

〈논 문〉

비균질 구배기능 계면영역을 고려한 적층 반무한체의
동일선상 복수균열 해석

진태은* · 최형집* · 이강용**

(1995년 9월 28일 접수)

**The Problem of Collinear Cracks in a Layered Half-Plane with a
Functionally Graded Nonhomogeneous Interfacial Zone**

Tae Eun Jin, Hyung Jip Choi and Kang Yong Lee

Key Words : Layered Medium(적층재료), Collinear Cracks(동일선상 복수균열), Functionally Graded Nonhomogeneous Interfacial Zone(비균질 구배기능 계면영역), Stiffness Matrix Formulation(강성행렬방법), Singular Integral Equations(특이적분방정식), Stress Intensity Factors(응력세기계수)

Abstract

The plane elasticity problem of collinear cracks in a layered medium is investigated. The medium is modeled as a bonded structure constituted from a surface layer and a semi-infinite substrate. Along the bond line between the two dissimilar homogeneous constituents, it is assumed that an interfacial zone having the functionally graded, nonhomogeneous elastic modulus exists. The layered medium contains three collinear cracks, one in each constituent material oriented perpendicular to the nominal interfaces. The stiffness matrix formulation is utilized and a set of homogeneous conditions relevant to the given problem is readily satisfied. The proposed mixed boundary value problem is then represented in the form of a system of integral equations with Cauchy-type singular kernels. The stress intensity factors are defined from the crack-tip stress fields possessing the standard square-root singular behavior. The resulting values of stress intensity factors mainly address the interactions among the cracks for various crack sizes and material combinations.

1. 서 론

이종 접합재료(bonded dissimilar materials)의 역학적 거동에 대한 연구는 이러한 재료가 갖는 다양한 이점 및 공학적 응용에 따라 활발히 이루어지고 있다. 이종재료에 대한 확산접합(diffusion

bonding)의 경우, Wagner 등⁽¹⁾은 원래의 모재들과는 재질특성이 뚜렷이 구분되는 천이층(transitional phase)이 형성된다고 지적하였다. 또한 최근 Koizumi⁽²⁾의 논문에서 기술하고 있는 새로운 부류의 재료로서 위치에 따른 물성치의 점진적 변화를 나타내는 구배기능 복합재료(functionally graded composites)의 개발에 따라, Yang과 Shih⁽³⁾는 균질 이종재료의 접합시 구배기능 계면영역(functionally graded interfacial zone)을 도입 할

*회원, 한국전력기술(주) 전력기술개발연구소

**회원, 연세대학교 기계공학과

경우, 두 구성재료 사이의 현격한 물성치 차이로부터 발생할 수 있는 접합부위에서의 응력집중 등을 완화할 수 있다고 보고하였다.

그러나 접합재료의 균열문제에 대한 이전의 이론적 연구들은 서로 다른 균질의 물성치가 두께가 없는 이상적 계면을 따라 불연속을 형성하는 구조를 가정하여 왔다. 이러한 계면모델에 근거한 대표적인 연구들로서, Rice와 Sih⁽⁴⁾와 England⁽⁵⁾의 계면 상에 위치한 균열, Zak와 Williams⁽⁶⁾ 그리고 Cook과 Erdogan⁽⁷⁾의 계면에 수직한 균열 등을 들 수 있다. 결국 이상적 계면을 가정한 상기의 해석은 균열이 계면 상에 놓여 있거나 수직으로 접촉할 경우 각각 진동특이성(complex power singularity)이나 비역평방 특이성(nonsquare-root singularity)과 같은 물리적으로 온당치 못한 결과를 초래하였기 때문에, 기존의 균질재료에 대한 선형탄성 파괴역학의 기본 원리를 적용할 수 있는지에 대하여 많은 의문점들이 제기되었다.

여기서 언급할 것은, 서로 다른 두 재료 사이의 이상적 계면에 의해 야기된 모순점을 해결하기 위해, Atkinson⁽⁸⁾은 앞서 기술한 구배기능 계면영역과 유사한 비균질 중간층(nonhomogeneous interlayer)을 해당 접합재료 균열문제 해석에 이미 도입하였다. 따라서 비균질인 중간층을 통하여 전체 접합재료 내의 탄성계수가 연속적인 분포를 가질 경우, 균열형상에 관계없이 균열첨단에서의 응력장은 균질재료의 경우와 마찬가지로 역평방 특이성이 회복됨을 보였다.

이후 접합구조물에 존재하는 균열에 대한 추가적 연구로서 Delale과 Erdogan,^(9,10) Erdogan과 Ozturk⁽¹¹⁾ 그리고 Ozturk과 Erdogan⁽¹²⁾ 등이 비균질 계면층과 균질의 모재 사이의 가상계면(nominal interface) 부위에 균열을 평행하게 위치시키고, 면내 및 면외하중 상태를 가정하여 응력해석을 수행하였다. 또한 균질 및 비균질 반무한체 사이의 가상계면에 수직한 균열에 대해서도 Erdogan,⁽¹³⁾ Schovanec과 Walton,⁽¹⁴⁾ Erdogan^(15,16) 등, Gao와 Kuang,⁽¹⁷⁾ Kaw 등⁽¹⁸⁾ 그리고 Bechel과 Kaw 등⁽¹⁹⁾이 각종 해를 제시하였다. 최근에는 Choi 등⁽²⁰⁾과 Choi⁽²¹⁾가 수직형 균열이 내재된 균질 반무한체가 각각 균질 및 비균질 계면층을 매개로 하여 이중의 균질 표면층(surface layer)과 접합된 모델에 대하여 과도 열하중과 기계적 하중을 가정하여 응력세기계수를 산출하였다. 이상의 연구들에서도

Atkinson⁽⁸⁾의 결론과 마찬가지로 균열첨단 주위에서의 탄성계수 변화가 연속성을 유지할 때, 역평방 특이성이 존재함을 나타내었다. 그러나, 앞서 인용한 기존의 광범위한 연구들은 비록 재료의 비균질 특성을 계면영역 혹은 모재의 일부로서 반영하여 접합재료 균열문제 해석시 제기되었던 여러 가지 의문점들을 해소하였지만, 대부분 전체 접합구조물의 형태가 무한체⁽⁹⁻¹⁹⁾ 또는 반무한체^(20,21)로서 하나의 단일 균열만이 존재하는 경우에 국한되어 있거나, 그렇지 않은 경우 해석이 비교적 용이한 단순면외하중 상태 하에서 균열문제의 해석을 시도하였다.

따라서 본 논문에서는 구배기능 계면영역이 층이층으로 존재하는 접합재료 내부의 동일선상 복수균열(collinear cracks)에 대한 열림형 응력세기계수를 산출하였다. 이를 위하여 좌표에 따라 지수함수 형태로 탄성계수가 변화하는 비균질 계면층(non-homogeneous interfacial layer)을 통하여, 이중 균질의 유한한 표면층과 반무한 기층(substrate)이 접합되어 있다고 가정하였다. 또한 전체 적층 반무한체를 구성하는 세계의 구성층(constituent materials) 내부에는 각기 하나씩 모두 세계의 동일선상 균열이 가상계면에 수직방향으로 임의 크기로 존재한다고 간주하였다. 선형 탄성이론에 따라 복수균열을 내재한 적층재료의 체계적인 해석 절차로서 강성행렬방법(stiffness matrix method)을 도입하였다. 이러한 행렬방법이 다른 형태의 경계치 문제에 적용된 기존 예는 Kausel과 Seale,⁽²²⁾ Choi와 Thangjitham⁽²³⁻²⁵⁾ 그리고 Wang과 Rajapakse⁽²⁶⁾ 등에 의하여 보고된 바 있다. 결국 본 복수균열 문제에 대하여 Cauchy형 특이적분핵(singular kernel)을 지배항으로 하는 제1종 적분방정식계(a system of integral equations of the first kind)를 유도하였다. 주요 결과로서 응력세기계수를 특이적분방정식계의 해로부터 산출하여, 여러 가지 균열형상과 물성치 조합 등이 동일선상에 놓여 있는 복수균열에 미치는 영향을 균열들 사이의 상호작용과 함께 검토하였다.

2. 문제의 정의

균질의 표면층과 기층이 비균질 특성을 갖는 구배기능 계면층을 통하여 접합되어 있다고 가정한다. 표면층과 계면층은 각각 h_1 과 h_2 의 유한한 두

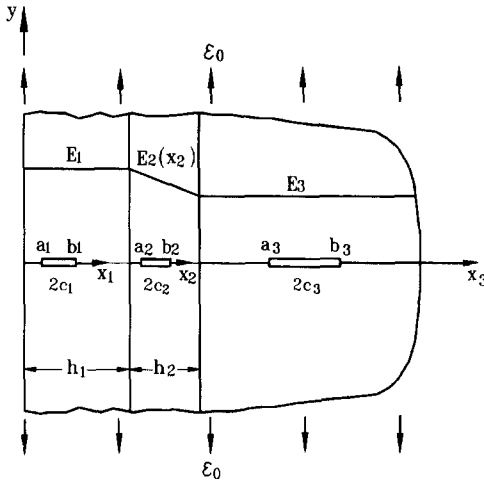


Fig. 1 Schematic of collinear cracks in a layered medium with a functionally graded, non-homogeneous interfacial zone.

계로 그리고 기층은 반무한체로 하여, 3개의 구성 재료 내부에는 Fig. 1과 같이 각각 길이 $2c_k = b_k - a_k$, $k=1, 2, 3$ 의 동일선상 균열이 가상계면에 수직인 방향으로 존재한다. 이때 각 구성재료의 탄성계수는 E_k , $k=1, 2, 3$ 으로 나타낸다. 본 복수균열 문제의 하중조건으로서 균열면에 수직인 방향으로 균일한 크기의 외부 인장변형률 ϵ_0 이 작용한다고 가정한다.

비균질 계면층의 탄성계수는 지수함수 형태로 가정한다.⁽¹⁵⁾

$$E_2(x) = E_0 e^{\beta x} \quad (1)$$

여기서, 상수 E_0 와 비균질 파라미터(nonhomogeneity parameter) β 는 $(x, y) = (x_k, y)$, $k=1, 2, 3$ 의 국부 좌표계에서 가상계면을 따라 탄성계수 연속성을 부과하면 아래와 같이 표현된다.

$$E_0 = E_1, \quad \beta = \frac{1}{h_2} \ln\left(\frac{E_3}{E_1}\right) \quad (2)$$

한편 푸아송비 변화가 균열선단의 특이 응력장에 미치는 영향은 무시할 수 있을 정도로 작다는 이전의 연구결과로부터,⁽²⁷⁾ 푸아송비는 $\nu = \nu_k$, $k=1, 2, 3$ 과 같이 모두 동일한 값을 갖는다고 가정한다.

