

<논 문>

## 불균질 취성재료 파괴인성에 미치는 두께효과의 확률적 연구

김엄기\* · 고성위\*\* · 정규동\*\*\*

(1995년 11월 27일 접수)

### A Probabilistic Study on Thickness Effect of Fracture Toughness in Heterogeneous Brittle Materials

Amkee Kim, Sung-Wi Koh and Gyoo-Dong Jung

**Key Words :** Fracture Toughness(파괴인성), Brittle Fracture(취성파괴), Probability(확률), Weibull Distribution(와이블분포), Griffith Criterion(그리피스 파괴조건), Ceramic(세라믹)

#### Abstract

Fracture toughness of heterogeneous brittle materials such as polycrystalline ceramics used to present the size (thickness) effect as well as statistically distributed results. There is belief that both (size effect and scatter) must be associated with each other. However, no generally accepted theory has been established so far. Using statistical approach, a probabilistic modeling for the fracture toughness which describes the thickness effect was attempted in this paper. Weibull distribution of specific fracture energy(SFE) at local areas and Griffith criterion are applied to the model. In addition, the newly developed model was verified with experimental results of alumina.

#### 1. 서 론

내열, 내마모성 등이 우수하여 엔지니어링 세라믹 용도가 기계 및 우주항공 분야에서 점차 넓어지고 있다. 그러나 본래 이 재료가 취성파괴에 취약하기 때문에 구조재료로서의 성패는 파괴인성에 대한 신뢰성 기술 확보에 달려 있다고 할 수 있다.

한편 세라믹을 포함한 취성재료 파괴연구에서 연성재료에 비하여 실험적 재현성이 떨어지는 현상이 경험적으로 인식되고 있다. 동일한 크기의 시험편과 하중조건 하에서 실험했을 때 조차 결과값이 다르게 나타나곤 한다. 이는 취성파괴현상이 재료의 불균질성(heterogeneity)과 밀접한 관계를 갖고 있

음을 나타내는 것이다. 따라서 취성파괴 연구에서 통계학적 접근이 관심의 대상이 되고, 강도평가 및 설계에서 어떤 한 특정값의 의미보다는 확률분포에 관심이 모아진다.<sup>(1~4)</sup>

불균질 취성재료의 또 다른 특징은 파괴현상 시험편의 크기(한 예로 두께)에 크게 영향을 받고 있다는 사실이다.<sup>(2,6)</sup> 이는 재료의 미시구조(microscopic structure)와 시험편의 거시적 형상(macroscopic geometry) 간의 크기(size)비 변화에 따른 현상으로 믿어지지만, 그 자세한 기구(mechanism)에 대해서는 지금까지도 명확하게 설명되고 있지 못하다.<sup>(5,6)</sup>

크기효과의 일종인 파괴인성의 두께효과만 보더라도 일부 세라믹에 대한 실험결과에서 밝혀진 바와 같이 두께 증가에 따라  $K_{Ic}$ 가 크게 증가하는 결과를 보이고 있는데 이는 두꺼운 시험편에서 더 큰 평면변형률 상태가 되어 파괴인성이 감소하게 된다

\*회원, 공주대학교 기계공학과

\*\*회원, 부산수산대학교 제어기계공학과

\*\*\*국방과학연구소

는 기존의 소성역 크기에 기초한 이론과 상반된 결과를 나타낸다.<sup>(5)</sup> 이 같은 두께 증가에 따른 파괴인성  $K_{Ic}$  증가에 대하여 일부로부터 시험편 두께와 파괴에너지의 선형적 비례관계를 가정한 견해가 제시되고 있으나, 파괴에너지는 단지 단위 면적의 균열형성에 요구되는 에너지로 표시되기 때문에 두께에 따라 선형적으로 증가된다는 설명은 설득력이 없다.<sup>(6)</sup> 결과적으로 그 원인은 그 외의 파괴기구에 의하여 규명되어야 할 것이다.

본 연구에서는 다결정 세라믹 등과 같이 불균질 미시구조를 지닌 취성재료에 적용가능한 파괴인성  $K_{Ic}$ 의 통계학적 모델을 확률적 균열형성 과정에 기초하여 제시하고 이로부터 파괴인성에 대한 두께효과를 설명한다.

