbf{u}, \mathbf{b}) \leq 0 \end{aligned} \quad (13)$$

여기서, Ψ_0 는 목적함수로서 중량을, \mathbf{h} 는 구조물의 지배방정식을 의미하며 \mathbf{u} , \mathbf{b} 는 각각 상태변수와 설계변수를 표시한다. \mathbf{h} 는 호몰로지 변형에 대한 등제한조건, Ψ 는 변위 및 응력에 대한 부등제한조건을 의미한다. 호몰로지 변형에 대한 등제한조건함수는 문제의 성격에 따라 작성이 되며 다중하중조건에서 등제한조건함수는 하중조건 수만큼 구성된다. 제시된 방법에서는 기하학적인 제한조건을 수식으로 표현하기만 하면 되므로 기하학적인 제한조건을 종속자유도와 독립자유도의 관계식으로 구성할 필요가 없다. 또한 식 (2) 또는 식 (7)에서 종속자유도와 독립자유도의 관계식이 선형적으로 표시되어야 하지만 식 (13)의 등제한조건에서는 이에 대한 제한이 없으므로 보다 정도 높은 해를 구할 수 있다.

3.2 호몰로지지수

다중하중이 작용하는 구조물의 설계에서는 각 하중조건에 대하여 호몰로지 변형을 만족시킬 수 없는 문제가 있다. 이 경우에 최적화과정에서 사용되는 수렴조건으로는 호몰로지 설계의 구현 정도를 표현하기가 불가능하다. 이것을 위해 최소자승법을 도입한 호몰로지지수를 작성하여 설계의 완성도를 조절한다.

(x_i, y_i) , $i=1, \dots, l$ 를 호몰로지 변형에 대한 제한을 받는 l 개의 절점이라고 하면 호몰로지 설계에 의하여 완성되는 곡선방정식을 다음과 같이 가정할 수 있다.⁽¹³⁾

$$\begin{aligned} f(x_i) &= a_0 + a_1x_i + a_2x_i^2 + \dots + a_nx_i^n \\ i &= 1, \dots, l \end{aligned} \quad (14)$$

n 은 호몰로지 변형을 얻기 위한 다항식의 차수이다. 평면구조물(planar structure)의 호몰로지지수, HI 는 다음과 같이 정의된다.⁽¹⁴⁾

$$HI = \sum_{i=1}^l (y_i - f(x_i))^2 \quad (15)$$

상수 $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ 은 최소자승법에 의해 호몰로지 지수를 최소화함으로써 구해지며 호몰로지 지수 값은 가정된 함수의 정확도를 표시하고 있다. l 은 호몰로지 변형에 대한 제한을 받는 절점의 개수이므로 $l \geq n+1$ 이 성립되어야 한다. (x_i, y_i) , $f(x_i)$ 및 상수 $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ 은 최적화과정의 한 반복진행 (iteration)마다 변화되는 값이다. 다중하중이 작용하는 문제에서 수렴조건은 다음과 같이 정의된다.

$$HI \leq HI_{lim} \quad (16)$$

여기서, HI_{lim} 은 호몰로지 지수의 한계값이며 문제의 중요도에 따라 설계자가 결정하여 주는 값이다. 각 하중조건에 대하여 식 (16)을 만족해야 하며 동시에 부등제한조건도 만족시켜야 수렴한 것으로 판정한다. HI_{lim} 를 작게 부여하면 호몰로지 설계의 정확도는 높아지지만 구조물의 중량이 증가하는 경향이 있으며 문제에 따라 수렴이 안 될 가능성도 있다. 호몰로지 지수의 한계값은 호몰로지 설계의 완성도를 조절하여 주는 역할을 한다.

4. 예제 풀이 및 검토

최적화기법을 이용한 호몰로지 설계의 실용성을 예시하기 위하여 제시된 방법을 단일하중이 작용하는 경우에는 7바 트러스 및 안테나의 백-업 구조물 설계에 적용하였다. 그리고 다중하중이 작용하는 경우에는 200바 트러스 및 안테나의 백-업 구조물 설계에 적용하였다. 7바 트러스 및 안테나의 백-업 구조물 설계에서의 설계변수는 각 요소의 단면적이며 200바 트러스의 설계에서는 참고문헌 (10)에서