3. 지배방정식과 일반해

식 (1)의 우변에 해당하는 탄성체의 평형방정식

은 변위성분의 향으로 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} \nabla^2 u_k + \frac{2}{x-1} \left(\frac{\partial^2 u_k}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_k}{\partial x \partial y} \right) \\ + \frac{\beta}{x-1} \left[(1+x) \frac{\partial u_k}{\partial x} + (3-x) \frac{\partial v_k}{\partial y} \right] = 0 \quad (3a) \\ \nabla^2 v_k + \frac{2}{x-1} \left(\frac{\partial^2 v_k}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_k}{\partial x \partial y} \right) + \beta \left(\frac{\partial v_k}{\partial x} + \frac{\partial u_k}{\partial y} \right) = 0; \\ k=1, 2, 3 \quad (3b) \end{aligned}$$

여기서, $u_k(x, y)$ 와 $v_k(x, y)$, $k=1, 2, 3$ 는 구성재료의 x 및 y 방향 변위성분이며, 평면변형률상태에서 $k=(3-4\nu)$ 그리고 평면응력상태에서 $k=(3-\nu)/(1+\nu)$ 이다. 또한 위의 지배방정식에서 균질의 표면층($k=1$)과 기층($k=3$)에 대해서는 $\beta=0$ 이고 비균질의 계면층($k=2$)에 대해서는 β 는 식(2)에 정의된다.

균열면을 중심으로 한 문제의 대칭성을 고려하여, 적층재료의 경계 및 계면조건은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \sigma_{1xx} = 0, \quad \tau_{1xy} = 0; \quad 0 \leq y < \infty \quad (4a) \\ u_k^+ = u_{k+1}^-, \quad v_k^+ = v_{k+1}^-; \quad k=1, 2, \quad 0 \leq y < \infty \quad (4b) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{kxx}^+ = \sigma_{(k+1)xx}^-, \quad \tau_{kxy}^+ = \tau_{(k+1)xy}^-; \quad k=1, 2, \\ 0 \leq y < \infty \quad (4c) \end{aligned}$$

$$\tau_{kxy}(x_k, 0) = 0; \quad 0 \leq x_k \leq h_k, \quad k=1, 2 \quad (5a)$$

$$\tau_{3xy}(x_3, 0) = 0; \quad 0 \leq x_3 < \infty \quad (5b)$$

$$u_k^+ = 0, \quad v_k^+ = 0; \quad \sqrt{x_k^2 + y_k^2} \rightarrow \infty \quad (5c)$$

$$\begin{aligned} v_k(x_k, 0) = 0; \quad 0 \leq x_k \leq a_k, \quad b_k \leq x_k \leq h_k, \\ k=1, 2 \quad (6a) \end{aligned}$$

$$v_3(x_3, 0) = 0; \quad 0 \leq x_3 \leq a_3, \quad b_3 \leq x_3 < \infty \quad (6b)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{kyy}(x_k, 0) = \sigma_k(x_k); \quad a_k \leq x_k \leq b_k, \\ k=1, 2, 3 \quad (6c) \end{aligned}$$

여기서, $\sigma_{kxx}(x_k, y)$, $\sigma_{kyy}(x_k, y)$ 및 $\tau_{kxy}(x_k, y)$, $k=1, 2, 3$ 는 응력성분을 나타내고, 상첨자 $-/+$ 은 구성재료의 왼쪽/오른쪽 표면을 지칭하며, 그리고 $\sigma_k(x_k)$, $k=1, 2, 3$ 는 주어진 외부 변형률 하중으로부터 중첩법에 의해 구할 수 있는 등가 균열면 응력(equivalent crack surface tractions)을 의미한다.

본 동일선상 복수균열에 대한 혼합 경계치문제를 적분방정식의 형태로 유도하기 위하여, 아래와 같이 보조함수들(auxiliary functions)을 정의한다.

$$\begin{aligned} \phi_k(x_k) = \frac{\partial}{\partial x_k} v_k(x_k, 0); \quad a_k \leq x_k \leq b_k, \\ k=1, 2, 3 \quad (7) \end{aligned}$$

이때 균열 외부면에서 변위연속성을 위한 적합조건 (compatibility condition)은 다음과 같다.

$$\int_{a_k}^{b_k} \phi_k(r) dr = 0; \quad k=1, 2, 3 \quad (8)$$

3.1 균질재료의 일반해

균질의 구성재료 ($\beta=0$, $x=x_k$, $k=1, 3$)에 대한 변위성분 일반해는 식 (3)의 지배방정식 해로서 다음과 같이 구해진다.

$$u_k = -\frac{2}{\pi} \int_0^\infty \left[\left(A_{k1} + xB_{k1} - \frac{x}{s} B_{k2} \right) \sinh sx + \left(A_{k2} + xB_{k2} - \frac{x}{s} B_{k1} \right) \cosh sx \right] \cos sy \, ds + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \left(\frac{1-x}{2|s|} + y \right) H_k e^{-|s|y - isx} \, ds \quad (9a)$$

$$v_k = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \left[\left(A_{k1} + xB_{k1} \right) \cosh sx + \left(A_{k2} + xB_{k2} \right) \sinh sx \right] \sin sy \, ds - \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \frac{s}{|s|} \left(\frac{1+x}{2|s|} + y \right) H_k e^{-|s|y - isx} \, ds; \quad k=1, 3 \quad (9b)$$

그리고 해당 응력성분은 아래와 같다.

$$\sigma_{kxx} = -\frac{4\mu_k}{\pi} \int_0^\infty \left\{ \left[s(A_{k1} + xB_{k1}) - \left(\frac{1+x}{2} \right) B_{k2} \right] \cosh sx + \left[s(A_{k2} + xB_{k2}) - \left(\frac{1+x}{2} \right) B_{k1} \right] \sinh sx \right\} \cos sy \, ds - \frac{\mu_k i}{\pi} \int_{-\infty}^\infty \left(sy - \frac{s}{|s|} \right) H_k e^{-|s|y - isx} \, ds \quad (10a)$$

$$\sigma_{kyy} = \frac{4\mu_k}{\pi} \int_0^\infty \left\{ \left[s(A_{k1} + xB_{k1}) + \left(\frac{3-x}{2} \right) B_{k2} \right] \cosh sx + \left[s(A_{k2} + xB_{k2}) + \left(\frac{3-x}{2} \right) B_{k1} \right] \sinh sx \right\} \cos sy \, ds + \frac{\mu_k i}{\pi} \int_{-\infty}^\infty \left(sy + \frac{s}{|s|} \right) H_k e^{-|s|y - isx} \, ds \quad (10b)$$

$$\tau_{kxy} = \frac{4\mu_k}{\pi} \int_0^\infty \left\{ \left[s(A_{k2} + xB_{k2}) + \left(\frac{1-x}{2} \right) B_{k1} \right] \cosh sx + \left[s(A_{k1} + xB_{k1}) + \left(\frac{1-x}{2} \right) B_{k2} \right] \sinh sx \right\} \sin sy \, ds - \frac{\mu_k}{\pi} \int_{-\infty}^\infty |s| y H_k e^{-|s|y - isx} \, ds; \quad k=1, 3 \quad (10c)$$

여기서 $\mu_k = E_k/2(1+\nu)$ 는 전단계수, s 는 무리예 변수, (28) $A_{kj}(s)$ 와 $B_{kj}(s)$, $k=1, 3$, $j=1, 2$ 는 임의

미지함수, 그리고 식 (7)과 (9b)로부터 또 다른 미지함수 $H_k(s)$, $k=1, 3$ 는 보조함수의 항으로 나타낼 수 있다.

$$H_k(s) = -\frac{2}{1+x} \int_{a_k}^{b_k} \phi_k(r) e^{isr} \, dr; \quad k=1, 3 \quad (11)$$

또한, 반무한 형태의 기층 ($k=3$)에 대해서는, 식 (5c)의 정규조건 (regularity condition)을 부과하여 식 (9)와 (10)의 일반해로부터 2개의 미지함수를 제거할 수 있다.

3.2 비균질 재료의 일반해

비균질 계면층 ($\beta \neq 0$, $x=x_2$)의 변위 및 응력성분 일반해는 다음과 같다.

$$u_2 = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \sum_{j=1}^4 m_j e^{n_j x} F_j \cos sy \, ds + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \left[l_2 e^{r_2 y} - l_1 \left(\frac{l_2 r_2 - is}{l_1 r_1 - is} \right) e^{r_1 y} \right] \times H_2 e^{-isx} \, ds \quad (12a)$$

$$v_2 = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \sum_{j=1}^4 n_j e^{n_j x} F_j \sin sy \, ds + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \left[e^{r_2 y} - \left(\frac{l_2 r_2 - is}{l_1 r_1 - is} \right) e^{r_1 y} \right] \times H_2 e^{-isx} \, ds \quad (12b)$$

$$\sigma_{2xx} = \frac{2\mu_0 e^{\beta x}}{\pi(x-1)} \int_0^\infty \sum_{j=1}^4 \left[(1+x) m_j n_j + s(3-x) \right] e^{n_j x} F_j \cos sy \, ds + \frac{\mu_0 e^{\beta x}}{2\pi(x-1)} \times \int_{-\infty}^\infty \left\{ [(3-x)r_2 - i(1+x)sl_2] e^{r_2 y} - [(3-x)r_1 - i(1+x)sl_1] \times \left(\frac{l_2 r_2 - is}{l_1 r_1 - is} \right) e^{r_1 y} \right\} H_2 e^{-isx} \, ds \quad (13a)$$

$$\sigma_{2yy} = \frac{2\mu_0 e^{\beta x}}{\pi(x-1)} \int_0^\infty \sum_{j=1}^4 \left[s(1+x) + (3-x) m_j n_j \right] e^{n_j x} F_j \cos sy \, ds + \frac{\mu_0 e^{\beta x}}{2\pi(x-1)} \int_{-\infty}^\infty \left\{ [(1+x)r_2 - i(3-x)sl_2] e^{r_2 y} - [(1+x)r_1 - i(3-x)sl_1] \times \left(\frac{l_2 r_2 - is}{l_1 r_1 - is} \right) e^{r_1 y} \right\} H_2 e^{-isx} \, ds \quad (13b)$$

$$\tau_{2xy} = \frac{2\mu_0 e^{\beta x}}{\pi} \int_0^\infty \sum_{j=1}^4 (n_j - sm_j) e^{n_j x} F_j \sin sy \, ds + \frac{\mu_0 e^{\beta x}}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty (l_2 r_2 - is) (e^{r_2 y} - e^{r_1 y}) H_2 e^{-isx} \, ds \quad (13c)$$