## 2. 불균질 취성재료에서의 균열형성 모델

### 2.1 통계학적 균열형성 모델을 위한 기본가정

다음은 불균질 취성재료에서 균열이 형성되는 과정을 수학적으로 모델화하는데 사용한 주요 가정을 기술한다.

(1) 모델은 2차원 고체의 파괴과정을 대상으로 한다. 재료 내에 미세하게 분포한 불균질 상태(입자, 입계, 개재물, flaw 등)를 랜덤필드(random field)로 가정하고 균열형성을 균열이 진행되는 경로를 따라 존재하는 랜덤한 크기의 장애물을 통과하는 과정으로 설명한다.

(2) 균열형성 과정에서 미소균열전파에 대한 필요충분조건은 Griffith 파괴조건 만족 여부와 동일하다. 즉, 에너지해방률이 파괴에너지(specific fracture energy)를 초과해야 한다. 또한 앞서 언급한 재료의 불균질 상태는 파괴에너지(SFE)의 랜덤필드로 모델화된다.

(3) 균열형성 경로는 랜덤이다. 즉 동일한 형상의 다수의 시험편을 사용하여 균열경로를 얻었을 때 중첩하여도 중복되는 경로는 발생하지 않는다. 이것은 주어진 시험편 하중형상에 대하여 중복되지 않는 무수한 균열경로의 집합  $\Omega$ 가 존재함을 의미한다. 또한  $\Omega$  내의 균열경로는 서로 독립적이다. 실제 균열경로는 기회(chance)에 의하여 집합  $\Omega$ 로부터 선택되며 시험편의 파단은 선택된 단일 균열 경로에 의하여 발생한다.

(4) 준정적인 하중만이 고려된다. 균열형성시 하중점에서의 갑작스러운 하중 또는 변위의 변화는

무시된다. 관성, 응력파의 반사에 의한 동적효과도 무시된다.

### 2.2 균열형성 확률

Fig. 1과 같이 외부력을 받고 있는 2차원 고체 내의 한 균열  $\omega_0$ 가 한 점  $x$ 에 위치하고 있을 때 균열형성 확률  $P_{\omega_0}(x, X)$ 를 초기균열  $\omega_0$ 가 균열선단  $x$ 로부터 다른 점  $X$ 까지 전파할 확률로 정의하자. 이 때 거시적으로 동일한 조건 하에서 조차 균열전파 경로는 각각의 실험에 대하여 독립임을 보여준다. 결과적으로 균열경로를 실험전에 예측하는 것은 불가능하며 관찰된 균열경로에 관한 통계학적 해석만이  $x$ 와  $X$ 를 연결하는 균열경로의 집합  $\Omega$ 를 특성화할 수 있게 한다.

실제 Fig. 1에서와 같이 가능한 균열경로의 수는 다수로서 시험편 파단은 그 중의 유일한 경로를 통하여 발생하게 된다. 따라서 균열형성 확률  $P_{\omega_0}(x, X)$ 를 다음 식으로 나타낼 수 있다.

$$P_{\omega_0}(x, X) = \sum_{\omega} P_{\omega_0}(x, X/\omega) P_{\omega_0}[\omega] \quad (1)$$

여기서,  $P_{\omega_0}[\omega]$ 는 균열  $\omega_0$ 가  $x$ 로부터  $X$ 까지 전파할 때 발생 가능한 모든 균열경로중 한 특정경로  $\omega$ 를 택할 확률이며,  $P_{\omega_0}(x, X/\omega)$ 는 균열이 선택된 경로  $\omega$ 를 따라서 전파하는 조건 하에서 균열이  $x$ 로부터  $X$ 에 도달할 조건확률을 나타낸다.

한편 연속체 개념에 기초한 모델을 고려하여 공간  $\Omega$ 를 무한하다고 가정하면 식 (1)의  $\sum$ (summation) 기호는 다음과 같이 적분기호로 대체될 수 있다.