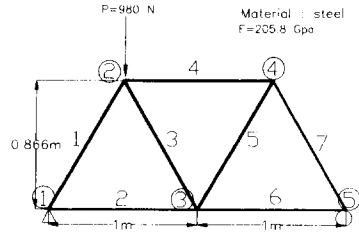


Fig. 1 Seven-bar structure

와 같이 설계변수조합 (design variable linking)을 이용하여 29개의 단면적으로 설정하였다. 설계변수 조합에 대한 자세한 내용은 참고문헌 (10)에 수록되어 있다. 단일하중이 작용하는 경우의 호몰로지 설계에서는 본 연구의 방법과 등제한조건을 이용한 호몰로지 설계기법의 결과를 비교하였다. 등제한조건함수를 이용한 호몰로지 설계에서는 수렴조건으로 식 (10)에서 구해지는 설계변수의 변화량에 대한 노름(norm)인 $\|\delta b\| = 1.0 \times 10^{-5}$ 으로 하였다. 다중하중 문제에서는 각 하중조건에 대하여 산출된 결과를 초기의 형상과 비교하여 호몰로지 설계에 대한 만족도를 평가하였다. 모든 예에서 정식화 과정에서 설정되는 목적함수는 중량으로 하였다. (14)

4.1 단일하중 문제

4.1.1 7바 트러스 설계

Fig. 1과 같이 7개의 바로 구성된 교량형의 트러스 구조물에서 절점 2에 하중 4.9 kN이 수직으로 작용할 때 절점 2, 절점 3과 절점 4에서 동일한 수직변위가 발생하도록 각 부재의 단면을 결정하는 문제이다. 모든 예제에 대한 구조물의 그림에서 원

Table 1 Initial states of seven-bar problem

Element No.	Area ($\times 10^{-6}m^2$)	Node No.	Displacements ($\times 10^{-3}m$)
1	72.17		
2	36.09	2	- 3.06
3	24.06		
4	24.06	3	- 2.35
5	24.06		
6	12.03	5	- 1.25
7	24.06		
Weight (kg)		1.70	

Table 2 Design solutions of two methods (seven-bar truss)

Element No.	Homology Area ($\times 10^{-6} \text{m}^2$)	Technique Stress (MPa)	Optimization Area ($\times 10^{-6} \text{m}^2$)	Technique Stress (MPa)
1	75.89	-55.91	140.10	-30.29
2	39.83	53.28	70.06	30.29
3	25.17	-56.20	48.58	-29.12
4	29.91	-47.29	45.74	-30.92
5	43.45	32.55	103.58	13.66
6	5.31	133.16	12.02	58.80
7	13.51	-104.7	24.05	58.80
Weight (kg)	1.830		3.486	

Table 3 Vertical displacements of seven-bar truss ($\times 10^{-4} \text{m}$)

Node No.	Homology technique	Optimization technique
2	-7.785	-4.183
3	-7.785	-4.183
4	-7.785	-4.183

숫자는 절점번호를 숫자는 요소번호를 표시한다. 설계변수의 초기조건 및 수직변위 값을 Table 1에 수록하였다. 여기서, 초기값은 임의의 초기치를 10^{-4}m^2 으로 하여 제한조건으로서 응력만을 고려한 후 얻은 최적해이다. 여기서, 허용응력은 철의 항복응력인 235.2 MPa이다. 호몰로지 변형에 대한 제한조건은 절점 2, 절점 3 과 절점 4에서 동일한 수직변위가 발생하도록 하는 것이며, 부등제한조건 함수는 각 부재에 발생하는 응력이 허용응력의 범위를 넘지 않는 것이다. 이 제한조건들을 수식적으로 표시하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
 h_1 &= \frac{|v_2|}{|v_3|} - 1 \\
 h_2 &= \frac{|v_3|}{|v_4|} - 1 \\
 \Psi_j &= \sigma_j - \sigma_{all}, \quad j=1, \dots, 7 \quad (17)
 \end{aligned}$$

식 (17)에서 v 는 수직방향의 변위, 첨자는 각 절점을, σ_j 는 각 부재에 발생하는 응력을 표시하며 σ_{all} 은 58.8 MPa로서 안전계수를 4로 하여 구한 철의 허용응력이다. 여기서, 하중 및 안전계수는 임의로 결정하였다. 최적화기법에 의한 호몰로지 설계와 등제한조건함수를 이용한 호몰로지 설계의