여기서, $\mu_0 = E_1/2(1+\nu)$, $F_j(s)$, $j=1, \dots, 4$ 과 $H_2(s)$

는 임의 미지함수, 그리고 $n_j(s)$, $j=1, \dots, 4$ 과 $r_j(s)$, $j=1, 2$ 는 특성 방정식(characteristic equations)의 근으로서 다음과 같다.

$$n_j = -\frac{1}{2}(\beta + \gamma_1 \cos \theta_1) + (-1)^{j+1} \frac{i}{2} \gamma_1 \sin \theta_1 ;$$

$$\operatorname{Re}(n_j) < 0, \quad j=1, 2 \quad (14a)$$

$$n_j = -\frac{1}{2}(\beta - \gamma_1 \cos \theta_1) + (-1)^{j+1} \frac{i}{2} \gamma_1 \sin \theta_1 ;$$

$$\operatorname{Re}(n_j) > 0, \quad j=3, 4 \quad (14b)$$

$$r_j = -\frac{1}{2} \left[(-1)^{j+1} \beta \sqrt{\frac{3-x}{1+x}} + \gamma_2 \cos \theta_2 + i \gamma_2 \sin \theta_2 \right] ;$$

$$\operatorname{Re}(r_j) < 0, \quad j=1, 2 \quad (14c)$$

또한 위의 특성근에 대해, $m_j(s)$, $j=1, \dots, 4$ 과 $l_j(s)$, $j=1, 2$ 는 다음과 같이 주어진다.

$$m_j = \frac{(x-1)(n_j^2 + \beta n_j) - (x+1)s^2}{[2n_j + (x-1)\beta]s} ; \quad j=1, \dots, 4 \quad (15a)$$

$$l_j = \frac{(1+x)r_j^2 + (1-x)(s+i\beta)s}{r_j[2is + \beta(1-x)]} ; \quad j=1, 2 \quad (15b)$$

이때 $i = (-1)^{1/2}$ 그리고 $\theta_j(s)$ 와 $\gamma_j(s)$, $j=1, 2$ 는 아래와 같다.

$$\theta_1 = \frac{1}{2} \tan^{-1} \left(\frac{4\beta s}{\beta^2 + 4s^2} \sqrt{\frac{3-x}{1+x}} \right) \quad (16a)$$

$$\theta_2 = \frac{1}{2} \tan^{-1} \left[\frac{4\beta s(1+x)}{\beta^2(3-x) + 4s^2(1+x)} \right] \quad (16b)$$

$$\gamma_1 = \left[(\beta^2 + 4s^2)^2 + 16\beta^2 s^2 \left(\frac{3-x}{1+x} \right) \right]^{1/4} \quad (16c)$$

$$\gamma_2 = \left[\left[\beta^2 \left(\frac{3-x}{1+x} \right) + 4s^2 \right]^2 + 16\beta^2 s^2 \right]^{1/4} \quad (16d)$$

균질재료의 경우와 마찬가지로, 미지함수 $H_2(s)$ 는 보조함수의 항으로 다음과 같이 표현된다.

$$H_2(s) = \frac{i}{s} \left(\frac{l_1 r_1 - is}{l_1 r_1 - l_2 r_2} \right) \int_{a_2}^{b_2} \phi_2(r) e^{isr} dr \quad (17)$$

4. 강성행렬방법

이상의 일반해들은 식 (5a), (5b)를 만족함을 알 수 있다. 또한 식 (5c)의 정규조건을 부과한 후, 일단의 균일조건(homogeneous conditions)인 식 (4)를 적용할 경우, 일반해에 포함된 나머지 10개의 미지함수들을 보조함수 ϕ_k , $k=1, 2, 3$ 의 항으로 구할 수 있다. 그러나 이러한 복잡한 수식 전개 과정에서 수반되는 어려움을 극복하기 위한 체계적

방법으로, 강성행렬방법^(23~25)을 본 적층구조물의 동일 선상 복수균열 해석에 확대, 적용한다. 이를 위하여 우선 다음과 같은 변위와 응력성분 벡터들을 정의한다.

$$\bar{\mathbf{d}}_k = \{\bar{u}_k \quad \bar{v}_k\}, \quad \bar{\boldsymbol{\sigma}}_k = \{\bar{\sigma}_{kxx} \quad \bar{\tau}_{kxy}\} ; \quad k=1, 2, 3 \quad (18)$$

여기서, $\bar{\mathbf{d}}_k(x_k, s)$ 과 $\bar{\boldsymbol{\sigma}}_k(x_k, s)$ 는 푸리에변환 영역인 (x_k, s) 에서 구성재료의 변위와 트랙션을 포함하는 벡터이다.

각 구성재료 좌(-)/우(+)표면에서의 변위 $\bar{\mathbf{d}}_k^\mp(s)$ 와 트랙션 $\bar{\boldsymbol{\sigma}}_k^\mp(s)$ 을 요소로 하는 두개의 벡터는 해당 일반해에 포함된 미지함수의 항으로서 두개의 행렬식 형태로 나타낼 수 있다. 이어서 두 행렬식으로부터 미지함수를 소거하면, 각 구성재료 동일 표면에서의 변위와 트랙션 사이의 관계를 나타내는 다음의 국부 강성행렬식(local stiffness matrix equations)을 얻을 수 있다.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11}^{(k)} & \mathbf{K}_{12}^{(k)} \\ \mathbf{K}_{21}^{(k)} & \mathbf{K}_{22}^{(k)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{\mathbf{d}}_k^- \\ \bar{\mathbf{d}}_k^+ \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \mathbf{f}_k^- \\ \mathbf{f}_k^+ \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{\boldsymbol{\sigma}}_k^- \\ -\bar{\boldsymbol{\sigma}}_k^+ \end{Bmatrix} ;$$

$$k=1, 2 \quad (19a)$$

$$\mathbf{K}_{11}^{(3)} \bar{\mathbf{d}}_3^- - \mathbf{f}_3^- = \bar{\boldsymbol{\sigma}}_3^- \quad (19b)$$

여기서, $\mathbf{K}_{lm}^{(k)}(s)$, $k, l, m=1, 2$ 는 대칭인 4×4 국부 강성행렬을 구성하는 표면층($k=1$)과 계면층($k=2$)의 2×2 소행렬을 그리고 $\mathbf{K}_{11}^{(3)}(s)$ 는 반무한 기층($k=3$)에 대한 대칭인 2×2 국부 강성행렬을 나타내며, 이들은 푸리에변수 그리고 구성재료의 탄성 계수 및 두께의 함수이다.

또한, 위의 행렬식에서 $\{\mathbf{f}_k^-(s) \quad \mathbf{f}_k^+(s)\}$, $k=1, 2$ 와 $\mathbf{f}_3^-(s)$ 는 각각 4단 및 2단 벡터로서 다음과 같다.

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{f}_k^- \\ \mathbf{f}_k^+ \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11}^{(k)} & \mathbf{K}_{12}^{(k)} \\ \mathbf{K}_{21}^{(k)} & \mathbf{K}_{22}^{(k)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{g}_k^- \\ \mathbf{g}_k^+ \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \mathbf{h}_k^- \\ \mathbf{h}_k^+ \end{Bmatrix} ;$$

$$k=1, 2 \quad (20a)$$

$$\mathbf{f}_3^- = \mathbf{K}_{11}^{(3)} \mathbf{g}_3^- - \mathbf{h}_3^- \quad (20b)$$

여기서, $\{\mathbf{g}_k^-(s) \quad \mathbf{g}_k^+(s)\}$, $\{\mathbf{h}_k^-(s) \quad \mathbf{h}_k^+(s)\}$, $k=1, 2$ 그리고 $\mathbf{g}_3^-(s)$, $\mathbf{h}_3^-(s)$ 는 역시 벡터로서 아래와 같다.

$$\begin{aligned} \{\mathbf{g}_k^- \quad \mathbf{g}_k^+\} &= \{g_{k1}^- \quad g_{k2}^- \quad g_{k1}^+ \quad g_{k2}^+\}, \\ \{\mathbf{h}_k^- \quad \mathbf{h}_k^+\} &= \{h_{k1}^- \quad h_{k2}^- \quad h_{k1}^+ \quad h_{k2}^+\} ; \quad k=1, 2 \\ \mathbf{g}_3^- &= \{g_{31}^- \quad g_{32}^-\}, \quad \mathbf{h}_3^- = \{h_{31}^- \quad h_{32}^-\} \end{aligned} \quad (21)$$

이때 $g_{kj}^{\pm}(s)$, $j=1, 2$ 는 보조함수 ϕ_k , $k=1, 2, 3$ 의 항으로 다음과 같이 표현되며

$$g_{k1}^{-}(s) = \frac{1}{x+1} \int_{a_k}^{b_k} \left(\frac{x-1}{2s} + r \right) e^{-sr} \phi_k(r) dr \quad (22a)$$

$$g_{k2}^{-}(s) = \frac{1}{x+1} \int_{a_k}^{b_k} \left(\frac{x+1}{2s} - r \right) e^{-sr} \phi_k(r) dr ; \quad k=1, 3 \quad (22b)$$

$$g_{11}^{+}(s) = \frac{1}{x+1} \int_{a_1}^{b_1} \left(\frac{x-1}{2s} + h_1 - r \right) e^{-s(h_1-r)} \phi_1(r) dr \quad (22c)$$

$$g_{12}^{+}(s) = \frac{1}{x+1} \int_{a_1}^{b_1} \left(h_1 - r - \frac{x+1}{2s} \right) e^{-s(h_1-r)} \phi_1(r) dr \quad (22d)$$

$$g_{2j}^{-}(s) = \frac{1}{2\pi} \int_{a_2}^{b_2} p_j(0, s, r) \phi_2(r) dr \quad (23a)$$

$$g_{2j}^{+}(s) = \frac{1}{2\pi} \int_{a_2}^{b_2} p_j(h_2, s, r) \phi_2(r) dr ; \quad j=1, 2 \quad (23b)$$

그리고 $h_{kj}^{\pm}(s)$, $j=1, 2$ 는 아래와 같다.

$$h_{k1}^{-}(s) = \frac{2\mu_k}{x+1} \int_{a_k}^{b_k} s r e^{-sr} \phi_k(r) dr \quad (24a)$$

$$h_{k2}^{-}(s) = \frac{2\mu_k}{x+1} \int_{a_k}^{b_k} (1-sr) e^{-sr} \phi_k(r) dr ; \quad k=1, 3 \quad (24b)$$

$$h_{11}^{+}(s) = \frac{2\mu_1}{x+1} \int_{a_1}^{b_1} s(h_1-r) e^{-s(h_1-r)} \phi_1(r) dr \quad (24c)$$

$$h_{12}^{+}(s) = \frac{2\mu_1}{x+1} \int_{a_1}^{b_1} [s(h_1-r) - 1] e^{-s(h_1-r)} \phi_1(r) dr \quad (24d)$$

$$h_{21}^{-}(s) = \frac{\mu_0}{2\pi(x-1)} \int_{a_2}^{b_2} p_3(0, s, r) \phi_2(r) dr \quad (25a)$$

$$h_{22}^{-}(s) = \frac{\mu_0}{2\pi} \int_{a_2}^{b_2} p_4(0, s, r) \phi_2(r) dr \quad (25b)$$

$$h_{21}^{+}(s) = -\frac{\mu_0 e^{\beta h_2}}{2\pi(x-1)} \int_{a_2}^{b_2} p_3(h_2, s, r) \phi_2(r) dr \quad (25c)$$

$$h_{22}^{+}(s) = -\frac{\mu_0 e^{\beta h_2}}{2\pi} \int_{a_2}^{b_2} p_4(h_2, s, r) \phi_2(r) dr \quad (25d)$$

