

〈논 문〉

5절점 상당요소에 의한 굽힘문제의 정적해석 및 자유진동해석

권영두* · 윤태혁** · 정승갑*** · 박현철****

(1995년 10월 25일 접수)

Static and Natural Vibration Analyses of Bending Problems Using 5-Node Equivalent Element

Young-Doo Kwon, Tae-Hyeok Yun, Seung-Kab Jeong and Hyun-Chul Park

Key Words : Modified QM5 Element(수정 5절점 상당요소), Stiffness Matrix Condensation(강성행렬 압축), Gauss Sampling Points(가우스 적분점), Natural Vibration analysis(자유진동해석), Stiffness Stiffening Phenomenon(강성과잉현상)

Abstract

In the present study, we consider modified 5-node equivalent solid element which has smallest degree of freedom among 2-dimensional solid elements accounting bending deformation as well as extensional and shear deformations. We shall investigate static and dynamic characteristics of this element, which is very effective in thin beam, thick beam, large displacement problems, beam of variable thickness, and asymmetrically stepped beam, etc., as well as relatively simple problems of beam. The degree of freedom of this element is 10, which is smaller than 18 of 9-node element, 16 of 8-node element, 12 of modified 6-node element and Q6 element. Therefore, this element is expected to broaden the effective range of application of the solid elements in the bending problems further.

1. 서 론

각종 구조물의 정적 동적해석을 하는데 있어 유한요소법이 성공리에 적용이 되어 왔다.^(1~4) 구조물의 유한요소해석에 적용된 구조요소로는 보요소,^(1~9) 판요소,^(1~4,10) 셸요소^(1~3,10) 등이 있으며, 이러한 구조요소 외에 고체요소가 적용되기도 한다. 이 중에서 보를 위주로 살펴본다.

보문제에 대해 적용되는 구조요소로는 보요소가 있다. 보요소는 고체요소에 비해 요소당 자유도가

작으므로 전체 강성행렬의 크기가 작고 또한 계산 시간이 적게 소요되는 장점을 가지고 있다. 그러나, 보요소는 전단잠김현상(shear locking)^(1~4)이 수반되므로 두께가 얇은 보문제를 해석하기 위해서는 이에 대한 수정이 요구된다. 이러한 잠김현상을 해결하기 위한 방법으로 감차적분법,^(1~4,11) 형상함수의 수정법^(4,6~8) 등 특별한 조치가 불가피하다. 감차적분법을 적용함에 있어서 변위경계조건이 넓고 미세하지 못한 경우 잠김현상이 여전히 남아 있고, 변위경계조건이 좁은 경우에는 영에너지형(zero energy mode)이 나타나 해를 얻을 수 없거나 발산하는 해가 얻어질 수 있다.⁽¹²⁾ 형상함수 수정법의 경우에는 수정된 형상함수의 차수가 절점의 자유도로부터 얻을 수 있는 최대차수 보다 작아 절점의 자유도를 최대한 이용하지 못하는 단점이 있

*회원, 경북대학교 기계공학과

**회원, 경북대학교 대학원 기계공학과

***현대자동차(주)

****회원, 포항공과대학교 기계공학과

다.^(4,6-8) 그리고, 보요소의 자유도에는 회전량이 있으며 이는 비벡터량으로서 중첩이나 교환법칙이 원칙적으로 불가능하다.⁽²⁾ 다만, 회전량의 크기가 작을 때에는 이들이 허용된다. 그래서 변위 또는 회전량이 큰 대변위 문제에서는, 어느 한 하중증분 하에서, 일반적으로 사용되는 반복계산이 허용되지 않고 한 하중증분을 다시 충분히 작은 아증분(subincrement)으로 재분할하여 선형화를 하고난 후 각 아증분하중(subincremental load)에 대해 계산을 하고 그 결과를 누적해야 한다. 따라서 재분할 단계가 충분히 많지 않으면 오차가 발생하며 이는 반복계산 등으로 보정이 되지 않는다. 이 문제에 대한 개선방법⁽¹³⁾이 제안되고 있으나 재분할이 충분치 않고는 해결이 어려운 것으로 보인다.

또한 보요소에서는 두께방향의 자유도가 없으므로, braided composite beam 등에서와 같이, 두께방향의 하중에 대한 동일방향의 변형률 및 응력이 평가될 수 없다. 더우기 보요소는 두께가 변하는 보에 대한 적용에서 효용성이 일반적으로 떨어지고, 특히 실리콘 가속도센서^(14,15) 등에 이용이 되는 비대칭 질량이 달려 있는 외팔보에서와 같이 비대칭적으로 단이 진 보 등의 해석은 실제적으로 불가능하거나 정확도가 떨어진다.

따라서 보요소는 비교적 단순한 조건의 보문제에 자유도가 작다는 장점으로 적용이 될 수 있으나, 많은 실제적인 예에서와 같이 얇은 두께, 대변위문제, 두께방향의 하중, 형상의 변화 등의 조건에 대해서 적용상 어려운 점을 안고 있거나 또는 원래의 효용성이 상실되어 버린다. 이에 따라 보문제 또는 판문제에 대해 고체요소가 많이 적용되고 있다.^(1-3,16-21)

한편, 보문제에 적용이 가능한 고체요소로는 9절점요소,⁽¹⁻⁴⁾ 8절점요소,⁽¹⁻⁴⁾ 6절점 상당요소(Q6, QM6),^(2,3,16,17) 수정 6절점요소^(18,19) 등이 있으며, 4절점요소 또는 삼각요소들은 두께방향으로 많은 분할이 필요하여 실제적으로 적용이 되지 않고 있다. 고체요소는 일반적으로 잠김현상이 없는 것으로 알려져 있으며⁽²⁰⁾ 본 연구에서도 실제 계산을 통해 확인하였다. 대변위 문제에 있어서도 모든 자유도가 벡터량이므로, 어느 하중증분하에서, 이를 세분 선형화할 필요없이 서너번의 반복계산으로 오차를 보정하는 수법이 가능하다. 또한 두께방향의 하중에 대해 동일방향의 변위 및 응력이 계산된다. 그리고, 두께가 변하는 보에 대해 효과적인 적용이 가능하며 비대칭적인 단이 진 보문제도 두께방향으

로 요소를 분할하여 아무런 어려움없이 해석을 할 수 있다. 고체요소를 보문제에 적용하는 경우 보통은 두께방향으로 한층의 요소를 사용하나, 단이 진 보 등에서는 이층 혹은 다층의 요소로 분할하여 기존의 보요소에서 생길 수 있는 어려운 점을 쉽게 해결할 수 있다. 다만, 이 요소들의 단점은 요소당 자유도가 보요소에 비해 크다는 단점이 있으나 효과적인 적용이 가능한 분야가 다르므로 충분한 적용 근거를 찾을 수 있다.