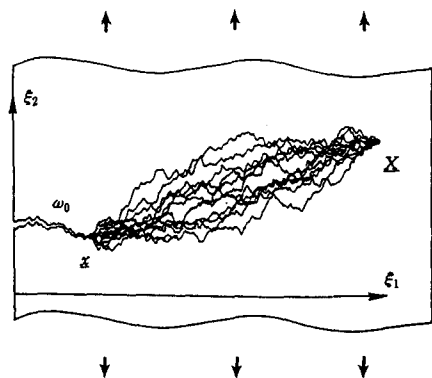


Fig. 1 A visualization of the set  $\Omega$  of all possible crack paths from crack  $\omega_0$  which end at a point  $X$

$$P_{\omega_0}(x, X) = \int_{\Omega} P_{\omega_0}(x, X/\omega) d\mu(\omega) \quad (2)$$

균열형성 확률 식 (2)는 계산을 위하여 다음 사항을 필요로 한다. 첫째로 균열경로 공간  $\Omega$ 의 설정이 필요하고, 둘째로 공간  $\Omega$ 에서의 확률미분  $d\mu(\omega)$ 에 관한 정보 및 이에 기초한 조건확률함수  $P_{\omega_0}(x, X/\omega)$ 의 적분(식 (2)의 우변)기술이 요구된다. 본 연구에서는 계산의 한 방법으로 Chudnovsky의 연구결과<sup>(4)</sup>를 따라서 다음과 같이 하였다.

$x$ 로부터 전파되는 균열경로를 실험적 사실에 근거하여 Fig. 1에서와 같이  $(\xi_1, \xi_2)$  평면에서 1차원 Wiener 프로세스  $\xi_2 = w(\xi_1)$ ,  $\xi_1 \geq x_1$ 로 모델화하였다. 이는  $w(\xi_1)$ 을 독립된 증분을 갖고, zero drift 및 일정한 확산율(분산구배)  $D > 0$ 인 랜덤프로세스로 가정한 것과 동일하다. 따라서  $x$ 와  $X$ 를 연결시키는 가능한 모든 균열경로는  $x_1 \leq \xi_1 \leq X_1$  범위에서 Wiener 프로세스가 창출할 수 있는 모든 연속함수의 공간  $\Omega$ 중  $w(x_1) = x_2$ ,  $w(X_1) = X_2$ 을 만족시키는 소공간  $\Omega_{x,x}$ 로 표시되고  $\Omega_{x,x}$ 상의 확률미분  $d\mu(\omega)$ 는 다음과 같은 조건을 만족시켜야 한다.

$$\int_{\Omega_{x,x}} d\mu_{x,x}^{(D)}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi D(X_1 - x_1)}} \exp\left[-\frac{(X_2 - x_2)^2}{2D(X_1 - x_1)}\right] \quad (3)$$

여기서, 확산계수  $D$ 는  $\xi_1$  축으로부터 균열경로의 벗어남의 정도를 나타내는 파라미터로 공간  $\Omega$ 의 어떤 한점  $\xi_1$ 에서의  $\xi_2$ 의 분산으로 표시되며 실험적으로 측정 가능하다.

한편 조건확률  $P_{\omega_0}(x, X/\omega)$ 는 균열성장 기구(mechanism)로부터 다음과 같이 수식화된다. 경로  $\omega$ 를 따라  $x$ 로부터  $X$ 까지 균열이 전파하는 데는 일련의 국부적인 미소 파단의 연속이 균열선단에서 발생해야 하는데 균열성장의 가능성을 Griffith 파괴조건으로 결정한다. 즉, 에너지해방률  $G$ 가 단위 파단면 형성에 요구되는 파괴에너지(specific fracture energy)  $2\gamma$ 를 초과하여야 한다( $G > 2\gamma$ ). 한편 다결정 세라믹과 같이 재료가 불균질한 경우를 고려하면 파괴에너지  $\gamma$ 는 그 값이 장소에 따라 통계적으로 분포하게 될 것이다. 파괴에너지  $\gamma$ 를 특성 거리(characteristic distance)  $c$ 를 가정하여 그 영역 내에서 일정하고 밖에서의 파괴에너지와 독립적인 랜덤변수로 가정한다(2.1절의 첫번째 가정). 따라서 균열의 미소(infinitesimal) 성장에 관한 파괴조건( $G > 2\gamma$ )이  $x$ 와  $X$  사이의 균열전파경로  $\omega$ 상의

모든 점에서 만족시킬 확률에 관한 식은 다음과 같이 얻어진다. 식 (4)의 자세한 유도과정은 부록에 수록되어 있다.