식 (22) ~ (25)의 피적분 함수인 $p_j(x, s, r)$, $j=1, \dots, 4$ 는 무한적분의 형태로 다음과 같이 주어진다.

$$p_1(x, s, r) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{i}{\alpha(\Delta_1 - \Delta_2)} \left(\frac{\Delta_2 l_1 r_1}{r_1^2 + s^2} \right) e^{i\alpha(r-x)} d\alpha \quad (26a)$$

$$p_2(x, s, r) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{is}{\alpha(\Delta_1 - \Delta_2)} \left(\frac{\Delta_1}{r_1^2 + s^2} - \frac{\Delta_2}{r_1^2 + s^2} \right) e^{i\alpha(r-x)} d\alpha \quad (26b)$$

$$p_3(x, s, r) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{i[(3-x)r_1 - i(1+x)a l_1] \Delta_2 r_1}{\alpha(\Delta_1 - \Delta_2)(r_1^2 + s^2)} e^{i\alpha(r-x)} d\alpha - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{i[(3-x)r_2 - i(1+x)a l_2] \Delta_1 r_2}{\alpha(\Delta_1 - \Delta_2)(r_2^2 + s^2)} e^{i\alpha(r-x)} d\alpha \quad (26c)$$

$$p_4(x, s, r) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{is \Delta_1 \Delta_2 (r_1^2 - r_2^2)}{\alpha(\Delta_1 - \Delta_2)(r_1^2 + s^2)(r_2^2 + s^2)} \times e^{i\alpha(r-x)} d\alpha \quad (26d)$$

여기서 $\Delta_k(\alpha) = l_k r_k - i\alpha$, $k=1, 2$ 이며, 이 경우 r_j 과 l_j , $j=1, 2$ 은 독립변수인 α 의 함수이다.

위의 균질 및 비균질 구성층에 대한 강성행렬 요소들은 모두 실수이며, 푸리에변수 s 에 대해 다음의 점근적 거동(asymptotic behavior)을 가짐을 보일 수 있다.

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{1}{s} \mathbf{K}_{lm}^{(k)}(s) = \begin{cases} \mathbf{K}_{lm}^{(k)} & ; l=m, k=1, 2, 3 \\ 0 & ; l \neq m, k=1, 2, 3 \end{cases} \quad (27)$$

여기서, $\mathbf{K}_{lm}^{(k)}$, $k=1, 2, 3$ 은 영이 아닌 값들을 포함하는 2×2 의 대칭인 소행렬을 나타낸다.

이어서, $\bar{\delta}_1(s) \equiv \bar{\mathbf{d}}_1^{-}(s)$ 과 $\bar{\delta}_{k+1}(s) \equiv \bar{\mathbf{d}}_k^{+(s)} - \bar{\mathbf{d}}_{k+1}^{-}(s)$, $k=1, 2$ 를 적층재료 표면 및 서로 인접한 구성층 사이의 가상계면에서의 변위벡터로 정의한 후, 식(4)를 식(19)에 적용하면 전체 적층재료에 대해 계면 변위 성분들을 미지수로 하는 전체 강성행렬식(global stiffness matrix equations)을 얻을 수 있다.

$$\mathbf{K}_{11}^{(1)} \bar{\delta}_1 + \mathbf{K}_{12}^{(1)} \bar{\delta}_2 = \mathbf{f}_1^{-} \quad (28a)$$

$$\mathbf{K}_{21}^{(1)} \bar{\delta}_1 + (\mathbf{K}_{22}^{(1)} + \mathbf{K}_{11}^{(2)}) \bar{\delta}_2 + \mathbf{K}_{12}^{(2)} \bar{\delta}_3 = \mathbf{f}_1^{+} + \mathbf{f}_2^{-} \quad (28b)$$

$$\mathbf{K}_{21}^{(2)} \bar{\delta}_2 + (\mathbf{K}_{22}^{(2)} + \mathbf{K}_{11}^{(3)}) \bar{\delta}_3 = \mathbf{f}_2^{+} + \mathbf{f}_3^{-} \quad (28c)$$

위의 행렬식을 간략하게 표기하면 아래와 같다.

$$\mathbf{K} \bar{\delta} = \mathbf{f} \quad (29)$$

여기서, $\mathbf{K}(s)$ 는 대칭인 6×6 전체 강성행렬, $\bar{\delta}(s)$ 는 전체 계면변위 성분을 포함하는 6단 벡터, 즉 $\{\bar{\delta}_1 \ \bar{\delta}_2 \ \bar{\delta}_3\}$ 그리고 $\mathbf{f}(s)$ 는 역시 6단의 보조함수 ϕ_k , $k=1, 2, 3$ 를 포함하는 벡터이다.

식 (29)의 강성행렬식으로부터 전체 계면변위

(global interfacial displacements) $\bar{\delta}$ 를 구할 수 있다. 이어서 일반해에 포함된 미지함수들은 각 구성층의 국부 계면변위(local interfacial displacements) $\bar{\delta}_k$, $k=1, 2, 3$ 의 항으로 표현될 수 있다. 이와 같이 본 행렬방법은 적층재료의 동일 선상 복수균열 문제 해결을 위한 해법의 일부분으로서, 적층재료에 대한 복잡하고 장황한 수식전개의 어려움을 완화시킴을 알 수 있다. 결국 본 균열문제에서는 식 (6)의 나머지 혼합조건(mixed conditions)을 적용하여 보조함수들 ϕ_k , $k=1, 2, 3$ 에 대한 적분방정식을 유도하여야 한다.

5. 특이적분 방정식

식 (11)와 식 (17)의 H_k , $k=1, 2, 3$ 와 그밖에 위의 절차에 따라 얻어지는 일반해의 미지함수들을 응력성분 σ_{kyy} , $k=1, 2, 3$ 의 일반해에 대입하고 정리하면 ϕ_k , $k=1, 2, 3$ 의 항으로 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{4\mu_k} \sigma_{kyy}(x_k, 0) = & -\frac{i}{2(x+1)} \int_{a_k}^{b_k} \phi_k(r) dr \\ & \times \int_{-\infty}^{\infty} \text{sgn}(s) e^{is(r-x_k)} ds \\ & + \sum_{j=1}^3 \int_{a_j}^{b_j} \phi_j(r) dr \\ & \times \int_0^{\infty} \Lambda_{kj}(s, x_k, r) ds ; \\ & a_k \leq x_k \leq b_k, \quad k=1, 3 \end{aligned} \quad (30a)$$

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{4\mu_0 e^{\beta x_2}} \sigma_{2yy}(x_2, 0) = & \frac{1}{8(x-1)} \int_{a_2}^{b_2} \phi_2(r) dr \\ & \times \int_{-\infty}^{\infty} \Lambda(s) e^{is(r-x_2)} ds \\ & + \frac{1}{2(x-1)} \sum_{j=1}^3 \int_{a_j}^{b_j} \phi_j(r) dr \\ & \times \int_0^{\infty} \Lambda_{2j}(s, x_2, r) ds ; \\ & a_2 \leq x_2 \leq b_2 \end{aligned} \quad (30b)$$

여기서, $\text{sgn}(\cdot)$ 는 signum 함수이고 $\Lambda_{kj}(s, x_k, r)$, $k, j=1, 2, 3$ 는 푸리에변수 및 구성재료의 두께, 탄성계수, 푸아송비와 같은 물성치의 함수이다. 특히 식 (30b)의 피적분함수 $\Lambda(s)$ 는 다음과 같다.

$$\Lambda(s) = \frac{i(1+x)[\Delta_1 r_2 - \Delta_2 r_1]}{s(\Delta_1 - \Delta_2)}$$

$$+ \frac{(3-x)[\Delta_1 l_2 - \Delta_2 l_1]}{\Delta_1 - \Delta_2} \quad (31)$$

이때 위의 경우 $\Delta_k(s) = l_k r_k - is$, $k=1, 2$ 이다.

식 (14c)의 특성근 r_j , $j=1, 2$ 에 대한 아래의 점근적 거동과

$$\lim_{|s| \rightarrow \infty} \frac{r_j(s)}{s} = -\text{sgn}(s); \quad j=1, 2 \quad (32)$$

식 (15b)에 정의된 l_j , $j=1, 2$ 로부터, 함수 $\Lambda(s)$ 는 $|s| \rightarrow \infty$ 일 때 다음 값을 가짐을 보일 수 있다.

$$\lim_{|s| \rightarrow \infty} \text{Re } \Lambda(s) = 0 \quad (33a)$$

$$\begin{aligned} \lim_{|s| \rightarrow \infty} \text{Im } \Lambda(s) = & \Lambda_{\infty}(s) \\ = & -4\text{sgn}(s) \left(\frac{x-1}{x+1} \right) \end{aligned} \quad (33b)$$

이러한 점근적 해석결과로부터, 한계치 Λ_{∞} 가 식 (30b)의 적분핵(kernel) 특이성을 유발시킴을 알 수 있다. 이어서 해당 피적분함수에서 위의 한계치를 가감하면 일반함수에(generalized function)에 대한 푸리에 적분공식⁽²⁹⁾에 따라 적분핵으로부터 특이부분을 분리할 수 있다. 결국 위에서 기술한 방법에 의해 식 (30)의 나머지 유사한 특이부분들을 도출한 후, 식 (6c)의 균열면 조건을 적용하면, 다음과 같이 세개의 방정식들이 얻어진 제1종 특이적분방정식 계를 유도할 수 있다.

$$\begin{aligned} & \int_{a_k}^{b_k} \frac{\phi_k(r)}{r-x_k} dr + \sum_{j=1}^3 \int_{a_j}^{b_j} p_{kj}(x_k, r) \phi_j(r) dr \\ & = \frac{\pi(x+1)}{4\mu_k} \sigma_k(x_k) \\ & ; \quad a_k \leq x_k \leq b_k, \quad k=1, 2, 3 \end{aligned} \quad (34)$$

여기서, $k=2$ 일 경우 $\mu_2 = \mu_0 \exp(\beta x_2)$ 이고, $p_{kj}(x_k, r)$, $k, j=1, 2, 3$ 은 적분핵으로서 아래와 같다.

$$\begin{aligned} p_{kj}(x_k, r) = & (x+1) \int_0^{\infty} \Lambda_{kj}(s, x_k, r) ds ; \\ (k, j) = & (1, 1), (1, 2), (1, 3), \\ & (3, 1), (3, 2), (3, 3) \end{aligned} \quad (35a)$$

$$\begin{aligned} p_{kj}(x_k, r) = & \frac{(x+1)}{2(x-1)} \int_0^{\infty} \Lambda_{kj}(s, x_k, r) ds ; \\ (k, j) = & (2, 1), (2, 3) \end{aligned} \quad (35b)$$

$$\begin{aligned} p_{22}(x_2, r) = & \frac{(x+1)}{2(x-1)} \left\{ \int_0^{\infty} \Lambda_{22}(s, x_2, r) ds \right. \\ & \left. + \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{\infty} [\Lambda(s) - i\Lambda_{\infty}(s)] e^{is(r-x_2)} ds \right\} \end{aligned} \quad (35c)$$

각각의 구성층에 Fig. 1과 같이 균열이 하나씩 내재된 경우, 즉 $0 < a_k < b_k < h_k$, $k=1, 2$ 및 $a_3 > 0$, 식 (35)의 피적분함수들은 푸리에변수 s 가 무한대로 증가함에 따라 영으로 접근하는 점근적 거동을 가진다.