본 연구에서는 비교적 단순한 조건의 문제는 물론 광범위한 경우에 대해 매우 효과적인 고체요소를 대상으로 하고 이들의 자유도를 최대한으로 줄인 수정 5절점 상당요소를 제안하고, 이 요소를 일반적인 두께는 물론 얇은 두께의 보문제, 비선형 대변위문제, 두께가 변하는 보문제 및 비대칭 단이 진 보문제에 적용하여 정적·동적특성을 알아본다. 이 요소의 자유도 수는 10으로 9절점요소의 18, 8절점요소의 16, 수정 6절점요소와 Q6요소의 12에 비해 상당히 축소되어 고체요소의 효용성을 더욱 높일 수 있을 것으로 생각된다.

2. 5절점 상당요소(MQM5)

굽힘문제에 적용된 연속체요소로는 9절점요소, 8절점요소, 수정 6절점요소 등이 있으며 이들 보다 작은 자유도를 가진 것으로는 6절점 상당요소(Q6)가 있다.^(3,16) 6절점 상당요소는 4절점요소에 자유도 4개를 추가한 것이며 이 요소의 자코비안을 수정하여 조각시험(patch test)에 통과하도록 한 것이 수정 6절점 상당요소(QM6)이다.^(3,17)

본 연구에서는 5절점 상당요소(Q5)를 제안하고 이 요소의 자코비안을 수정한 요소(QM5)를 이용하여 조각시험을 성공리에 수행하였다. 그리고 이 요소를 굽힘문제에 적용할때 발생하는 강성과잉현상을 적분점 수정을 통해 보정한 수정 5절점 상당요소(MQM5)를 개발하였다. 먼저 4절점요소에 대해 살펴본다.

Fig. 1과 같은 2차원 등매개 4절점요소의 변위장과 위치벡터는 식 (1)과 같이 표시된다.

$$\begin{aligned} \{u \ v\} &= \sum_{i=1}^4 h_i \{u_i \ v_i\}^T \\ \{x \ y\}^T &= \sum_{i=1}^4 h_i \{x_i \ y_i\}^T \end{aligned} \quad (1)$$

여기서,

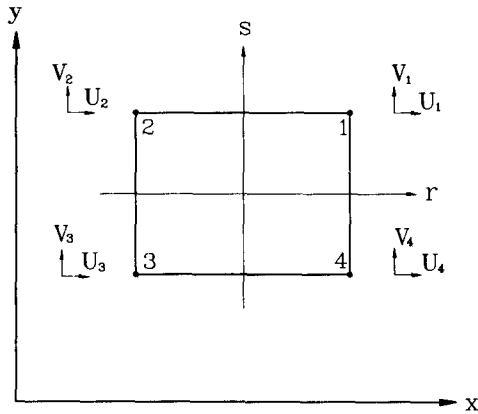


Fig. 1 Typical 4-node isoparametric element

$$h_1 = \frac{1}{4}(1+r)(1+s)$$

$$h_2 = \frac{1}{4}(1-r)(1+s)$$

$$h_3 = \frac{1}{4}(1-r)(1-s)$$

$$h_4 = \frac{1}{4}(1+r)(1-s) - 1 \leq (r, s) \leq +1$$

2차원 4절점 등매개변수 요소는 상대적으로 저차 요소이므로 굽힘 강성과잉현상이 발생된다. 따라서, 보요소로는 적합하지 않으므로 절점을 갖지 않는 자유도(nodeless degree of freedom)를 추가하여 강성과잉을 제거하여 사용된다. 비적합 변위모드를 추가하는 기본개념은 적분과정에서 인위적으로 전단에너지를 무시하는 것과는 달리 원래의 변위형태에 비적합 변위모드를 추가하여 전단변형모드가 우세한 변위모드까지 확장하여 실제의 굽힘변위를 표현가능케 하는 것이다. 4절점 등매개변수 요소에 식 (2)와 같이 각 변위당 2개, 전체 4개의 비적합 변위모드를 추가한 것이 기존의 Q6요소이다. (2,3,16,17)

$$h_5 = 1 - r^2, \quad h_6 = 1 - s^2 \quad (2)$$

여기서, 제안하는 Q5요소는 식 (3)과 같이 각 변위당 1개만의 비적합 변위모드를 추가하였다.

$$h_5 = 1 - r^2 \quad (3)$$

이는 굽힘문제에서 동시에 두 방향의 굽힘은 발생하지 않기 때문이며, 이렇게 하면 요소당 자유도가 20% 감소되며 전체적인 소요 기억용량은 20% 이상 줄일 수 있기 때문이다. 한편 $h_5 = (1 - r^2)$

$(1 - s^2)$ 를 사용한 5절점 상당요소가 있으나⁽¹⁶⁾ 이는 두께가 얇은 경우에는 전단잠김현상이 발생한다.

요소내의 변위장은 식 (4)와 같이 표시된다.

$$\{u \ v\}^T = \sum_{i=1}^4 h_i \{u_i \ v_i\}^T + h_5 \{a_1 \ a_2\}^T \quad (4)$$

여기서, $\{a_i\}$ 들은 무절점 자유도이며 형상함수는 식 (5)와 같다.

$$h_1 = (1+r+s+rs)/4$$

$$h_2 = (1-r+s-rs)/4$$

$$h_3 = (1-r-s+rs)/4$$

$$h_4 = (1+r-s-rs)/4$$

$$h_5 = 1 - r^2 \quad (5)$$

변형률은 변위의 도함수(gradient)로 정의되며 식 (6)과 같다.

$$\{\epsilon_{xx} \ \epsilon_{yy} \ 2\epsilon_{xy}\}^T = \sum_{i=1}^4 [B_i] \{u_i \ v_i\}^T + [G] \{a_1 \ a_2\}^T \quad (6)$$

여기서,

$$[B_i] = \begin{bmatrix} \frac{\partial h_i}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial h_i}{\partial y} \\ \frac{\partial h_i}{\partial y} & \frac{\partial h_i}{\partial x} \end{bmatrix}$$

$$[G] = \begin{bmatrix} \frac{\partial h_5}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial h_5}{\partial y} \\ \frac{\partial h_5}{\partial y} & \frac{\partial h_5}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (7)$$

무절점 자유도 $\{a_1 \ a_2\}^T$ 는 계의 자유도에 포함되지 않고 요소의 강성행렬 구성의 최종 단계에서 정적수축(static condensation)에 의해 소거된다. 추가적인 자유도 $\{a_1 \ a_2\}^T$ 는 관련된 절점이 없고, 절점하중도 없으므로 유한요소 평형방정식은 식 (8)과 같다.

$$\begin{bmatrix} K_{rr} & K_{ra} \\ K_{ar} & K_{aa} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{u_0\} \\ \{a_0\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \{r\} \\ \{0\} \end{bmatrix} \quad (8)$$

여기서, $\{u_0\}$ 는 요소의 4절점의 변위벡터이고, $\{a_0\}$ 는 비적합 변위에 의한 무절점 자유도이며, $\{r\}$ 은 절점에 작용하는 외력벡터이다. 식 (8)을 축소하여 $\{a_0\}$ 를 소거하면 식 (8)은 식 (9)와 같이 된다.

$$([K_{rr}] - [K_{ra}][K_{aa}]^{-1}[K_{as}])\{u_0\} = \{r\}$$

$$\{a_0\} = -[K_{aa}]^{-1}[K_{ar}]\{u_0\} \quad (9)$$

여기서, 조각시험(patch test)을 통과하기 위해서는 균일응력에 대해 $\{a_0\}$ 는 $\{0\}$ 이 되어야 하며, $[K_{aa}]$ 는 양의 값을 가지므로 $[K_{ar}]\{u_0\}$ 가 $\{0\}$ 이 되어야 한다.

$$[K_{ar}]\{u_0\} = \int_{V_0} [G]^T [D] \{u_0\} dV_0$$

$$\{0\} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [G]^T \{a_0\} t J dr ds \quad (10)$$

일반적인 형태의 4각형 요소에 대해 식 (10)이 만족되기 위해서는 $[G]$ 의 계산시 자코비안 $J = J_0$ ($r=s=0$)의 값을 사용하고 $dV_0 = t J_0 dr ds$ 를 사용해야 한다. (3,17) t 는 요소의 두께를 나타낸다.