$$P_{\omega_0}(x, X/\omega) = \exp\left\{-\int_{x_1}^{X_1} \text{Prob}[2\gamma \geq G_{\omega, \omega_0}(\xi_1)] \frac{d\xi_1}{c}\right\} \quad (4)$$

여기서,  $G$ 의 아래첨자  $\omega_0$ ,  $\omega$ 는 에너지해방률  $G$ 가 균열의 형상에 의존하는 함수임을 나타내며,  $\omega_0$ 를 따라 형성된 초기균열이 경로  $\omega$ 를 따라 전파하는 경우를 나타낸다(Fig. 1 참조). 한편 균열형성경로를 따라 만나게 되는 랜덤변수인 파괴에너지(SFE)  $\gamma$ 의 확률분포는 극한 확률분포를 가정하여 Weibull 분포함수로 나타낸다. 따라서 균열형성 경로를 통과하는 점들에서의  $\gamma$ 의 누적분포함수는 다음과 같이 표현된다.

$$F(\gamma) = \begin{cases} 1 - \exp\left[-\left[\frac{\gamma - \gamma_{\min}}{\gamma_0}\right]^\alpha\right], & \gamma \geq \gamma_{\min} \\ 0, & \gamma < \gamma_{\min} \end{cases} \quad (5)$$

여기서,  $\gamma_0 > 0$ ,  $\alpha > 0$  그리고  $\gamma_{\min} \geq 0$ 는 각각 Weibull 분포함수의 크기(scale), 모양(shape) 및 최소값 파라미터를 나타낸다.

지금까지의 식 (2), (3), (4) 및 (5)를 종합하면  $x$ 에서  $X$ 까지의 균열형성 확률은 다음식으로 나타낼 수 있다.

$$P(x, X) = \int_{\Omega_{x,x}} \exp\left\{-\int_{x_1}^{X_1} \exp\left[-\left[\frac{G_{\omega, \omega_0}(\xi_1)/2 - \gamma_{\min}}{\gamma_0}\right]^\alpha \frac{d\xi_1}{c}\right] d\mu_{x,x}^{(D)}(\omega)\right\} \quad (6)$$

식 (6)의 함수적분은 Monte-Carlo 방법에 의하여 직접 계산할 수 있고, 해석적인 방법으로 식 (6)의 적분을 편미분방정식으로 변형하여 그 해를 구하는 방법이 있다.<sup>(6)</sup>

그러나 실제 표준시험편을 이용한 세라믹 파괴인성시험에서 나타나는 균열의 경로는 노치방향에 평행하여 형성되는 경우가 일반적이므로 식 (6)에서 언급한 확산계수  $D$ 는 0에 가깝다( $\xi_2 \approx 0$ ). 또한 최소값 파라미터  $\gamma_{\min}$ 는 재료가 결함으로 기공(void)을 포함할 가능성이 높으므로 0으로 가정할 수 있다. 따라서 이 경우의 식 (6)의 계산은 다음과 같이 간략화된 식에 의하여 이루어질 수 있다.

$$P(\underline{x}, \underline{X}) = \exp\left\{-\int_{x_1}^{X_1} \exp\left[-\left[\frac{G_I(\xi_1)/2}{\gamma_0}\right]^a\right] \frac{d\xi_1}{c}\right\} \quad (7)$$

3. 파괴인성값 확률분포의 수학적 모델

세라믹을 포함한 취성재료의 파괴인성값  $K_{Ic}$ 의 측정은 Fig. 2와 같이 주어진 시험편내 노치  $a$ 에서 불안정 균열이 형성되는 순간의 응력강도계수 (stress intensity factor)로 측정되는데 실험중 측정된 최대하중에 대응한 SIF로 나타난다. 따라서  $K_{Ic}$ 의 누적확률분포함수,  $F_{K_{Ic}}(K_I) = Prob(K_{Ic} < K_I)$ 는 시험편에 가해진  $K_I$ 에 상당하는 시험하중  $P$ 하에서 노치  $a$  선단에서 발생한 균열이 계속적으로 전파하여 시험편의 길이  $W$ 에 도달할 확률이다. 선형탄성 파괴역학에서의  $G_I = K_I^2/E$  관계와 식 (7)을 사용하여  $K_{Ic}$ 의 누적확률분포함수  $F_{K_{Ic}}(K_I)$ 을 나타내면 다음식으로 표현된다.