결과에 대한 단면적 및 수직변위를 Tables 2, 3에 각각 표시하였다. Table 2는 최적화기법에 의한 호몰로지 설계와 등제한조건함수를 이용한 호몰로지 설계의 결과를 비교한 것이다. 최적화기법에 의한 호몰로지 설계법은 응력에 대한 제한조건을 만족하고 있지만 기존의 방법은 6번, 7번 부재에서 허용응력을 초과하고 있다. 중량감소 측면에서 기존의 호몰로지 기법의 결과가 보다 우수하지만 제한조건을 만족시키지 못하므로 이것은 무의미하다. Table 3은 두 방법에 의해 설계된 7바 트러스에 발생하는 수직변위이다. 관심절점에서 동일한 변위가 발생함을 알 수 있다.

4.1.2 안테나 백-업 구조물설계 문제

Fig. 2는 위성안테나의 반사판을 지지하는 백-업 구조물을 표시하고 있으며, 절점 2, 3, 4는 초기에 $y=9.0703 \times 10^{-5}x^2$ 의 포물선 형상을 갖고 있는데, 반사판 구조물은 그 특성상 전파효율을 높이기 위해서는 변형후에도 초점거리를 조절가능하도록 포물선 형상을 유지하는 것이 중요하다. Fig. 2에서 하중작용후, 변형된 백-업 구조물은 절점 1, 2, 3, 4에서 포물선 형상을 유지해야만 한다. Fig. 3은 변

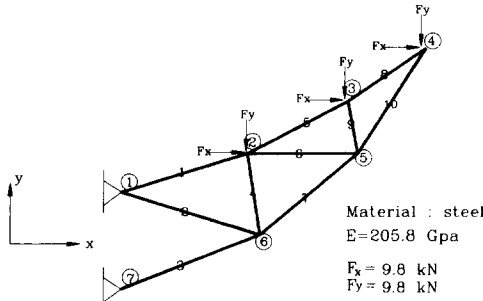


Fig. 2 Back-up structure of antenna

형전의 포물선 형상과 변형후의 포물선 형상을 표시하고 있다. Fig. 2 및 3에서 백-업 구조물은 허브(hub) 구조물에 의해 지지되고 있는데 허브구조물은 백-업 구조물에 비해 상대적으로 매우 큰 강성을 갖고 있으므로 경계조건으로서 그 연결부위의 자유도를 구속시켰다. Fig. 3에서 초기의 포물선방정식은 $f(x) = a_2'x^2$ 이며, 변형후의 포물선방정식은 $f(x) = a_0 + a_2x^2$ 로 표시된다.^(1,2) 여기서 a_2' 은 초기 포물선방정식의 2차항 계수로서 알고 있는 값이며 a_0, a_2 는 호몰로지 설계과정중에 결정되어야 하는 상수이다. Fig. 3에서 변형후의 포물선은 고정점을 지나가게 되므로 상수 a_0 는 $l_y - a_2l_x^2$ 으로 대치되어 a_2 를 구하는 문제로 귀결된다. 호몰로지 변형에 대한 제한조건은 다음과 같이 표시된다.

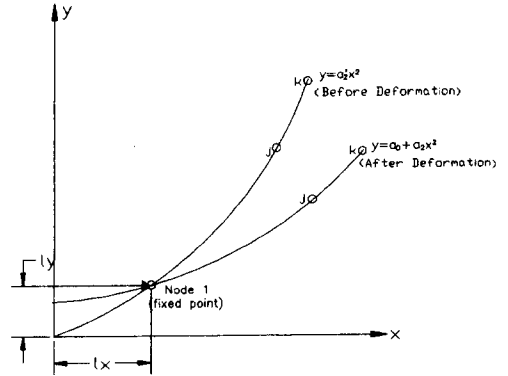


Fig. 3 Configuration of parabola

$$v_j^r = \frac{1}{x_k^2 - l_x^2} \left([2x_j(y_k - l_y) - 2x_k(l_y - y_j)] \right. \\ \left. (x_j^2 - l_x^2) \right] \left\{ \begin{matrix} u_j \\ u_k \\ v_k \end{matrix} \right\} + x_j^2(y_k - l_y) - x_k^2(y_j - l_y) \\ + l_x^2(y_j - y_k) \right) + \frac{C_0}{x_k^2 - l_x^2}, \quad (j=2, 3) \quad (18)$$