3. 5절점 상당요소(QM5)의 가우스 적분점 수정식

제안된 QM5요소는 두께방향으로 상대적인 저차 요소임으로 상대적 강성과잉현상이 발생된다. 6절점요소의 강성과잉현상은 수치적분시 가우스 적분점 위치를 수정해 제거된 바 있다. (18,19) 여기에서도 동일한 원리를 적용하여 QM5요소의 가우스 적분점 수정식을 9절점요소와 QM5요소의 굽힘변형 에너지를 같게 됨으로써 구한다. 이를 위해 각 요소의 변형에너지를 구하기 위해 순수굽힘 상태에 있는 보 요소의 변형을 고려한다.

3.1 9절점요소에 의한 순수굽힘 상태의 표현

Fig. 2에 순수굽힘 하중을 받고 있는 9절점요소의 굽힘상태를 나타내었다.

Fig. 2에서와 같은 9절점요소의 절점 변위벡터 $\{U\}_9$ 는 식 (11)로 표시된다.

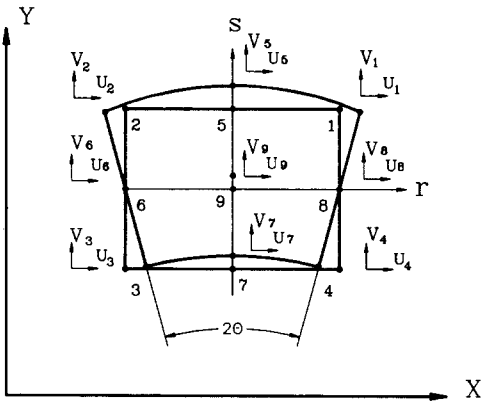


Fig. 2 Deformation of 9-node element under pure bending

$$\{U\}_9 = \left\{ \theta \frac{-\theta^2}{2} : -\theta \frac{-\theta^2}{2} : \theta \frac{\theta^2}{2} : -\theta \frac{\theta^2}{2} \right. \\ \left. : 0 \frac{\theta}{2} : 0 \ 0 : 0 \frac{\theta}{2} : 0 \ 0 : 0 \frac{\theta}{2} \right\}^T \quad (11)$$

여기서, θ 는 요소 양면의 굽힘각도이다.

9절점요소의 변위-변형률 행렬을 $[B]_9$ 라 하면 9절점요소의 변형률 $\{\epsilon\}_9$ 은 식 (12)와 같이 계산된다.

$$\{\epsilon\}_9 = [B]_9 \{U\}_9$$

$$= \begin{bmatrix} s \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \theta + \begin{bmatrix} 0 \\ -r^2/2 \\ -rs \end{bmatrix} \theta^2 = \begin{bmatrix} s \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \theta \quad (12)$$

9절점요소의 평면응력 $\{\sigma\}_9 = [D] \{\epsilon\}_9$ 이며, $[D]$ 는 구성물질의 특성행렬이다. 9절점요소의 등가절점력 $\{F\}_9$ 를 구하면 식 (13)과 같다.

$$\{F\}_9 = \int_{V_0} [B]_9^T [D] [B]_9 \{U\}_9 d(V) \\ = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N [B]_9^T [D] [B]_9 \{U_0\}_j W_i W_j t \\ = \sum_{j=1}^N \frac{JE\theta W_j t}{4(1-\nu^2)} \left[2s_j^2(1+s_j) \frac{2}{3} \nu s_j(1+2s_j) \right. \\ \left. : -2s_j^2(1-s_j) \frac{2}{3} \nu s_j(1+2s_j) \right. \\ \left. : 2s_j^2(1-s_j) - \frac{2}{3} \nu s_j(1-2s_j) \right. \\ \left. : -2s_j^2(1-s_j) - \frac{2}{3} \nu s_j(1-2s_j) \right. \\ \left. : 0 \frac{8}{3} \nu s_j(1+2s_j) \right. \\ \left. : -4s_j(1-s_j^2) - \frac{8}{3} \nu s_j^2 \right. \\ \left. : 0 - \frac{8}{3} \nu s_j(1-2s_j) \right. \\ \left. : 4s_j(1-s_j^2) - \frac{8}{3} \nu s_j^2 \right. \\ \left. : 0 - \frac{32}{3} \nu s_j^2 \right]^T \quad (13)$$

여기서, N 은 가우스 적분차수, W_i 와 W_j 는 수치적분의 가중치(weight factor), s_j 는 적분점(sampling point), J 는 자코비안행렬, E 는 탄성계수, ν 는 푸아송비, t 는 요소의 두께를 나타낸다.

식 (13)에 나타난 힘의 각 성분을 보면, 변위를 구속한 절점 6, 8에 Y 방향(s방향)의 하중들이 존재하며, 이 하중에 의해 각 모서리 절점에 부적합한 Y 방향의 하중들이 나타남을 알 수 있다. 이러한 힘과 변위의 관계를 Fig. 3에 나타내었다.

Fig. 3(a)는 각 절점의 등가절점력을, Fig. 3(b)는 순수굽힘시의 변위를 나타낸다. 이로부터 적합한 등가절점력을 가지기 위해 절점 6, 8은 구속되지 않아야 한다. 부적합한 Y 방향의 하중들을 제거하기 위해 구속조건이 풀린 절점 6과 절점 8의 변위를 U_6, V_6, U_8, V_8 이라 하고, 절점 9의 Y 방향의 변위를 $V_9 = (\theta/2 + \delta)$ 라 한다면 변위벡터 $\{U\}_9$ 는 식 (14)와 같이 나타나며, 그때의 변형률을 $\{\epsilon\}_9$ 이라 두면 식 (15)와 같이 나타난다.

$$\{U\}_9 = \left\{ \theta \frac{-\theta^2}{2} : -\theta \frac{-\theta^2}{2} : \theta \frac{\theta^2}{2} : -\theta \frac{\theta^2}{2} : 0 \frac{\theta}{2} U_6 V_6 : 0 \frac{\theta}{2} : U_8 V_8 : 0 V_9 \right\}^T \quad (14)$$

$$\{\epsilon\}_9 = [B]_9 \{U\}_9 = \begin{bmatrix} s\theta \\ -2s\delta \\ 2rV - 2r\delta \end{bmatrix} \quad (15)$$

식 (15)의 계산에서 대칭적 위치에 있는 변위는 같으므로 $U_6 = U_8 = U$ 와 $V_6 = V_8 = V$ 로 두고 중립축 변위중 X축의 변위는 미소하므로 $U=0$ 으로 가정하였다.