$$F_{K_{Ic}}(K_I) = \exp\left\{-\int_a^W \exp\left[-\left[\frac{K_I^2(P, \xi_1)/2E}{\gamma_0}\right]^a\right] \frac{d\xi_1}{c}\right\} \quad (8)$$

식 (8)에 의한 파괴인성 누적확률분포함수는 재료상수인 Weibull 파라미터  $a$ ,  $\gamma_0$  및 특성거리  $c$ 와 함께 시험편의 하중형상에 의존하게 된다.

4. 두께를 고려한 파괴인성값의 확률분포 모델

두께가  $c$ 인 2차원 시험편에 관한 식 (8)은 시험

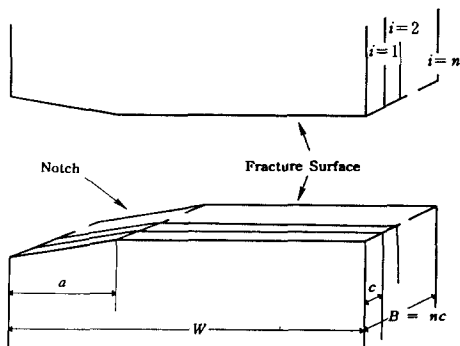


Fig. 2 A specimen with thickness of B is considered as a multilayered specimen composed of n specimens with thickness of c

편의 두께가  $B$ 인 경우 두께효과를 고려하여 수정될 수 있다. 두께  $B$ 인 시험편은 Fig. 2와 같이 두께  $c$ 인 시험편이  $n=B/c$ 개 포개져 이루어졌다고 가정할 수 있다. 따라서 두께  $B$ 인 시험편에서 노치  $a$ 로부터 시작되어 시험편 길이  $W$ 까지의 균열 형성 사건을 두께가  $c$ 인 2차원 시험편  $n$ 개에서 균열형성이 동시에 발생하는 사건과 동일하게 취급할 수 있다. 또한 독립된  $n$ 개의 시험편에서의 균열형성 사건이 서로 확률적으로 독립적인 것으로 가정하면, 두께  $B$ 인 시험편에서의  $K_{Ic}$ 의 누적확률분포함수,  $F_{K_{Ic}}(K_I)_B$ 는 식 (8)로부터 다음과 같이 표현된다.

$$F_{K_{Ic}}(K_I)_B = \prod_{i=1}^n Prob\{i\text{번째 시험편에서 균열이 } a\text{로부터 } W\text{까지 형성}\} = [F_{K_{Ic}}(K_I)]^n = \exp\left\{-\int_a^W \exp\left[-\left[\frac{K_I^2(P, \xi_1)/2E}{\gamma_0}\right]^a\right] \frac{d\xi_1}{c/n}\right\} \quad (9)$$

여기서,  $c/n$ 을 상당 특성거리(effective characteristic distance)  $c_{eff}$ 로 표시하면, 파괴인성에 대한 두께효과는 식 (8)에서 두께변화에 따른  $c_{eff} = c/n$ 의 변화를 통하여 나타나게 된다.

한편  $K_{Ic}$ 의 확률밀도함수  $f(K_{Ic})_B$ 는 식 (9)의 미분으로부터 다음과 같이 계산된다.

$$f(K_{Ic})_B = \frac{dF_{K_{Ic}}(K_I)_B}{dK_I} \Big|_{K_I=K_{Ic}} \quad (10)$$

5. 결과 및 고찰

Fig. 4는 모델(식 (10))이 포함하고 있는 Weibull 파라미터들이 각각  $a=0.25$ ,  $\gamma_0=0.02 \text{ J/m}^2$  및 특성거리  $c=1 \text{ mm}$ 인 3점 굽힘시험편(Fig. 3)을 사용하여  $K_{Ic}$  실험을 했을 때 시험편 두께가