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \Lambda_{kj}(s, x_k, r) = 0; \quad a_k \leq (x_k, r) \leq b_k, \quad k, j=1, 2, 3 \quad (36)$$

따라서 적분방정식계 해의 유일한 특이거동은 $x_k = r$, $k=1, 2, 3$ 일 때 무한대가 되는 Cauchy형 적분핵 $1/(r-x_k)$ 에 단지 기인하므로, 해당 균열첨단 응력장은 역평방 특이성을 갖게 된다. 이 경우 식 (35)의 $p_{kj}(x_k, r)$, $k, j=1, 2, 3$ 은 폐구간 $[a_k, b_k]$ 에서 정의되는 독립변수 x_k 와 r 의 값에 대하여 유한한 Fredholm 적분핵으로 취급된다.⁽³⁰⁾

한편 균열첨단이 $x_1 = h_1$ ($x_2 = 0$) 혹은 $x_2 = h_2$ ($x_3 = 0$)의 가상계면과 접촉하는 경우, 식(35)의 적분핵들은 $x_1 = r = h_1$ ($x_2 = r = 0$) 혹은 $x_2 = r = h_2$ ($x_3 = r = 0$)일 때에 무한값을 갖는 대수특이성(logarithmic singularity)을 나타낸다. 그러나 이러한 대수적 특이성은 Cauchy형 특이적분핵과 함께 공존할 때, 유한한 Fredholm 적분핵의 일부분으로 취급할 수 있기 때문에,^(15,16) 균열첨단에서의 역평방 특이성에 변화를 주지 못한다.

결국 위의 두가지 경우에 대하여 Cauchy형 적분핵은 지배적 특이항으로 간주할 수 있으므로, 적분방정식계의 해인 보조함수들은 다음과 같이 나타낼 수 있다.⁽³⁰⁾

$$\phi_k(r) = \frac{g_k(r)}{\sqrt{(r-a_k)(b_k-r)}}; \quad a_k < r < b_k, \quad k=1, 2, 3 \quad (37)$$

여기서, $g_k(r)$, $k=1, 2, 3$ 는 유한한 미지의 함수로 $r = a_k$ 과 $r = b_k$ 에서 영이 아닌 값을 갖는다.

독립변수들을 단위구간으로 치환시키면

$$\left\{ \begin{matrix} r \\ x_k \end{matrix} \right\} = \frac{b_k - a_k}{2} \left\{ \begin{matrix} \eta \\ \xi_k \end{matrix} \right\} + \frac{b_k + a_k}{2}; \quad -1 < (\eta, \xi_k) < 1, \quad k=1, 2, 3 \quad (38)$$

적분방정식계 해의 특성을 나타내는 기본함수(fundamental function)는 제1종 Chebyshev 다항식 T_n 의 가중함수(weight function)와 일치한다. 이에 근거하여 치환된 구간에서 보조함수를 다음과 같이 재 정의하면

$$\begin{aligned} \phi_k(r) &= \Phi_k(\eta) = \frac{G_k(\eta)}{\sqrt{1-\eta^2}} \\ G_k(\eta) &= \frac{2g_k(r)}{b_k - a_k}; \\ |\eta| &< 1, \quad k=1, 2, 3 \end{aligned} \quad (39)$$

미지함수 $G_k(\eta)$ 는 아래의 급수형태로 나타낼 수 있다.

$$G_k(\eta) = \sum_{n=1}^{\infty} c_{kn} T_n(\eta); \quad |\eta| < 1, \quad k=1, 2, 3 \quad (40)$$

여기서 c_{kn} , $k=1, 2, 3$, $n \geq 1$ 은 미지계수이며, 식 (39)와 식 (40)의 급수는 식 (8)의 적합조건을 만족시킨다.

식 (38)~(40)을 식 (34)에 대입한 후, 식 (40)의 급수를 $n=N$ 항까지 전개하고 다음의 공식에 의해⁽³¹⁾

$$\int_{-1}^1 \frac{T_n(\eta) d\eta}{\sqrt{1-\eta^2}(\eta-\xi)} = \pi U_{n-1}(\xi); \quad n \geq 1, \quad |\xi| < 1 \quad (41)$$

적분방정식계는 특이성이 제거된 아래의 형태로 변환된다.

$$\begin{aligned} \pi \sum_{n=1}^N c_{kn} U_{n-1}(\xi_k) + \sum_{n=1}^N \sum_{j=1}^3 c_{jn} E_n^{kj}(\xi_k) \\ = f_{ok}(\xi_k); \quad |\xi_k| < 1, \quad k=1, 2, 3 \end{aligned} \quad (42)$$

여기서, U_n 은 제2종 Chebyshev 다항식이며 함수 $E_n^{kj}(\xi_k)$ 과 $f_{ok}(\xi_k)$ 는 다음과 같다.

$$E_n^{kj}(\xi_k) = \int_{-1}^1 \frac{p_{kj}^o(\xi_k, \eta) T_n(\eta)}{\sqrt{1-\eta^2}} d\eta \quad (43a)$$

$$p_{kj}^o(\xi_k, \eta) = \frac{b_k - a_k}{2} p_{kj}(x_k, r) \quad (43b)$$

$$f_{ok}(\xi_k) = \frac{\pi(1+\chi)}{4\mu_k} \sigma_k(x_k); \quad k, j=1, 2, 3 \quad (43c)$$

식 (42)를 미지계수 c_{kn} , $k=1, 2, 3$, $1 \leq n \leq N$ 을 구할 수 있는 형태로 전환하기 위해, 선정법(collocation method)을 사용한다. 이때 끝단의 특이점 $\xi_k = \pm 1$ 부근에서 밀도가 높은 N 차의 제1종 Chebyshev 다항식의 근을 선정점(collocation points)으로 선정한다.

$$\begin{aligned} T_N(\xi_{ki}) = 0, \quad \xi_{ki} = \cos \left[\frac{\pi(2i-1)}{2N} \right]; \\ k=1, 2, 3, \quad i=1, 2, \dots, N \end{aligned} \quad (44)$$

따라서 위의 선정점 $\xi_k = \xi_{ki}$, $1 \leq i \leq N$ 을 식(42)에

대입하면 계수 c_{kn} 를 미지수로 하는 $3N$ 개의 유한 선형 대수방정식계를 구성할 수 있다. 이때 N 은 정확한 수렴해를 얻기 위해 충분히 커야 한다.

이어서 미지계수의 값들이 적분방정식계의 해로서 결정되면 균열선단 $|\xi_k| > 1$ 에서의 특이 트랙션 $\sigma_{kyy}(\xi_k, 0)$, $k=1, 2, 3$ 은 식 (34)의 좌변으로부터 식 (38)~식 (40)과 함께 다음과 같이 얻어진다.

$$\begin{aligned} & \frac{\pi(1+x)}{4\mu_k} \sigma_{kyy}(\xi_k, 0) \\ &= \sum_{n=1}^N c_{kn} \int_{-1}^1 \frac{T_n(\eta) d\eta}{-1\sqrt{1-\eta^2}(\eta-\xi_k)} + \sum_{n=1}^N \sum_{j=1}^3 c_{jn} E_n^{kj}(\xi_k) \\ &= -\pi \sum_{n=1}^N c_{kn} \frac{[\xi_k - \text{sgn}(\xi_k) \sqrt{\xi_k^2 - 1}]^n}{\text{sgn}(\xi_k) \sqrt{\xi_k^2 - 1}} \\ & \quad + \sum_{n=1}^N \sum_{j=1}^3 c_{jn} E_n^{kj}(\xi_k); |\xi_k| > 1, k=1, 2, 3 \end{aligned} \quad (45)$$

이때 우변의 두번째 항은 유한한 비특이항이다. 또한 비균질 계면층을 매개로 한 적층재료의 탄성계수 연속성에 의하여, 가상계면 위치에서의 열개응력(cleavage stress)도 역시 $\sigma_{kyy}^+(y) = \sigma_{(k+1)yy}^-(y)$, $y \geq 0$, $k=1, 2$ 와 같이 연속이다.

위의 특이 트랙션으로부터 열림형 응력세기계수는 다음과 같이 정의된다.

$$K(a_k) = \lim_{x_k \rightarrow a_k} \sqrt{2(a_k - x_k)} \sigma_{kyy}(x_k, 0); \quad x_k < a_k, k=1, 2, 3 \quad (46a)$$

$$K(b_k) = \lim_{x_k \rightarrow b_k} \sqrt{2(x_k - b_k)} \sigma_{kyy}(x_k, 0); \quad x_k > b_k, k=1, 2, 3 \quad (46a)$$

여기서, $K(a_k)$ 과 $K(b_k)$ 는 각각 균열첨단 a_k 와 b_k , $k=1, 2, 3$ 에서의 응력세기계수를 지칭한다.