수정된 변위에 대한 9절점요소의 응력은 $\{\sigma\}_9 = [D]_9 \{\epsilon\}_9$ 이고, 등가절점력 $\{F\}_9$ 은 식 (16)과 같이 계산된다.

$$\{F\}_9 = \int_{\Omega} [B]_9^T [D]_9 [B]_9 \{U\}_9 d(\Omega) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N [B]_9^T [D]_9 [B]_9 \{U\}_9 J W_i W_j t \quad (16)$$

Fig. 3에 나타난 부적합한 절점력을 없애기 위해서는 식 (16)의 계산에서 절점 6과 8의 y방향의 힘들이 0이 되어야 하고 이로부터 변위들은 $V = \delta = \nu\theta/2, V_9 = \theta \cdot (\nu + 1)/2$ 가 구해진다. 구해진 값들을 식 (16)에 대입하여 정리하면 식 (17)과 같이 등가절점력이 구해진다.

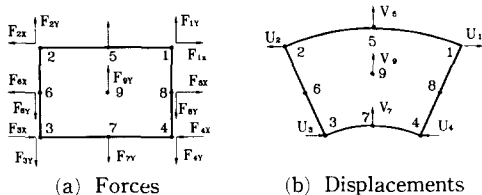


Fig. 3 Forces and displacements of the nodes

$$\{F\}_9 = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \frac{JE\theta W_i W_j t}{4(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} s_j^2(1+s_j)(1+2r_i)(1-\nu^2) \\ 0 \\ -s_j^2(1+s_j)(1-2r_i)(1-\nu^2) \\ 0 \\ s_j^2(1-s_j)(1-2r_i)(1-\nu^2) \\ 0 \\ -s_j^2(1-s_j)(1+2r_i)(1-\nu^2) \\ 0 \\ -4r_i s_j^2(1+s_j)(1-\nu^2) \\ 0 \\ -2s_j(1-s_j^2)(1-2r_i)(1-\nu^2) \\ 0 \\ 4r_i s_j^2(1-s_j)(1-\nu^2) \\ 2s_j(1-s_j^2)(1+2r_i)(1-\nu^2) \\ -8r_i s_j(1-s_j^2)(1-\nu^2) \\ 0 \end{bmatrix} = \sum_{j=1}^N \frac{JE\theta W_j t}{4(1-\nu^2)} [s_j^2(1-\nu^2) \ 0 : -s_j^2(1-\nu^2) \ 0 : s_j^2(1-\nu^2) \ 0 : -s_j^2(1-\nu^2) \ 0 : 0 \ 0 : 0 \ 0 : 0 \ 0 : 0 \ 0 : 0 \ 0] \quad (17)$$

식 (17)의 등가 절점력에 의한 요소의 변형에너지는 식 (18)과 같다.

$$E_9 = \frac{1}{2} \{U\}_9^T [K]_9 \{U\}_9 = \frac{1}{2} \{U\}_9^T \{F\}_9 \quad (18)$$

3.2 QM5요소에 의한 순수굽힘 상태의 표현

Fig. 4에 순수굽힘 하중을 받는 QM5요소의 굽힘 상태를 나타내었다.

Fig. 4에서 QM5요소의 변위벡터 $\{U\}_5$ 는 식 (19)

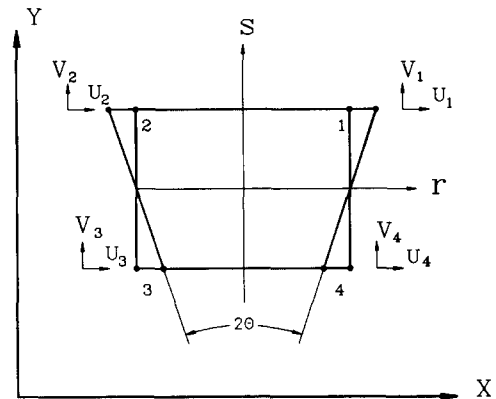


Fig. 4 Deformation of QM5 element under pure bending

로 나타낼 수 있다.

$$\{U\}_s = \{\theta \ 0 \ 0 \ -\theta \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0\}^T \quad (19)$$

QM5요소의 변위-변형률 행렬을 $[B]_s$ 라 하면 QM5요소의 변형률 $\{\epsilon\}_s$ 는 식 (20)으로 계산된다.

$$\{\epsilon\}_s = [B]_s \{U\}_s = \begin{bmatrix} s\theta \\ 0 \\ r\theta \end{bmatrix} \quad (20)$$

QM5요소의 등가절점력 $\{F\}_s$ 는 9절점요소와 같은 계산 절차를 따르면 식 (21)과 같이 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} \{F\}_s &= \int_{V_0} [B]_s^T [D] [B]_s \{U\}_s d(V) \\ &= \sum_{j=1}^N \frac{JE\theta W_{jt}}{4(1-\nu^2)} [s_j^2 \ 0 \ 0 \ -s_j^2 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0] \\ &\quad \vdots \ -s_j^2 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \end{aligned} \quad (21)$$

QM5요소의 변형에너지를 구하면 식 (22)와 같다.

$$E_s = \frac{1}{2} \{U\}_s^T [K]_s \{U\}_s = \frac{1}{2} \{U\}_s^T \{F\}_s \quad (22)$$

식 (18)의 9절점요소의 변형에너지와 식 (22)의 QM5요소의 변형에너지를 같아야 하므로 식 (23)과 같은 힘의 평형관계가 성립되어야 한다.

$$\{F\}_{9r} = \{F\}_{5r} \quad (23)$$

여기서, $\{F\}_{5r}$ 는 $\{F\}_s$ 를 $\{F\}_{9r}$ 의 차원으로 확장한 것을 나타낸다. 식 (23)의 힘의 평형관계식에 9절점요소의 등가절점력 식 (17)과 QM5요소의 등가절점력 식 (22)를 대입하면, QM5요소의 두께방향 가우스 적분점의 위치 S_{j5} 와 9절점요소의 두께방향 가우스 적분점의 위치 S_{j9} 의 관계는 식 (24)와 같이 구해진다.

$$S_{j5} = S_{j9} (1 - \nu^2)^{\frac{1}{2}} \quad (24)$$

이와 같이 5절점 상당요소와 9절점요소의 굽힘에너지 등가로부터 식 (24)와 같은 적분점이 수정된 QM5요소를 수정 5절점 상당요소(MQM5)라 한다.

4. 수치해석 결과 및 고찰

본 연구에서 제안된 MQM5요소의 적합성을 검토하기 위해 조각시험(patch test)을 실시하였다.