여기서, 첨자는 각 절점을 표시하며

$$C_0 = y_k \cdot u_j^2 + 2v_k \cdot x_j \cdot u_j + v_k \cdot u_j^2 - l_y \cdot u_j^2 \\ - y_j \cdot u_k^2 - 2v_j \cdot x_k \cdot u_k + v_j \cdot u_k + v_j \cdot u_k^2 \\ - l_y \cdot u_k^2$$

Table 4 Initial states of back-up structure

Element No.	Area ($\times 10^{-6}m^2$)	Stress (MPa)	Node No.	Original coordinates (mm, mm)	Deformed coordinates (mm, mm)
1	774	129.33			
2	564	118.78	1	1050, 100	1050, 100
3	774	-168.57			
4	564	-31.28	2	2338.5, 496	2339.8, 493.6
5	774	69.43			
6	564	67.32	3	3373.1, 1032	3376.2, 1026.9
7	774	-101.27			
8	774	58.31	4	4167.1, 1575	4172.5, 1566.9
9	564	-21.62			
10	774	-49.84			
Weight (kg)			63.91		

Table 5 Comparisons of results in back-up structure (single loading)

Element No.	Homology Area ($\times 10^{-6}m^2$)	Technique Stress (MPa)	Optimization Area ($\times 10^{-6}m^2$)	Technique Stress (MPa)
1	786.3	97.93	543.2	141.76
2	448.8	114.83	328.7	156.78
3	706.8	-141.99	640.1	-156.79
4	551.1	-24.63	86.6	-156.72
5	980.8	42.14	461.2	89.63
6	321.4	90.87	186.3	156.77
7	798.2	-75.54	554.1	-108.82
8	982.2	35.35	450.9	76.99
9	512.0	-18.32	59.8	-156.88
10	1071.9	-32.58	467.4	-74.72
Weight (kg)	66.13		37.76	
Equation of parabola	$8.9940 \times 10^{-5}x^2 + 0.8405$		$8.9629 \times 10^{-5}x^2 + 1.1845$	
Error	2.45×10^{-3}		2.88×10^{-3}	

호몰로지 변형 및 역학적인 제한조건은 다음과 같이 표시된다.

$$h_1 = \frac{|v_2|}{|v_2^*|} - 1$$

$$h_2 = \frac{|v_3|}{|v_3^*|} - 1$$

$$\Psi_j = \sigma_j - \sigma_{all}, \quad j=1, \dots, 10 \quad (19)$$

여기서, v_2^* 와 v_3^* 은 각각 식 (19)에 의한 값이며 v_2 와 v_3 는 유한요소법으로부터 구해지는 값이다. σ_{all} 은 156.8 MPa로서 안전계수를 1.5로 고려한 철의 허용응력이다. 여기서, 안전계수는 임의로 결정되었다. Table 4는 설계변수의 초기값과 발생응력, 그리고 초기절점의 좌표 및 변형된 형상의 좌표를 표시하고 있다.

여기서, 절점 1, 2, 3, 4는 백-업 구조물에서 호몰로지 변형을 이루어야 하는 절점들이다. Table 5는 등제한조건함수에 의한 호몰로지 기법과 최적화 기법에 의한 호몰로지 설계법을 이용하여 구한 해를 비교한 것이다. 제한조건은 두 가지 방법에서 모두 만족되고 있지만 중량감소 측면에서 최적화 기법을 이용한 호몰로지 설계가 우수함을 알 수 있다. 여기서, 포물선방정식은 이차함수에 대한 최소

자승법을 이용하여 구해진 것이며, 오차는 식 (15)의 l 개의 항중에서 가장 큰 값을 갖는 오차에 대한 절대값이다. 제시된 방법이 기존의 호몰로지 설계법보다 오차가 적게 발생하고 있다. 이것은 제시된 방법이 호몰로지 변형에 대한 제한조건인 식 (18)에서 이차항 이상을 포함하고 있지만 기존의 방법에서는 식 (7)을 구성할 때 이차항 이상을 고려할 수 없기때문에 나타나는 현상이다.

4.2 다중하중이 작용하는 경우

4.2.1 200바 트러스 설계

Fig. 4와 같이 200개의 바로 구성된 교량형 트러스 구조물⁽¹⁰⁾에서 하중조건은 다음과 같다.