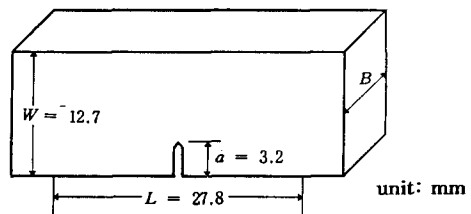


Fig. 3 Three points bend specimen

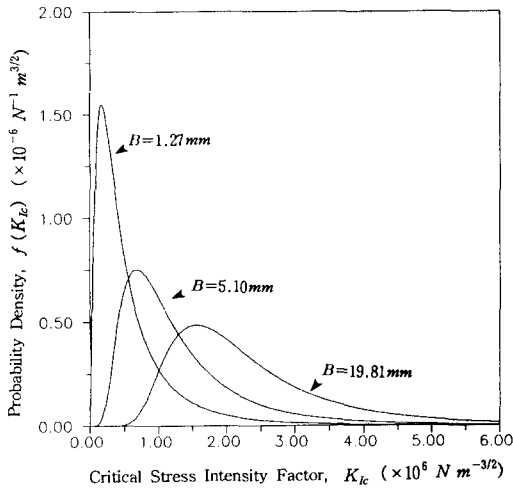


Fig. 4 Probability density distribution of  $K_{Ic}$  predicted by the model

$B=1.27$  mm,  $5.10$  mm,  $19.81$  mm인 경우에 예상되는  $K_{Ic}$ 의 확률밀도함수 곡선을 식 (10)의 계산에 의하여 나타낸 것이다. 곡선은 두께 증가에 따라  $K_{Ic}$ 의 기대값과 분산이 증가하고 있음을 나타내고 있다. 이 결과는 금속재료에서 일반적으로 나타나는 두께의 증가에 따라  $K_{Ic}$ 가 감소하는 현상과 상반된 결과로 보수적 설계값으로의 재료상수인 평면 변형률 파괴인성  $K_{Ic}$ 가 불균질 취성재료에 적용될 수 없음을 의미한다. 즉, 두꺼운 시험편에서 얻은 파괴인성값을 얇은 구조물에 적용했을 때 안전성을 보장할 수 없게 된다.

한편 본 모델의 현실성 검토를 위하여 Gurumoorthy<sup>(5)</sup>의 실험결과와 비교 검토하였다. Gurumoorthy 등은 Fig. 3과 동일한 모양의 알루미늄 나 시험편을 두께  $B=1.27$  mm,  $B=5.10$  mm,  $B=19.81$  mm로 각각 5개씩 제작하여 실험하였다. 이 때 얻은  $K_{Ic}$  값의 범위는 Fig. 5에서 시험편 두께에 따라 바(bar) 표시로 나타난다. Fig. 5 내의 실선은 Weibull 파라미터가  $\alpha=0.25$ ,  $\gamma_0=0.02$  J/m<sup>2</sup>이고, 특성거리  $c=1$  mm일 때의 모델(식 (10))에 의한  $K_{Ic}$ 의 수학적 기대값을 나타내며 실선을 기준으로 상하에 보여진 점선들은  $K_{Ic}$  분포의 분산의 정도를 나타내기 위하여 기대값에 표준편차를 가감한 범위를 나타낸 것이다. 비록 Gurumoorth의 실험값의 개수가 각 두께에 따라 5개로 제한되어 있지만, 그 모두가 모델이 제시한 기대값에 근접하여 표준편차 오차범위내에 분포하고 있다. 또