조각시험을 통해 해의 수렴을 보장하는 필요충분조건이 만족된 이들 요소를 이용하여 보의 정적해석 및 자유진동해석을 수행하였다. 이들 요소는 수치해석시 가우스 적분점의 수정과 함께 자유도 수를 줄이기 위해 정적 수축되었으며, 자코비안(Jacobian determinant)은 자연 좌표계 $r=s=0$ 인 경우의 값(MQM5)과 원래의 값(MQ5)을 병행하여 사용하였다.

4.1 요소의 완전성 검토

4.1.1 조각시험

유한요소해석에 사용된 형상함수는 구조물의 변형상태를 표현할 수 있는 최소한의 항들을 포함하여 기본적인 거동형태를 적절히 나타낼 수 있어야 한다. 제안된 요소들이 적합성을 만족하는지 여부를 검토하기 위해 조각시험(patch test)을 실시하였다. Fig. 5에는 MQM5 요소의 조각시험 모델을 나타내었다. 조각시험의 통과는 하중방향의 응력과 변위는 이론치를 보이고 다른 방향의 응력은 0이던 통과된 것으로 하였다.

Fig. 5의 조각시험 결과를 Table 1에 나타내었다.

Table 1에서 보는 바와 같이 제안된 요소는 조각시험을 통과함을 알 수 있다. 따라서 제안된 요소들은 해의 수렴이 보장되는 완전조건을 만족하는 요소임을 알 수 있다.

4.1.2. 요소의 비사각 분할의 영향 평가

조각시험을 통과한 제안된 요소의 굽힘변형에 대한 적용시 해의 정확성을 검증하기 위해 Fig. 6과 같은 일단이 고정되고 끝단에 집중하중 6N이 작용하는 외팔보를 해석하였다. 본 모델을 요소의 경계에 위치한 상하 절점을 좌우 반대방향으로 일정량씩 이동시키면서 유한요소해석을 수행하였다.

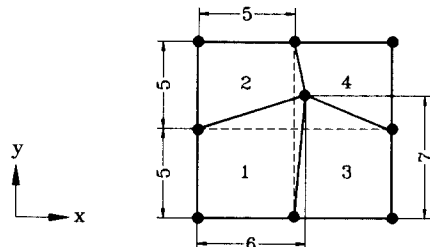


Fig. 5 Patch test model of MQM5 element

Table 1(a) Patch test result for load in x direction

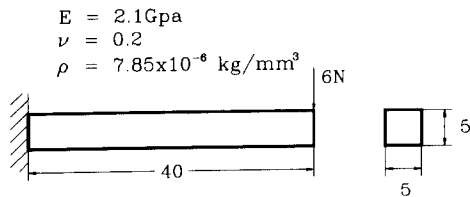
Number of element	σ_x	σ_y	σ_{xy}
1	0.400000	0.107384E-16	0.392648E-16
2	0.400000	0.781303E-17	0.156701E-16
3	0.400000	0.217142E-16	-0.745076E-16
4	0.400000	0.489382E-16	-0.667567E-16

Table 1(b) Patch test result for load in y direction

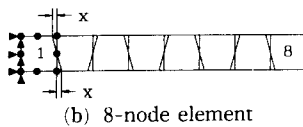
Number of element	σ_x	σ_y	σ_{xy}
1	0.330546E-16	0.400000	0.100626E-16
2	-0.206676E-16	0.400000	-0.139212E-16
3	-0.35101E-17	0.400000	0.869462E-17
4	0.154400E-17	0.400000	-0.502175E-16

Table 1(c) Patch test result for load in x-y direction

Number of element	σ_x	σ_y	σ_{xy}
1	0.578706E-16	-0.437123E-16	0.400000
2	0.299931E-16	0.428910E-16	0.400000
3	0.190765E-16	-0.266062E-15	0.400000
4	-0.298600E-15	0.284711E-15	0.400000



(a) Geometry and material properties



(b) 8-node element



(c) MQM5 element

Fig. 6 Geometry and finite element model of cantilever beam

Fig. 6의 모델에 대한 8절점요소와 MQM5 요소에 대해 요소분할의 변형정도를 변화시켜 가면서 끝단의 변위를 비교한 결과를 Table 2에 나타내었다. 제안된 요소들은 8절점요소에 비해 상대적으로 저차요소이므로 요소를 세분하였다.

Table 2에서 보는 바와 같이 MQM5요소는 요소의 경계면에 위치한 상하 절점이 좌우로 각각의 변형량이 25%까지도 기준치에 대해 별다른 오차가 발생치 않으며, 2차원 완전요소인 8절점요소에 버금가는 거동을 보여주어 변형된 요소에서도 적합함을 알 수 있으나 요소의 분할이 매우 거칠면 8절점요소와 공히 상당한 오차가 유발된다.

Table 3의 결과는 Fig. 6의 모델을 끝단에 0.06 N의 하중이 작용하고 길이/두께=80인 얇은 보의 경우로 해석한 결과인데 전단잠김현상이 발생하지 않음을 확인할 수 있었다. 또한 8절점요소의 총 방정식수와 소요 기억용량은 80과 860이며, MQM5

Table 2 Displacement error of 2-D trapezoidal mesh of MQM5 element

Distortion Element	0.0%(% error)	5.0%(% error)	10%(% error)	15%(% error)	20%(% error)	25%(% error)
8-node	1.17567(---)	1.17552(.013)	1.17491(.065)	1.17360(.18)	1.17055(.44)	1.16472(.93)
QM5	1.13335(3.6)	1.13332(3.6)	1.13365(3.6)	1.13394(3.6)	1.13418(3.5)	1.13131(3.8)
MQM5	1.18010(.38)	1.18004(.38)	1.18029(.39)	1.18044(.41)	1.18047(.41)	1.17713(.12)

Table 3 Displacement error of 2-D thin beam

Classification	8-node element	QM5 element		MQM5 element	
		Rectangular	Trapezoidal (10%)	Rectangular	Trapezoidal (10%)
Displacement mm(% error)	11.7570	11.3335(3.6)	11.3332(3.6)	11.8010(.37)	11.8004(.37)
Equation No.	80	64(20% reduction)			
Memory	860	400(53% reduction)			

요소는 64와 400으로 각각 20%와 53%가 줄어들 수 있다.

4.2 정적해석

4.2.1 비대칭 보의 해석

4.1절에서 요소의 완전성이 확인된 MQM5 요소를 이용하여 실제 모델에서의 정확도를 평가하기 위해 Taylor 등⁽¹⁷⁾에 의해 QM6요소의 해석에 이용된 Fig. 7과 같은 경사진 형태의 외팔보를 해석하였다. 이러한 형상의 외팔보를 포함하여 브리지(bridge)형태의 가속도센서와 같은 비대칭형의 보나, 구조물의 중앙에 구멍이 있는 불연속 모델의 경우, 특히 두께방향의 변형을 고려해야 될 필요성이 있는 경우에는 현재 2차원 구조요소로 많이 사용되고 있는 보요소로는 해석이 실질적으로 불가능하며 연속체 요소들의 사용이 불가피하다.