첫번째 하중조건

작용절점 : 1, 6, 15, 20, 29, 34, 43, 48, 57, 62, 71

크기 : x 축의 양의 방향으로 1 kN

두번째 하중조건

작용절점 : 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 14, 15, 16,

17, 18, 19, 20, 22, 24, ...,

71, 72, 73, 74, 75

크기 : y 축의 음의 방향으로 10 kN

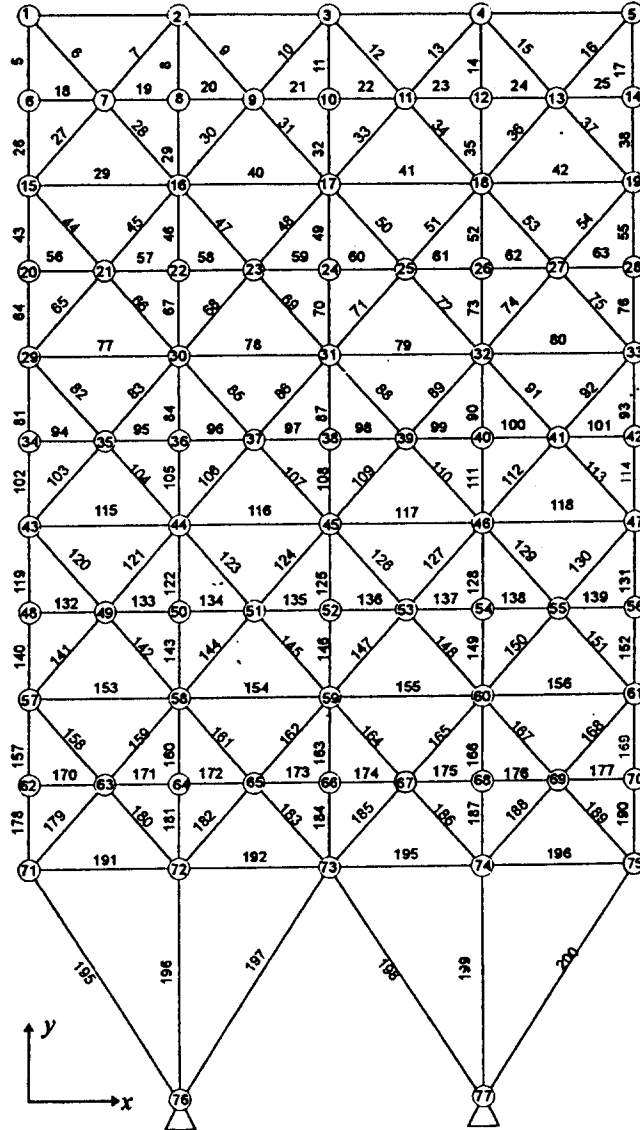


Fig. 4 Two-hundred-bar structure

임의로 설정된 호몰로지 변형에 대한 제한조건은 Fig. 4에서 윗열인 절점 1, 2, 3, 4, 5가 동일한 수직변위가 발생하도록 하는 것이다. 제한조건은 다음과 같이 표시할 수 있다.

$$\begin{aligned}
 h_1 &= HI_1 \\
 h_2 &= HI_2 \\
 \Psi_j &= \sigma_j - \sigma_{all}, \quad j=1, \dots, 400
 \end{aligned}
 \tag{20}$$

여기서, HI_1, HI_2 는 두 개의 하중조건에 대한 식

(15)의 값이며 호몰로지 설계로부터 요구되는 다항식은 $f(x) = a_0$ 이다. 최적화과정은 식 (16)을 만족시킬 때까지 반복된다. 관심절점에 발생하는 초기의 수직변위 및 $HI_{lim} = 5.0 \times 10^{-2}$ 와 $HI_{lim} = 1.0 \times 10^{-5}$ 인 경우에 대한 호몰로지 설계 후의 수직변위를 Table 6에 수록하였다. Figs. 5, 6은 수직변위의 형상을 각 하중조건에 대하여 표시한 것이다. Fig. 6에서는 초기설계부터 수평을 유지하고 있는데 이것은 2번째 하중조건이 동일한 하중으로 구조물의

Table 6 Vertical displacements of two-hundred-bar truss ($\times 10^{-3}$ m)