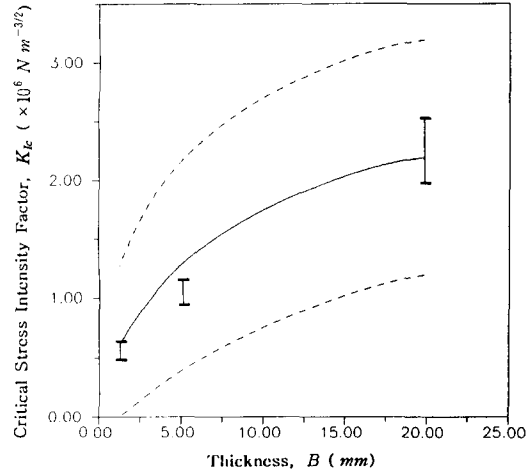


Fig. 5 Toughness variation with thickness

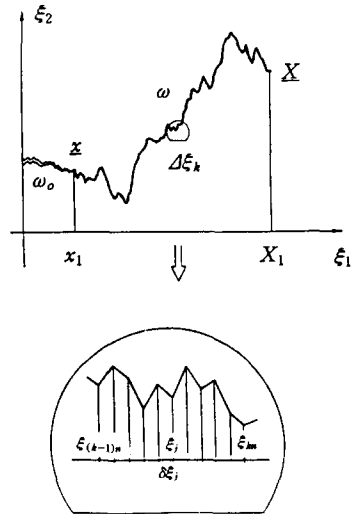


Fig. 6 Discretization of a crack trajectory for the purpose of the probability calculation

한 두께의 증가에 따라  $K_{Ic}$ 의 평균값이 증가하는 현상과 분산이 증가하는 경향은 모델과 실험결과가 일치하고 있다.

### 6. 결 론

(1) 불균질 취성재료 파괴인성  $K_{Ic}$ 의 확률분포 모델식을 제시하였다. 모델식은 재료상수인 Weibull 파라미터  $\alpha$ ,  $\gamma_0$  및 특성거리  $c$ 를 포함하고 있다.

(2) 불균질 취성재료 파괴인성  $K_{Ic}$ 는 두께가 증가함에 따라 평균값이 증가하고 분산 역시 증가한다.

(3) 불균질 취성재료 파괴인성의 두께효과는 두께변화에 따른 상당 특성거리  $c_{eff}$ 의 변화에 의하여 설명될 수 있다.

(4) 파괴인성 평균값과 분산의 실험결과로부터 시험적으로 결정된 알루미늄에 대한 모델 파라미터 값은  $\alpha=0.25$ ,  $\gamma_0=0.02 \text{ J/m}^2$  및 특성거리  $c=1 \text{ mm}$ 이었다.

### 참고문헌

- (1) Neville, D. J., 1987, "The Non-Conservatism of the Weibull Function When Applied to the Statistics of Fracture Toughness," *Int. J. of Fracture*, Vol. 34, pp. 309~315.
- (2) Chudnovsky, A., Kim, A. and Bosnyak, C. P., 1992, "An Energy Analysis of Crack Initiation and Arrest in Epoxy," *Int. J. of Fracture*, Vol. 55, pp. 209~222.
- (3) Calomino, A., Brewer, D., Kim, A. and Chudnovsky, A., 1992, "A Comparative Analysis of Brittle Fracture in Amorphous and Polycrystalline Materials," *Proceedings of Materials Research Society Symposium*, Vol. 279, pp. 165~172.
- (4) Chudnovsky, A. and Kunin, B., 1987, "Probabilistic Model of Brittle Crack Formation," *Journal of Applied Physics*, Vol. 62, No. 10, pp. 4124~4129.
- (5) Gurumoorthy, B., Kircher, H. O. K., Prinz, F. B. and Sinclair, G. B., 1988, "Thickness Effects May Not Do What You Think Do," *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 29, No. 6, pp. 637~640.
- (6) Yiwang Bao, Zongzhe Jin and Xiaorui Li, 1994, "Evaluation of  $K_{Ic}$  Depending on Sample Size for Ceramics," *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 48, No. 1, pp. 85~90.
- (7) Duan, K., Mai, Y.-M. and Cotterell, B., 1995, "R-Curve Effect on Strength and Reliability of Toughened Ceramic Materials," *Journal of Materials Science*, Vol. 30, pp. 1405~1408.
- (8) Matsuo, Y., Kitakami, K. and Kimura, S., 1987,

"Crack Size and Strength Distribution of Structural Ceramics After Non-Destructive Inspection," *Journal of Materials Science*, Vol. 22, pp. 2253~2256.