Fig. 7의 유한요소해석의 적분차수는 2×2 차의 가우스 적분을 사용하였다. 요소의 분할은 8절점 요소는 가로 \times 세로로 4×4 요소이고, MQM5요소와 QM6요소 모델은 8절점 요소의 절점이 위치하는 곳에 이들의 절점이 위치하도록 8×8 요소로 분할하였다. Fig. 7의 모델의 하중이 작용하는 자유단 중앙 절점의 변위를 비교한 결과를 Table 4에 나타내었다.

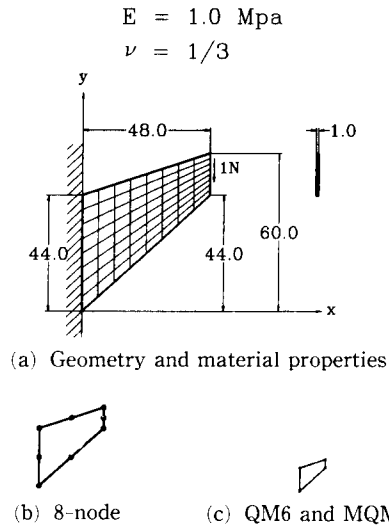
**Fig. 7** Geometry and finite element of inclined beam

Table 4에서 보는 바와 같이 제안된 MQ5요소 및 MQM5 요소는 8절점 요소에 대해 하중이 작용하는 끝단 중앙의 변위오차는 각각 0.21%와 0.74%를 나타내었다. 가우스 적분점을 수정하지 않은 Q5요소 및 QM5요소는 각각 0.57%와 1.09%의 오차를 나타내어 두께방향의 층수가 많은 경우는 가우스 적분점 수정을 하지 않아도 큰 영향이 없음

Table 4 Comparison of displacement of inclined cantilever beam

Element Jacobian	8-node	QM6 (% error)	QM5 (% error)	MQM5[MQ5] (% error)
J=J ₀	23, 7264	23, 0164 (.30)	23, 4673 (1.09)	23, 5507 (.74)
J=J		23, 4753 (1.06)	23, 5922 (.57)	23, 5922 (.21)

J : Jacobian determinant, conventional J₀ : Jacobian determinant at r, s=0

Table 5 Comparison of center displacement of fixed beam

Element Mesh form	8-node(% error)	QM6(% error)	QM5(% error)	MQM5(% error)
Rectangular	.301818(---)	.302398(.19)	.289151(4.2)	.300743(.36)
Trapezoidal	.301666(.050)	.302369(.18)	.289017(4.2)	.300600(.40)

을 알 수 있다. 한편, 기존의 QM6요소는 0.30%, Q6요소는 1.06%를 나타내었다.

4.2.2 양단 고정보의 해석

양단이 완전히 고정되고 중앙에 집중하중이 작용하는 경우에 대한 해석을 수행하였다. 해석은 사각 요소와 요소의 경계면에 존재하는 상하부의 절점을 좌우로 10% 변형시킨 사다리꼴 요소에 의해 해석을 수행하였다. 8절점 요소는 8개의 요소로 등분하였고, 제안된 요소는 이 보다 세분하였다. 수치적분의 적분차수는 2×2차의 가우스 적분차수를 이용하였으며, 하중의 크기는 6N의 집중하중을 양단이 고정된 보의 중앙에 작용시켰다.

Fig. 8의 모델에 대한 해석 결과 중앙의 처짐량을 비교한 것을 Table 5에 나타내었다.

Table 5에서 보는 바와 같이 사각형 메쉬와 사다리꼴 메쉬의 경우에서 적분점 수정을 하지 않은 경우(QM5) 오차(4.2%)에 비해 적분점을 수정한 경우(MQM5)의 오차는 0.36%와 0.40%를 나타내어 해의 정확도가 현격히 개선됨을 알 수 있다. 한편 Fig. 8 모델의 두께를 2 mm(L/h=20)로 바꾸고 사각형 메쉬로 분할하여 하중을 1.2N씩 증가시키면서 비선형해석한 결과를 Fig. 9에, 사다리꼴 메쉬로 분할하여 하중을 1.2N씩 증가시키면서 비선형해석한 결과를 Fig. 10에 나타내었다.

Fig. 9와 Fig. 10의 결과에서 보는 바와 같이 수

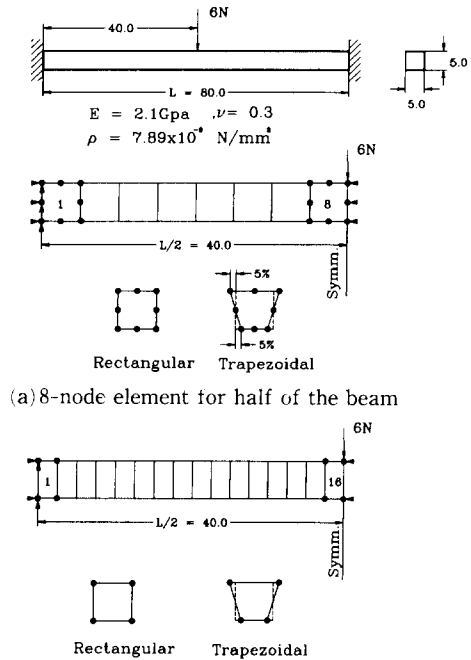


Fig. 8 Geometry and finite element of fixed beam

정 5절점 상당요소(MQM5)는 사각으로 분할된 요소와 비사각으로 분할된 요소의 비선형문제 해석에 있어서도 기존의 8절점요소의 결과와 잘 일치함을 알 수 있다.

4.2.3 테이퍼 보의 해석

요소의 형상이 비대칭적이고 각 요소의 두께가 일정치 않은 Fig. 11과 같은 테이퍼진 외팔보를 해석하였다. 강성행렬의 계산시 2×2차의 가우스 적분차수를 사용하였다. 하중은 끝단에 6N을 작용시켰다.

위 모델의 해석결과는 Table 6에 나타나 있으며, 표에서 보는 바와 같이 요소의 형상이 비대칭적으로 나타나는 테이퍼진 외팔보의 경우에도 큰 오차가 없이 잘 일치함을 알 수 있다. 그러나, 적

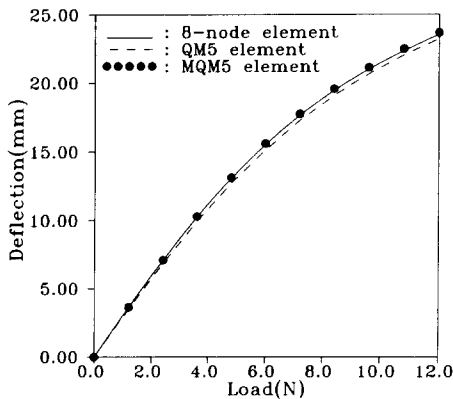


Fig. 9 Static nonlinear analysis results of rectangular element of a fixed beam

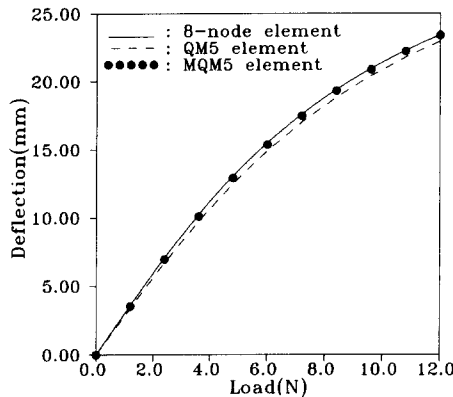


Fig. 10 Static nonlinear analysis results of trapezoidal element of a fixed beam

분점을 수정하지 않은 경우에는 오차가 5.1%로 수정한 경우의 오차 1.2%에 비해 상당히 크게 나타남을 알 수 있다.