Node No.	Initial value		$HI_{lim}=5.0 \times 10^{-2}$		$HI_{lim}=1.0 \times 10^{-5}$	
	1st loading	2nd loading	1st loading	2nd loading	1st loading	2nd loading
1	10.478	-86.813	3.365	-35.804	0.039	-0.740
2	5.317	-86.228	1.766	-35.704	0.040	-0.687
3	0.190	-86.115	0.159	-35.698	4.7×10^{-4}	-0.666
4	-4.944	-86.228	-1.460	-35.704	-0.031	-0.687
5	-10.144	-86.813	-3.135	-35.804	-0.047	-0.740
Weight (kg)	1597.08		1911.833		94280.76	

Table 7 Initial values of back-up structure (multiple loading)

Loading condition	Equation of parabola	Error
1st loading	$y=8.9956 \times 10^{-5}x^2+1.0641$	0.429
2nd loading	$y=8.9733 \times 10^{-5}x^2+1.3815$	0.556

중앙에 의해 대칭으로 작용하기 때문이다. 호몰로지 지수가 작을수록 수평을 유지하고 있음을 알 수 있다.

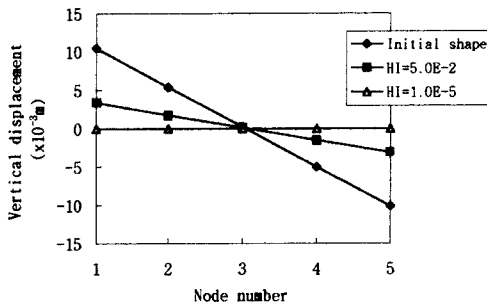


Fig. 5 Vertical displacements of constrained nodes under loading condition 1 (two-hundred-bar)

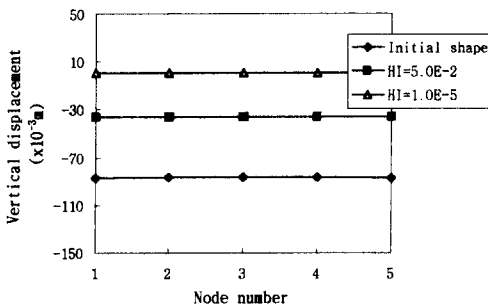


Fig. 6 Vertical displacements of constrained nodes under loading condition 2 (two-hundred-bar)

4.2.2 안테나 백-업 구조물설계 문제

Fig. 2 와 같이 절점 2, 3, 4 는 초기에 $y=9.0703 \times 10^{-5}x^2$ 의 포물선 형상을 갖고 있다. 첫번째 하중 조건은 4.1 절에서와 동일하며, 두번째 하중조건은 첫번째 하중조건의 같은 절점에 크기를 1.3 배 증가한 하중이다. 4.1 절에서와 같은 순서에 따라 식 (18)을 이용하여 호몰로지 변형에 대한 제한조건을 설정할 수 있다. 이 문제의 제한조건은 다음과 같이 표시된다.

$$\begin{aligned}
 h_1 &= HI_1 \\
 h_2 &= HI_2 \\
 \Psi_j &= \sigma_j - \sigma_{all}, \quad j=1, \dots, 20
 \end{aligned}
 \tag{21}$$

하중조건이 두개이므로 식 (21)과 같이 제한조건이 구성되며 σ_{all} 은 단일하중이 작용하는 경우와 동일한 156.8 MPa이다. 호몰로지 지수의 계산을 위한 다항식은 $f(x)=a_0+a_2x^2$ 이다. 두 하중 조건에 대한 포물선의 초기형상을 Table 7에 표시하였다. 초기오차는 각 하중조건에 대하여 0.429와 0.556을 갖고 있다. 여기서, 호몰로지 지수의 한계 값, HI_{lim} 은 0.01로 설정하였다. Table 8은 최종 설계해와 각 하중에 대한 포물선 방정식과 오차를 표시하고 있다. 최적화기법을 이용한 호몰로지 설계의 수행결과 초기상태에 비해 오차가 크게 감소하고 있다.

Table 8 Final solution of back-up structure (multiple loading)

Element No.	Area ($\times 10^{-6}m^2$)	Stress (MPa)	
		1st loading	2nd loading
1	634.8	120.61	156.80
2	1966.6	26.20	34.06
3	10000	-10.04	-13.05
4	158.0	-85.88	-111.65
5	10000	4.13	5.37
6	9967.5	2.93	3.81
7	9484.2	-6.36	-8.26
8	9347.5	3.71	4.83
9	4126.0	-2.27	-2.96
10	8830.3	-3.96	-5.14
Equation of parabola		$y = 9.0446 \times 10^{-5}x^2 + 0.2610$	$y = 9.0395 \times 10^{-5}x^2 + 0.3390$
Error		0.00087	0.00043
Weight (kg)		605.5	

높아지나 중량이 증가하는 경향이 있다.