결국 균질의 표면층과 기층 내부에 위치한 균열의 응력세기계수는 다음과 같이 구해지며

$$K(a_k) = \frac{4\mu_k}{1+x} \sqrt{\frac{b_k - a_k}{2}} \sum_{n=1}^N (-1)^n c_{kn} \quad (47a)$$

$$K(b_k) = -\frac{4\mu_k}{1+x} \sqrt{\frac{b_k - a_k}{2}} \sum_{n=1}^N c_{kn}; k=1, 3 \quad (47b)$$

비균질 계면층 내부의 균열에 대한 응력세기계수는 아래와 같이 산출할 수 있다.

$$K(a_2) = \frac{4\mu_0 e^{\beta a_2}}{1+x} \sqrt{\frac{b_2 - a_2}{2}} \sum_{n=1}^N (-1)^n c_{2n} \quad (48a)$$

$$K(b_2) = -\frac{4\mu_0 e^{\beta b_2}}{1+x} \sqrt{\frac{b_2 - a_2}{2}} \sum_{n=1}^N c_{2n} \quad (48b)$$

여기서, 앞서 언급한 탄성계수 연속성에 따라 이상

의 응력세기계수는 균열첨단이 가상계면의 위치에 접촉할 경우라도 유효함을 알 수 있다.

6. 결과 및 검토

적분방정식계인 식 (34)의 해를 구하기 위하여 식 (35)와 식 (43a)의 적분은 각각 Gauss-Legendre와 Gauss-Chebyshev 수치적분방법⁽³²⁾에 의해 계산하였다. 여기서, 식 (35)의 무한적분에 대한 정확한 값을 얻기위해, 피적분함수의 푸리에 변수에 대한 수렴성을 검토하여 이때의 적분구간 상한값을 결정한 후, 전체 적분구간을 점진적으로 크기가 증가하는 소영역들로 나누어 각 소영역에서 적절한 적분점들을 부여하였다. 이와 더불어 식 (42)에서 최대 $N=20$ 항까지 전개할 경우, 본 논문에서 다루는 물성치와 기하학적 조건에 대해 수렴 해를 얻을 수 있었다. 또한 해의 타당성 검증차원에서 기존의 문헌에 제시된 특수한 경우의 응력세기계수를 산출하여 그 결과를 비교, 검토하였다. 이러한 기존의 해들은 균질 반무한체 내의 수직형 내부균열, 균질 무한체내의 두개 내지는 세개의 동일 선상복수균열,⁽³³⁾ 그리고 비균질 반무한체에 접합된 수직형 균열이 있는 균질 반무한체 등을 포함한다.⁽¹⁵⁾

위의 검증 절차를 거친 후, 본 논문에서의 결과를 산출하기 위하여, Fig. 1과 같은 균일한 외부 인장변형률 ϵ_0 로 인한 식(6c)와 식(34)의 등가 균열면 응력을 평면변형조건하에서 다음과 같이 부과하였고

$$\sigma_k(x_k) = -\frac{E_k \epsilon_0}{1-\nu^2}; a_k \leq x_k \leq b_k, k=1, 2, 3 \quad (49)$$

푸아송비는 $\nu=0.3$ 으로 가정하였다. 평면응력 조건하에서 위의 균열면 응력은 $\sigma_k(x_k) = -E_k \epsilon_0$ 로 대체된다. 이어서 본 절에서 제시되는 응력세기계수에 대한 수치결과는 모두 다음과 같이 무차원화 하였다.

$$\begin{aligned} & \left(\frac{k(a_k)}{k(b_k)} \right) = \frac{1}{\sigma_0 \sqrt{c_k}} \left(\frac{K(a_k)}{K(b_k)} \right) \\ & \sigma_0 = \frac{E_1 \epsilon_0}{1-\nu^2}; k=1, 2, 3 \end{aligned} \quad (50)$$

우선, 하나의 균열이 세개의 구성재료 중 하나의 재료에 내재하고 있는 경우, Figs. 2~4는 재료물

성치의 두가지 조합인 $E_3/E_1=0.2$ 와 5 에 대해 해당 무차원 응력세기계수의 변화를 균열길이 $2c_k = b_k - a_k$, $k=1, 2, 3$ 의 함수로 보여주고 있다. 이때 표면층과 계면층 사이의 두께비는 $h_1/h_2=2$ 로 가정하였다.

Fig. 2는 하나의 균열이 균질의 표면층에만 존재하고($a_1 \neq b_1$, $a_k = b_k$, $k=2, 3$), 오른쪽 균열첨단 b_1 이 $x_1=h_1$ 의 가상계면 위치에 놓여 있을 때, 상기의 물성치 조합에 대해 응력세기계수를 제시하고 있다. 여기서, 무차원 응력세기계수 $k(a_1)$ 와 $k(b_1)$ 는 탄성계수비 $E_3/E_1=0.2$ 에 대해 균열길이 $2c_1/h_1$ 이 증가함에 따라 역시 증가하는 경향을 보이고 있으나, $E_3/E_1=5$ 인 경우는 증가하기 전에 소폭의 감소 현상을 보인다. 또한 예상대로, 탄성계수비의 영향은 $E_3/E_1=0.2$ 와 같이 균열이 없는 인접한 구성재료들이 균열이 있는 표면층보다 상대적으로 낮은 강성일 때, 균열첨단 a_1 과 b_1 은 더욱 가혹한 응력상태에 놓이는 현상으로 나타나고 있다. 한편 균열길이 $2c_1/h_1$ 이 작아짐에 따라 양 균열첨단의 응력세기계수는 다음의 값으로 수렴함을 관찰할 수 있다.

$$\begin{pmatrix} K(a_1) \\ K(b_1) \end{pmatrix} \rightarrow \frac{E_1 \epsilon_0 \sqrt{c_1}}{1-\nu^2} \text{ as } 2c_1/h_1 \rightarrow 0 \quad (51)$$

이는 연속적인 구배 특성을 나타내는 비균질 계면 영역이 존재할 때, 무한 적층재료의 응력세기계수는 재료의 구성에 관계없이 무한 균질재료의 응력세기계수와 같음을 의미한다.

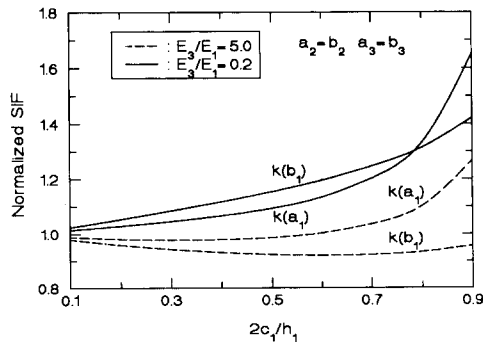


Fig. 2 Variations of normalized stress intensity factors $k(a_1) = K(a_1)/\sigma_0 c_1^{1/2}$ and $k(b_1) = K(b_1)/\sigma_0 c_1^{1/2}$ for a crack in the surface layer as a function of crack size $2c_1/h_1$; $\sigma_0 = E_1 \epsilon_0 / (1-\nu^2)$, $E_3/E_1 = 0.2$ and 5.0 , $\nu = 0.3$, $b_1 = h_1$, $h_1/h_2 = 2.0$, and $a_k = b_k$, $k = 2, 3$.

하나의 균열이 비균질 계면층의 중심 $x_2=h_2/2$ 에 위치하였을 때 ($a_2 \neq b_2$, $a_k = b_k$, $k=1, 3$), 해당 무차원 응력세기계수 $k(a_2)$ 와 $k(b_2)$ 의 변화는 Fig. 3에서 균열길이 $2c_2/h_2$ 의 함수로 보여주고 있다. 여기서 비균질 계면층 내부의 강성이 높은 쪽에 위치한 균열첨단이 반대편에 있는 균열첨단과 비교하여 보다 큰 응력세기계수를 $2c_2/h_2$ 에 대한 증가함수의 형태로 보인다. 즉, $E_3/E_1=5$ 인 경우에 대해서는 균열첨단 b_2 가 그리고 $E_3/E_1=0.2$ 인 경우에는 균열첨단 a_2 가 높은 응력세기 상태에 있다. 또한 주어진 탄성계수비에 대해, 균열길이 $2c_2/h_2$ 가 영으로 접근함에 따라, 양 균열첨단 a_2 와 b_2 에서의 응

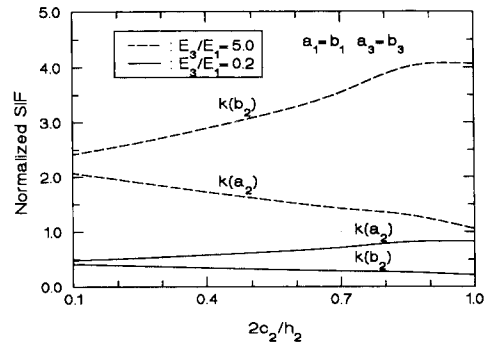


Fig. 3 Variations of normalized stress intensity factors $k(a_2) = K(a_2)/\sigma_0 c_2^{1/2}$ and $k(b_2) = K(b_2)/\sigma_0 c_2^{1/2}$ for a crack in the interfacial layer as a function of crack size $2c_2/h_2$; $\sigma_0 = E_1 \epsilon_0 / (1-\nu^2)$, $E_3/E_1 = 0.2$ and 5.0 , $\nu = 0.3$, $a_2 + b_2 = h_2$, $h_1/h_2 = 2.0$, and $a_k = b_k$, $k = 1, 3$.

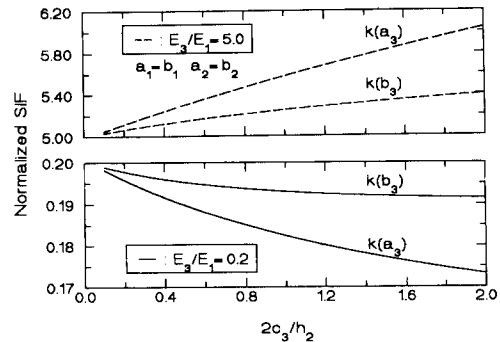


Fig. 4 Variations of normalized stress intensity factors $k(a_3) = K(a_3)/\sigma_0 c_3^{1/2}$ and $k(b_3) = K(b_3)/\sigma_0 c_3^{1/2}$ for a crack in the substrate as a function of crack size $2c_3/h_2$; $\sigma_0 = E_1 \epsilon_0 / (1-\nu^2)$, $E_3/E_1 = 0.2$ and 5.0 , $\nu = 0.3$, $a_3 = 0$, $h_1/h_2 = 2.0$, and $a_k = b_k$, $k = 1, 2$.