4.3 자유진동해석

4.3.1 외팔보의 해석

자유진동 문제에서 제안된 MQM5 요소의 효율성을 확인하기 위해 Fig. 6에 나타난 외팔보 모델을 해석하였다. 사다리꼴의 요소분할에서는 요소와 요소의 경계면 상하에 존재하는 절점들을 좌우로 10% 이동시켰다. 강성행렬 등의 수치적분은 2×2차의 가우스 적분을 사용하였으며, 수치해석 결과를 Table 7에 정리하였다.

Table 7에서 보는 바와 같이 사각 및 사다리꼴 형태로 요소를 분할한 MQM5 요소의 고유진동수 해석 결과들은 8절점요소의 결과와 비교하여 보면 사각형 메쉬와 사다리꼴 메쉬에서 4차 모드에서 최대오차가 1.6%를 나타내어 잘 일치함을 알 수 있다. 따라서 제안된 요소들은 고유진동수 해석에서도 효과적임을 알 수 있다.

4.3.2 비대칭보의 해석

가속도센서와 같은 형태의 구조물은 구조물의 형

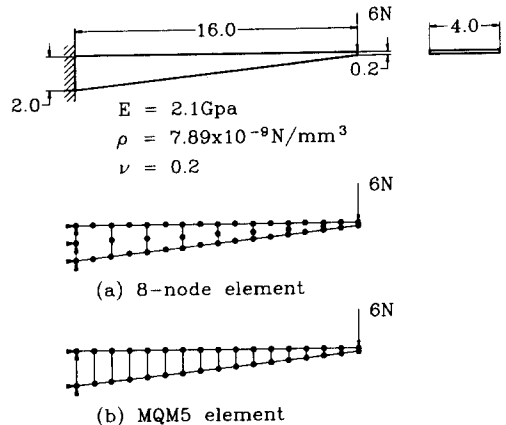


Fig. 11 Geometry and finite element of tapered beam

Table 6 Comparison of edge displacement of tapered beam

Classification	8-node element	QM5	MQM5
Displacement mm (% error)	4.79461(---)	4.55097(5.1)	4.73938(1.2)

상이 비대칭적으로 이루어졌으며, 특히 x방향의 가속도가 작용하는 진동문제 경우에는 구조용 보요소로는 해석이 어렵게 된다. 따라서 이러한 경우는

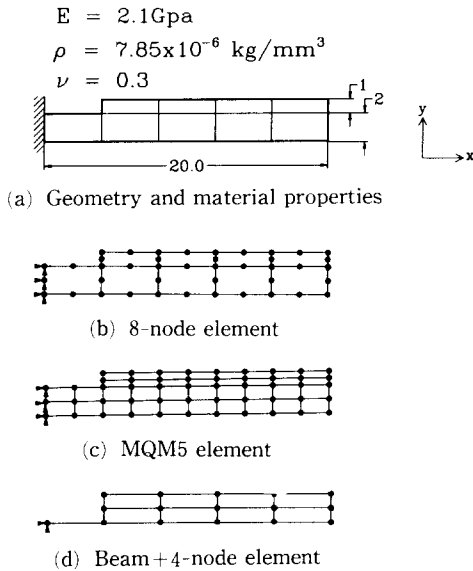


Fig. 12 Geometry and finite element of asymmetric cantilever beam

연속체요소가 효과적으로 사용된다. Fig. 12와 같이 끝단에 집중질량이 있는 비대칭 보의 고유진동수 해석을 수행하였다.

Fig. 12의 모델에 대한 고유진동수 해석결과를 Table 8에 나타내었다. 8절점요소 모델은 9개의 요소로 등분하였고 변형된 보요소 및 MQM5 요소는 이보다 세분하였다. 수치적분 차수는 2x2차의 가우스 적분차수를 사용하였다.

Table 8에서 보는 바와 같이 제안된 요소는 ANSYS의 8절점요소 결과와 비교하여 보면 4번째 고유진동수를 제외하고는 최대오차가 1.4%이고, 보요소의 경우는 1차 모드에서 오차가 4.7%로 상당히 큰을 알 수 있다. 따라서 위의 예와 같은 비대칭 보나 중앙에 구멍이 있는 경우, 두께 방향의 변형을 고려해야 하는 경우 등에서는 보요소는 적용이 곤란하고 연속체요소가 불가피함을 알 수 있다.

4.3.3 테이퍼 보의 해석

Fig. 11에 나타난 테이퍼 보의 고유진동수 해석 결과를 Table 9에 나타내었다.

Table 9에서 보는 바와 같이 일단이 고정된 테

Table 7 Comparison of natural frequencies of cantilever beam

Mesh form	Element	1st mode (Hz)	2nd mode (Hz)	3rd mode (Hz)	4th mode (Hz)
Rectangular	8-node	259.7	1538.8	3235.9	4006.4
	QM5(% error)	263.8(1.6)	1573.3(2.2)	3237.7(.056)	4131.2(3.1)
	MQM5(% error)	258.6(.42)	1545.5(.44)	3237.6(.053)	4068.5(1.6)
Trapezoidal	8-node(% error)	259.3(.15)	1538.2(.039)	3235.9(.00)	4001.7(.12)
	QM5(% error)	263.8(1.6)	1573.3(2.2)	3237.7(.056)	4131.5(3.1)
	MQM5(% error)	258.6(.42)	1545.5(.44)	3237.6(.053)	4068.9(1.6)

Table 8 Comparison of natural frequencies of asymmetric cantilever beam

Method	Element	1st mode (Hz)	2nd mode (Hz)	3rd mode (Hz)	4th mode (Hz)
Ansys	8-node	3943.0	31393.3	58016.7	81819.8
	Beam+4-node (% error)	3759.8(4.7)	33187.4(5.7)	60474.0(4.2)	87677.4(7.2)
Present	8-node(% error)	3934.0(.00)	31393.3(.00)	58016.7(.00)	81819.8(.00)
	QM5(% error)	3974.1(.79)	31990.0(1.9)	58626.5(1.1)	84897.9(3.8)
	MQM5(% error)	3931.8(.28)	31832.9(1.4)	58609.2(1.0)	84504.5(3.3)

Table 9 Comparison of natural frequencies of tapered cantilever beam

Element	1st mode(Hz)	2nd mode(Hz)	3rd mode(Hz)	4th mode(Hz)
8-node	8532.	27232.	59226.	105091.
QM5(% error)	8918. (4.5)	28488. (4.6)	62119. (4.9)	110702. (5.3)
MQM5(% error)	8513. (.22)	27232. (.00)	59509. (.47)	106374. (1.2)

이퍼 보의 고유진동수 해석 결과도 수정 5절점 상당요소(MQM5)는 8절점요소의 결과와 큰 오차(4차 모드에서 1.2%)가 없음을 알 수 있으나, 무수정 5절점 상당요소(QM5)는 오차(최대 5.3%)가 비교적 큼을 알 수 있다.