### 부 록

#### <식 (4)의 유도과정>

Fig. 6에서와 같이 구간  $x_1 < \xi_1 \leq X_1$ 을  $m$ 개의 일정한 길이  $\Delta\xi$ 로 나눈다. 에너지해방률  $G_{\omega, \omega_0}(\xi)$ 는 짧은 길이  $\Delta\xi_k$ 에 걸쳐 일정한 것으로 간주한다. 또한  $\Delta\xi_k$ 가  $\gamma$  필드의 특성거리  $c$ 보다 매우 크다고 가정하여 (즉,  $\Delta\xi_k \gg c$ ) 각  $\Delta\xi_k$ 를  $n = \Delta\xi_k / c$ 개로 나누면 각각은 길이가  $c$ 인  $\delta\xi_j$ ,  $(k-1)n < j \leq kn$ 가 된다 (Fig. 6 참조). 따라서 구간  $x_1 < \xi_1 \leq X_1$ 는  $m \times n$ 개의 소구간  $\delta\xi_j$ 로 나누어지며,  $x_1$ 로부터  $X_1$ 까지의 균열전파는 구간내의 모든 소구간  $\delta\xi_j$ 들의 파단을 의미한다. 국부적 파단조건으로 Griffith 파괴조건을 이용하면, 즉  $\Delta\Pi_j > 2\gamma_j \delta\xi_j$ , 균열형성 확률은 다음과 같이 된다.

$$P_{\omega_0}(x, X/\omega) = Prob \left[ \bigcap_{j=1}^{mn} (\Delta\Pi_j > 2\gamma_j \delta\xi_j) \right] \quad (A1)$$

균열전파가 순차적으로 발생한다고 생각하면  $P_{\omega_0}(x, X/\omega)$ 는 다음과 같이 조건확률의 곱으로 나타낼 수 있다.

$$P_{\omega_0}(x, X/\omega) = \prod_{j=1}^{mn} Prob \left[ \Delta\Pi_j > 2\gamma_j \delta\xi_j \mid \bigcap_{i=1}^{j-1} (\Delta\Pi_i > 2\gamma_i \delta\xi_i) \right] \quad (A2)$$

여기서,  $j$ 번째 단계에서의 방출되는 에너지는 에너지해방률  $G(\xi) = G_{\omega, \omega_0}(\xi)$ 로부터 다음과 같이 계산된다.

$$\Delta\Pi_j = G(\xi_j) \delta\xi_j \quad (A3)$$

따라서 식 (A2)는 다음 식과 같이 된다.

$$P_{\omega_0}(x, X/\omega) = \prod_{j=1}^{mn} Prob[G(\xi_j) > 2\gamma_j] \\ = \prod_{k=1}^m \prod_{j=1(k-1)n+1}^{kn} Prob[G(\xi_j) > 2\gamma_j] \quad (A4)$$

$\Delta\xi$ 는 작기 때문에  $G(\xi)$ 는 각  $\Delta\xi_k$  내에서 거의 일정하여 식 (A4)가 포함하고 있는 모든  $G(\xi_j)$  값들은  $G(\xi_{kn})$ 로 대표될 수 있다. 또한  $\gamma_j$ 는 주어진  $k$ 에 대하여 동일한 랜덤변수  $\gamma$ 이기 때문에 동일한

$k$ 에 대하여 식 (A4)내의  $Prob[G(\xi_j) > 2\gamma_j]$ 는  $j$ 에 무관하게 모두  $Prob[G(\xi_{kn}) > 2\gamma]$ 로 동일하다. 여기서,  $n = \Delta\xi/c$  이고,  $Prob[G(\xi_{kn}) > 2\gamma] = 1 - Prob[2\gamma \geq G(\xi_{kn})]$ 이므로 식 (A4)는 다음과 같이 요약된다.

$$P_{\omega_0}(x, \underline{X}/\omega) = \prod_{k=1}^m [1 - Prob[2\gamma \geq G(\xi_{kn})]]^{d\epsilon/c} \quad (\text{A5})$$

식 (A5)가 포함하고 있는 확률  $Prob[2\gamma \geq G(\xi_{kn})]$

를 작은 수로 가정하면, 식 (A5)는 다음 식과 같이 나타낼 수 있다. (작은  $\epsilon$ 에 대하여  $(1-\epsilon)^n \simeq \exp(-n\epsilon)$ 이기 때문에)

$$P_{\omega_0}(x, \underline{X}/\omega) \simeq \exp\left(-\sum_{k=1}^m Prob[2\gamma \geq G(\xi_{kn})] \frac{d\xi}{c}\right) \quad (\text{A6})$$

위 식 (A6)에서  $\sum$ 의 기호를 적분기호로 대체하면 최종적으로 본문의 식 (4)를 얻게 된다.