력세기계수는 동일한 한계값으로 수렴함을 알 수 있다.

$$\left(\frac{K(a_2)}{K(b_2)}\right) \rightarrow \frac{E_1 e^{\beta h_2/2} \varepsilon_0 \sqrt{C_2}}{1-\nu^2} \text{ as } 2c_2/h_2 \rightarrow 0 \quad (52)$$

Fig. 4는 균질의 반무한 기층에 왼쪽 균열첨단 a_3 가 가상계면 위치 $x_3=0$ 에 접촉되어 있는 하나의 균열 ($a_3 \neq b_3$, $a_k = b_k$, $k=1, 2$)에 대한 결과이다. 이 경우, Fig. 2에 제시된 결과와는 반대로 양 균열첨단의 무차원 응력세기계수 $k(a_3)$ 과 $k(b_3)$ 는 $E_3/E_1=5$ 일 때가 $E_3/E_1=0.2$ 인 경우보다 훨씬 높게 나타난다. 이는 E_3/E_1 을 증가시킬 때 표면층의 상대적인 강성저하와 더불어 자유경계면 (traction-free bounding plane)의 영향력 증대에 기인한 것으로 파악된다. 이와 같은 형태의 균열거동으로부터, $E_3/E_1=0.2$ 와 같이 상대적으로 강성이 높은 표면층의 존재는 기층 내부에서의 균열 성장을 안정시키는데 현저한 기여를 함을 알 수 있다. 그러나 Fig. 2의 경우와 유사하게, 균열길이 $2c_3/h_2$ 가 영으로 접근함에 따라, 양 균열첨단 a_3 와 b_3 는 무한 균질재료에 대한 응력세기계수 값으로 수렴함을 보인다. 즉,

$$\left(\frac{K(a_3)}{K(b_3)}\right) \rightarrow \frac{E_3 \varepsilon_0 \sqrt{C_3}}{1-\nu^2} \text{ as } 2c_3/h_2 \rightarrow 0 \quad (53)$$

다음으로, 공존하는 복수균열첨단 상호간의 영향을 파악하고자, Figs. 5~7은 각 구성층 내부에 각기 하나씩 모두 세개의 동일 선상균열 ($a_k \neq b_k$, $k=1, 2, 3$)이 있는 경우에 대한 무차원 응력세기계수들을 보여주고 있다. 위의 결과를 위하여 표면층과 계면층의 두께비는 역시 $h_1/h_2=2$ 로 가정하였고, 세개의 균열중 하나의 균열만 길이가 변화하고 나머지 두개 균열들의 길이는 고정된 것으로 취급하였다. 또한 두 균열첨단 b_1 과 a_3 는 각각 $x_1=h_1$ 과 $x_3=0$ 에 위치한 가상계면에 접촉하고 있고, 비균질 계면층에 존재하는 균열은 계면층의 중심 위치한 $x_2=h_2/2$ 에 놓여 있다고 가정하였다.

Fig. 5(a) (b)에서는 탄성계수비가 각각 $E_3/E_1=0.2$ 와 5인 경우에 대해 동일 선상균열에 대한 무차원 응력세기계수를 표면층 내부의 균열길이인 $2c_1/h_1$ 의 함수로 보여주고 있다. 이때 나머지 균열길이는 $2c_2/h_2=0.5$ 와 $2c_3/h_2=1$ 로 고정시켰다. 여기서 균열들 상호간의 영향과 표면층에서의 균열 성장에 따라 부과되는 균열첨단들에서의 추가적인 응력장

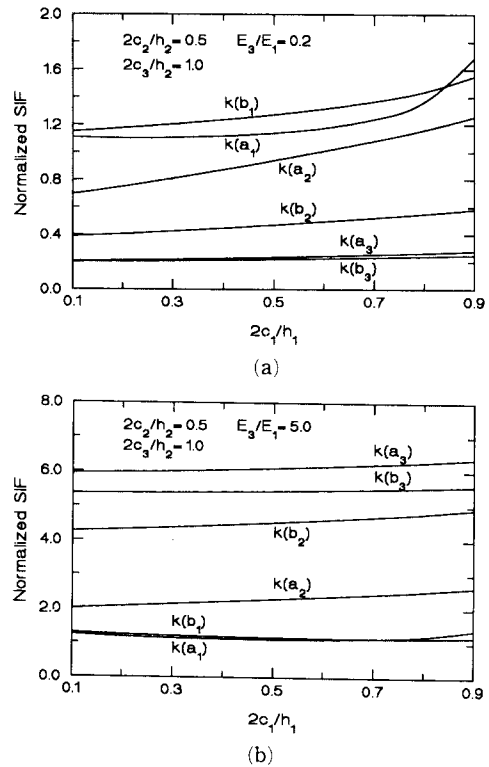


Fig. 5 Variations of normalized stress intensity factors $k(a_k) = K(a_k) / \sigma_0 c_k^{1/2}$ and $k(b_k) = K(b_k) / \sigma_0 c_k^{1/2}$, $k=1, 2, 3$, for three collinear cracks in the layered medium as a function of crack size $2c_1/h_1$; $\sigma_0 = E_1 \varepsilon_0 / (1-\nu^2)$, (a) $E_3/E_1=0.2$, (b) $E_3/E_1=5.0$, $\nu=0.3$, $b_1=h_1$, $a_2+b_2=h_2$, $a_3=0$, $h_1/h_2=2.0$, $2c_2/h_2=0.5$, and $2c_3/h_2=1.0$.

가혹화로 인하여 해당 무차원 응력세기계수들은 Figs. 2~4의 단일 균열에 대한 결과와 비교하여 증가함을 보인다. 또한 일반적으로 적층재료 내의 강성이 높은 곳에 위치한 균열첨단이 상대적으로 큰 값의 응력세기계수를 보여주고 있다.

표면층과 반무한 기층내의 균열길이는 각각 $2c_1/h_1=0.5$ 와 $2c_3/h_2=1$ 의 고정된 값일 때, 비균질 계면층의 중심에 위치한 균열의 가변적 길이 $2c_2/h_2$ 의 함수로서 응력세기계수의 변화를 검토한다. 해당 결과는 $E_3/E_1=0.2$ 및 5의 두가지 탄성계수비에 대해 각각 Fig. 6(a), (b)에서 나타내고 있다. 이 경우도 Fig. 3에 제시된 계면층내의 단일 균열에 대한 결과와 비교하여, 무차원 응력세기계수 $k(a_2)$ 와 $k(b_2)$ 는 각각 $E_3/E_1=0.2$ 와 5일 때 균열길

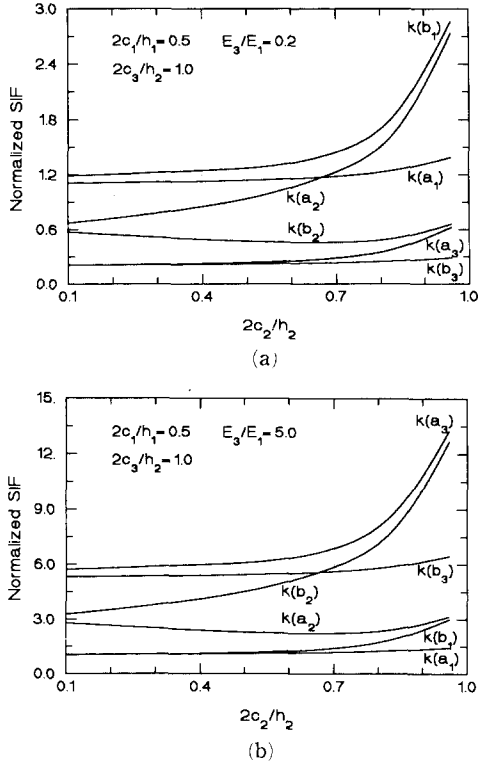


Fig. 6 Variations of normalized stress intensity factors $k(a_k) = K(a_k) / \sigma_0 c_k^{1/2}$ and $k(b_k) = K(b_k) / \sigma_0 c_k^{1/2}$, $k=1, 2, 3$, for three collinear cracks in the layered medium as a function of crack size $2c_2/h_2$; $\sigma_0 = E_1 \epsilon_0 / (1 - \nu^2)$, (a) $E_3/E_1 = 0.2$, (b) $E_3/E_1 = 5.0$, $\nu = 0.3$, $b_1 = h_1$, $a_2 + b_2 = h_2$, $a_3 = 0$, $h_1/h_2 = 2.0$, $2c_1/h_1 = 0.5$, and $2c_3/h_2 = 1.0$.

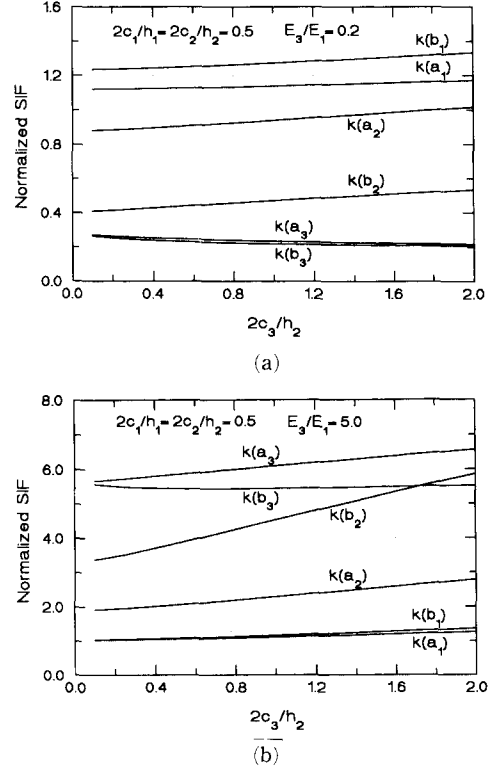


Fig. 7 Variations of normalized stress intensity factors $k(a_k) = K(a_k) / \sigma_0 c_k^{1/2}$ and $k(b_k) = K(b_k) / \sigma_0 c_k^{1/2}$, $k=1, 2, 3$, for three collinear cracks in the layered medium as a function of crack size $2c_3/h_2$; $\sigma_0 = E_1 \epsilon_0 / (1 - \nu^2)$, (a) $E_3/E_1 = 0.2$, (b) $E_3/E_1 = 5.0$, $\nu = 0.3$, $b_1 = h_1$, $a_2 + b_2 = h_2$, $a_3 = 0$, $h_1/h_2 = 2.0$, and $2c_k/h_k = 0.5$, $k=1, 2$.

이 $2c_2/h_2$ 의 변화에 더욱 민감하게 좌우됨을 주목할 수 있다. 특히 균열길이 $2c_2/h_2$ 가 증가함에 따라, 이러한 가변균열을 내재한 비균질 계면층에 인접한 균열첨단 b_1 과 a_3 의 응력세기계수는 균열길이 $2c_1$ 과 $2c_3$ 가 변하지 않았음에도 불구하고 각각 $E_3/E_1 = 0.2$ 와 5에 대하여 역시 커다란 증가를 보인다. 반면에 그 밖의 나머지 균열첨단에서의 거동은 $2c_2/h_2$ 의 변화에 대하여 미미한 영향을 받고 있음을 알 수 있다.