5. 결 론

본 연구에서는 보문제에 적용될 수 있는 기존의 고체요소(9절점요소, 8절점요소, 수정 6절점요소, Q6요소) 보다 자유도를 줄인 수정 5절점 상당요소를 제안하였다. 이 요소는 기존의 4절점요소에 1절점 상당자유도를 추가하였으며 이 자유도는 길이 방향 자유도의 제곱항이 포함된 형상함수를 가지고 있어 굽힘현상을 나타낼 수 있다. 그러나, 이 요소는 그대로 사용될 경우 9절점요소 등에 비해 절점의 축소(형상함수의 단순화)에 기인한 강성과잉 현상이 발생하며, 이는 변형에너지의 등가로부터 유도된 적분점 수정식을 사용함으로써 해결이 될 수 있었다. 이 요소를 얇은 두께의 보문제에 적용하여 잠김현상이 발생하지 않음을 확인하였다. 그리고 이 요소를 대변위 문제에 적용함으로써 구조용 보 요소의 선형화 세분화 과정이 필요없음을 보였다. 또한 이 요소를 비대칭 보의 고유치해석 문제에 적용하여, 보요소로 분할된 모델보다 정확한 결과를 보임을 확인하였다. 끝으로 이 요소를 두께가 변하는 테이퍼 보의 고유치해석 문제에 적용하고 그 결과를 8절점요소의 결과와 비교하여 잘 일치함을 확인하였다. 상기의 내용 및 계산결과를 정리하면 다음과 같다.

첫째, 수정 5절점 상당요소(MQM5)를 제안하고 이를 보문제에 적용한 결과 정확한 거동을 함을 알 수 있었다.

둘째, 수정 5절점 상당요소의 적분점 수정식은 변형에너지의 등가로부터 식 (24)와 같이 유도되었다.

셋째, 수정 5절점 상당요소는 전단잠김이 예상되는 얇은 보문제, 비선형 대변위문제, 두께가 변하는 보문제 및 비대칭단의 진 문제 등에서 효용성이 큼을 알 수 있었다.

넷째, 수정 5절점 상당요소는 Fig. 6과 같은 예에서 8절점요소에 비해 요소당 자유도는 38% 감소되며, 총방정식의 수는 20%, 총소요기억 용량은 53%가 감소함을 확인하였다.

후 기

위 논문은 한국학술진흥재단의 1995년도 기계공학분야 학술진흥조성비의 일부 연구비 지원에 의해 이루어진 것으로 지원에 감사드립니다.

참고문헌

- (1) Zienkiewicz, O. C., 1991, *The Finite Element Method*, 4th ed., Mcgraw-Hill Book Co., Vol. 1, Ch. 6~8.
- (2) Bathe, K. J., 1982, *Finite Element Procedures in Engineering Analysis*, Prentice-Hall Inc., Ch. 6~9.
- (3) Cook, R. D., Malkus, D. S. and Plesha, M. E., 1989, *Concepts and Applications of Finite Element Analysis*, 3rd ed., John Wiley & Sons, Ch. 5~6.
- (4) Reddy, J. N., 1993, *An Introduction to the Finite Element Method*, 2nd ed., McGraw-Hill Book Co..
- (5) Wood, R. D. and Zienkiewicz, O. C., 1976, "Geometrically Nonlinear Finite Element Analysis of Beams Frames, Arches and Axisymmetric Shell," *Computers & Structures*, Vol. 7, pp. 725~754.
- (6) Prathap, G. and Babu, C. R., 1986, "Field

- Consistent Strain Interpolation for the Quadratic Shear Flexible Beam Element," *Int. J. Num. Meth. Engng.*, Vol. 23, pp. 1973~1984.
- (7) Prathap, G. and Babu, C. R., 1986, "An Isoparametric Quadratic Thick Curved Beam Element," *Int. J. Num. Meth. Engng.*, Vol. 23, pp. 1583~1600.
- (8) 민옥기, 김용우, 유동규, 1989, "곡선보의 강성과잉현상과 고유치에 대한 연구," 대한기계학회논문집, 제14권, 제2호, pp. 310~323.
- (9) 양승용, 신호철, 1993, "곡률 곡선보요소에 의한 곡선보의 고유치문제 해석," 대한기계학회논문집, 제17권, 제12호, pp. 3020~3027.
- (10) Bathe, K. J. and Bolourchi, S., 1983, "A Geometric and Material Nonlinear Plate and Shell Element," *Computers & Structures*, Vol. 11, pp. 23~48.
- (11) Malkus, D. S. and Hughes, T. J. R., 1978, "Mixed Finite Element Method-Reduced and Selective Integration Techniques: A Unification of Concepts," *Comp. Meth. App. Mech. & Engng.*, Vol. 15, No. 1, pp. 63~81.
- (12) Huang, H. C., 1989, *Static and Dynamic Analyses of Plates and Shells-Theory*, Software and Applications, Springer-Verlag.
- (13) Surana, K. S., 1983, "Geometrically Nonlinear Formulation for Curved Shell Element," *Int. J. Num. Meth. Engng.*, Vol. 19, pp. 581~615.
- (14) Seidel, H. and Csepregi, L., 1984, "Design Optimization for Cantilever-Type Accelerometers," *Sensors and Actuators*, Vol. 6, pp. 81~92.
- (15) Thomas Tschan, Nico De Rooij and Alex Bezing, 1992, "Analytical and FEM Modeling of Piezoresistive Silicon Accelerometers: Predictions and Imitations Compared to Experiments", *Sensors and Materials*, Vol. 3, No. 4, pp. 189~203.
- (16) Cook, R. D., 1974, "Improved Two-Dimensional Finite Element," *J. Struct. Div., ASCE*, Vol. 100.
- (17) Taylor, R. L., Beresford, P. J. and Wilson, E. L., 1976, "A Non-Conforming Element for Stress Analysis," *Int. J. Num. Meth. Engng.*, Vol. 10, pp. 1211~1219.
- (18) 김정운, 정래훈, 권영두, 1993, "6절점 2차원 Isoparametric요소의 가우스적분점 수정에 관하여," 대한기계학회논문집, 제17권, 제12호, pp. 3007~3019.
- (19) 김정운, 경진호, 권영두, 1994, "가우스 적분점을 수정한 2차원 6절점요소 및 3차원 16절점요소에 의한 자유진동해석," 대한기계학회논문집, 제18권, 제11호, pp. 2922~2931.
- (20) Ausserer, M. F. and Lee, S. W., 1988, "An Eighteen Node Solid Element for Thin Shell Analysis," *Int. J. Num. Meth. Engng.*, Vol. 26., pp. 1345~1364.
- (21) Kim, Y. H. and Lee, S. W., 1988, "A Solid Element Formulation for Large Deflection Analysis of Composite Shell Structures," *Computers & Structures*, Vol. 30, No. 112, pp. 269~274.