5. 결 론

본 논문에서는 호몰로지 설계 개념을 최적설계 알고리즘과 결합시킴으로써 단일하중 및 다중하중 하에서의 트러스 최적설계를 수행하여 다음과 같은 결과를 얻었다.

(1) 기존의 호몰로지 설계법은 응력, 변위 등의 역학적인 제한조건을 고려할 수 없었으나 최적화기법을 이용한 호몰로지 설계에서는 부등제한조건으로 고려할 수 있으므로 의미있는 해를 산출할 수 있다.

(2) 최적화기법을 이용한 설계법은 중량을 목적함수로 설정하기 때문에 호몰로지 지수 및 제한조건을 만족하는 범위내에서 경제적인 설계를 구현할 수 있다.

(3) 기존의 호몰로지 설계방법에서는 단일하중 조건만을 고려할 수 있으나, 본 논문에서는 다중하중조건하에서도 호몰로지 지수에 의하여 해에 근접한 값을 구할 수 있다.

(4) 호몰로지 지수들을 이용하여 호몰로지 설계의 완성도를 조절할 수 있다. 즉, 호몰로지 지수들을 작게 하면 호몰로지 변형에 대한 기하학적인 만족도는

참고문헌

- (1) 이권희, 박경진, 1996, "등제한조건함수를 이용한 구조물의 Homology 설계," 대한기계학회 논문집, 제20권, 제3호, pp. 872~881.
- (2) Lee, K. H. and Park, G. J., 1995, "Structural the Homology Design Using Equality Constraints," *Proceedings of Sixth International Conference on Adaptive Structures*, Nov. 11~13, Key West, U. S. A. pp. 353~363.
- (3) 吉川, 中桐滋, 1995, "剛性制約のもとでの二次曲線保指のホモロジ-設計," *日本機械學會論文集(A편)*, 61卷, 581號, pp. 198~204.
- (4) Nakagiri, S., Yoshikawa, N. and Niwa, T., 1992, "A Note on Finite Element Synthesis of Structures (Part 7) -Formulation of Homologous Vibration Mode-," *SEISAN-KENKYU, Institute of Industrial Science, Univ. of Tokyo*, Vol. 44, No. 9, pp. 449~452.
- (5) Yoshikawa, N. and Nakagiri, S., 1994, "Homology Design to Maintain Quadratic

- Curves," *Proceedings of the Fifth International Conference on Adaptive Structures*, Nov. 7~9, Sendai, Japan.
- (6) Yoshikawa, N., 1995, "最悪誤差を低減するロバスト. ホモ로지-設計," *生産研究* 第47卷 第1號, 東京大學生産技術研究所, pp. 42~45.
- (7) Hoerner, S. V., 1967, "Homologous Deformations of Tilttable Telescopes," *Journal of the Structural Division, Proceedings of the ASCE*, Vol. 93, pp. 461~485.
- (8) Rao, C. R. and Mitra, S. K., 1971, *Generalized Inverse of Matrices and Its Applications*, John Wiley & Sons, Inc., New York, pp. 19~27.
- (9) Arora, J. S. and Tseng, C. H., 1986, "IDESIGN User's Manual," Optimal Design Lab., College of Engineering, The University of Iowa, Iowa City, U. S. A.
- (10) Haug, E. J. and Arora, J. S., 1979, *Applied Optimal Design*, John Wiley and Sons, Inc., New York, pp. 249~301.
- (11) Haftca, R. T., Gurdal, Z. and Kamat M. P., 1990, *Elements of Structural Optimization*, 2nd Revised Edition, Kluwer Academic Publishers, pp. 3~13.
- (12) 박영선, 1995, "불연속구조물의 배치최적설계를 위한 이점역이차근사법 및 이동한계전략의 개발," *기계설계학과 박사학위논문*, 한양대학교.
- (13) Gerald F. C. and Wheatley, P. O., 1989, *Applied Numerical Analysis*, 4th Edition, Addison-Wesley Publishing Company Inc., pp. 629~632.
- (14) 김경근, 1995, "다중하중하에서 호몰로지 제한조건을 이용한 트러스의 최적설계," *기계설계학과 석사학위논문*, 한양대학교.