다음의 Fig. 7(a), (b)에서 보여주는 결과는 각각 $E_3/E_1 = 0.2$ 와 5일 때에, 반무한 기층내의 균열길이 $2c_3/h_2$ 가 변화하는 경우에 해당하며, 이때 표면층과 비균질 계면층내에 존재하는 나머지 두개의 균열은 각기 고정된 길이인 $2c_1/h_1 = 2c_2/h_2 = 0.5$ 로 가정하였다. 여기서 관찰되는 균열첨단 거동은 이

전의 Fig. 5(a), (b) 경우와 유사함을 알 수 있다. 즉, 기층 내에서 균열길이 $2c_3/h_2$ 증가와 함께 동일선상 균열 들간의 상호영향으로 인하여 무차원 응력세기계수 값들은 Figs. 2~4의 결과와 비교하여 상승한다. 그리고 강성이 높은 곳의 균열첨단이 일반적으로 더욱 가혹한 특이응력상태에 놓여 있다. 그러나 Fig. 7(b)에서와 같이 가변균열의 첨단 a_3 와 b_3 보다 일정한 길이의 균열첨단 b_2 가 균열길이 변화 $2c_3/h_2$ 에 더 두드러지게 영향을 받고 있음을 알 수 있다.

비균질 계면층의 두께변화에 따른 결과는 탄성계수비 $E_3/E_1 = 0.2$ 와 5에 대하여 Fig. 8(a), (b)에서 h_1/h_2 의 함수로 보이고 있다. 균열형상으로서 균질의 표면층과 기층내부에 각기 하나씩 모두 두개의 동일선상 복수균열 ($a_k \neq b_k$, $k=1, 3$, $a_2 = b_2$)을

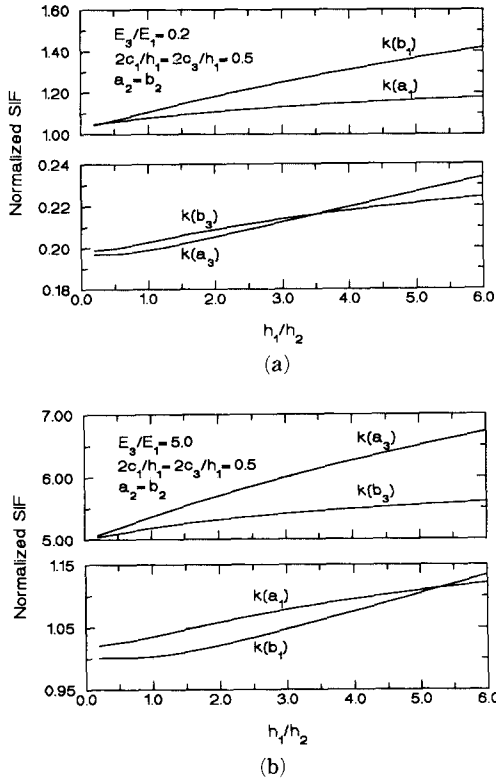


Fig. 8 Variations of normalized stress intensity factors $k(a_k) = K(a_k) / \sigma_0 c_k^{1/2}$ and $k(b_k) = K(b_k) / \sigma_0 c_k^{1/2}$, $k=1, 3$, for two collinear cracks in the layered medium as a function of thickness ratios h_1/h_2 ; $\sigma_0 = E_1 \epsilon_0 / (1 - \nu^2)$, (a) $E_3/E_1 = 0.2$ (b) $E_3/E_1 = 5.0$, $\nu = 0.3$, $b_1 = h_1$, $a_3 = 0$, and $2c_k/h_1 = 0.5$, $k=1, 3$, and $a_2 = b_2$.

$2c_1/h_1 = 2c_3/h_1 = 0.5$ 의 길이로 가정하였고, 균열첨단 b_1 과 a_3 는 각각 $x_1 = h_1$ 과 $x_3 = 0$ 의 가상계면에 접촉시켰다. 여기서 해당 무차원 응력세기계수는 계면층의 두께감소에 따른 (h_1/h_2 은 증가) 균열들 사이의 상호영향 증대로 인하여 전반적인 증가 추세를 나타낸다. 그러나 $E_3/E_1 = 0.2$ 와 5일때 각각 반무한 기층과 표면층에 위치한 균열의 거동은 인접한 균열과 비교하여 상대적으로 계면층 두께의 변화에 대하여 작은 폭의 변화를 보인다.

동일선상 복수균열에 대한 물성치의 영향을 더욱 명확히 검토하기 위하여, 탄성계수비 E_3/E_1 에 대한 무차원 응력세기계수의 변화를 Fig. 9에 나타내었다. 이때 두께비는 $h_1/h_2 = 2$, 균열길이는 $2c_1/h_1 = 2c_2/h_2 = 0.5$ 및 $2c_3/h_2 = 1$ 그리고 균열위치는 이전의 경우와 동일하게 하였다. 여기서 보면 반무한

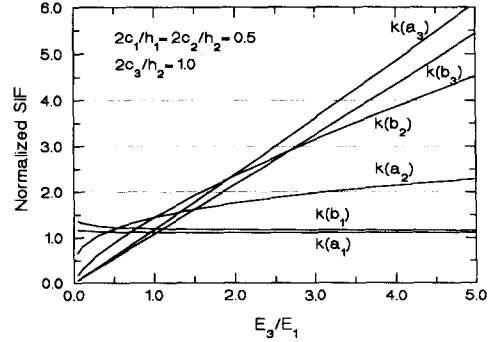


Fig. 9 Variations of normalized stress intensity factors $k(a_k) = K(a_k) / \sigma_0 c_k^{1/2}$ and $k(b_k) = K(b_k) / \sigma_0 c_k^{1/2}$, $k=1, 2, 3$, for three collinear cracks in the layered medium as a function of elastic moduli ratios E_3/E_1 ; $\sigma_0 = E_1 \epsilon_0 / (1 - \nu^2)$, $\nu = 0.3$, $b_1 = h_1$, $a_2 + b_2 = h_2$, $a_3 = 0$, $h_1/h_2 = 2.0$, and $2c_k/h_k = 0.5$, $k=1, 2$, and $2c_3/h_2 = 1.0$.

기층내부의 균열첨단 a_3 와 b_3 가 E_3/E_1 의 변화에 상당히 민감한 반면, 표면층 내부의 균열첨단에 대한 무차원 응력세기계수 $k(a_1)$ 과 $k(b_1)$ 은 E_3/E_1 의 변화에 대해서 거의 일정한 값을 유지함을 알 수 있다.

7. 요약 및 결론

본 논문에서는 반무한 적층재료 내부의 동일선상 복수균열에 대한 이론해를 평면 탄성이론에 따라 구하였다. 구배기능 계면영역을 이종의 균질 표면층과 반무한 기층 사이에 존재하는 비균질 층으로 취급하여, 모두 세개의 균열이 각 구성재료 내부의 동일선상에 가상계면과 수직한 방향으로 존재한다고 가정하였다. 강성행렬방법을 적용하여 적층재료의 경계 및 연속조건을 만족시킨 후, 혼합조건을 적용하여 동일선상 복수균열들 사이의 상호영향을 반영한 특이적분방정식계를 유도하였다. 특히 비균질 계면영역의 존재로 인한 전체 탄성계수의 연속성으로부터, 균열첨단이 가상계면과 접촉할지라도 해당 특이응력장은 역평방 특이성을 유지하였다. 결국 응력세기계수는 기존의 선형탄성 파괴역학 개념에 기초하여 산출할 수 있었다. 이어서 동일선상 복수균열첨단에서의 거동을 여러 가지 균열길이 및 물성치 조합에 대해 기술하였다. 부연하면 주어진 하중 및 기하학적 조건하에서, 균질의 구성재료에 존재하는 단일 균열의 응력세기계수는 균열길이가

영으로 접근함에 따라, 계면영역의 비균질 특성에 무관하게 일정한 값으로 수렴하게 됨을 보였다. 동일선상 복수균열의 경우는, 비균질 계면층내의 균열이 균질의 구성층 내부의 균열첨단 거동과 비교하여 일반적으로 균열길이의 변화에 보다 민감하게 영향을 받고 있음을 알 수 있었다. 반면에, 탄성계수비의 변화는 균질의 기층내부 균열에 대한 응력세기계수 크기를 상대적으로 많이 좌우함을 나타내었다.

참고문헌

- (1) Wagner, T., Kirchheim, R. and Ruhle, M., 1995, "Chemical Reactions at Metal/Ceramic Interfaces During Diffusion Bonding," *Acta Metallurgica et Materialia*, Vol. 43, pp. 1053~1063.
- (2) Koizumi, M., 1993, "The Concept of FGM," *Ceramic Transactions*, Functionally Gradient Materials, Holt, J. B., et al., ed., *American Ceramic Society*, Westerville, Ohio, Vol. 34 : pp. 3~10.
- (3) Yang, W. and Shih, C. F., 1994, "Fracture Along an Interlayer," *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 31, pp. 985~1002.
- (4) Rice, J.R. and Sih, G.C., 1965, "Plane Problems of Cracks in Dissimilar Materials," *ASME Journal of Applied Mechanics*, Vol. 32, pp. 418~423.
- (5) England, A. H., 1965, "A Crack Between Dissimilar Media," *ASME Journal of Applied Mechanics*, Vol. 32, pp. 400~402.
- (6) Zak, A.R. and Williams, M. L., 1963, "Crack Point Stress Singularities at a Bimaterial Interface," *ASME Journal of Applied Mechanics*, Vol. 30, pp. 142~143.
- (7) Cook, T.S. and Erdogan, F., 1972, "Stresses in Bonded Materials with a Crack Perpendicular to the Interface," *International Journal of Engineering Science*, Vol. 10, pp. 677~697.
- (8) Atkinson, C., 1977, "On Stress Singularities and Interfaces in Linear Elastic Fracture Mechanics," *International Journal of Fracture*, Vol. 13, pp. 807~820.
- (9) Delale, F. and Erdogan, F., 1988a, "On the Mechanical Modeling of the Interfacial Region in Bonded Half-Planes," *ASME Journal of Applied Mechanics*, Vol. 55, pp. 317~324.
- (10) Delale, F. and Erdogan, F., 1988b, "Interface Crack in a Nonhomogeneous Elastic Medium," *International Journal of Engineering Science*, Vol. 26, pp. 559~568.
- (11) Erdogan, F. and Ozturk, M., 1992, "Diffusion Problems in Bonded Nonhomogeneous Materials With an Interface Cut," *International Journal of Engineering Science*, Vol. 30, pp. 1507~1523.
- (12) Ozturk, M. and Erdogan, F., 1993, "Antiplane Shear Crack Problem in Bonded Materials with a Graded Interfacial Zone," *International Journal of Engineering Science*, Vol. 31, pp. 1641~1657.
- (13) Erdogan, F., 1985, "The Crack Problem for Bonded Nonhomogeneous Materials under Antiplane Shear Loading," *ASME Journal of Applied Mechanics*, Vol. 52, pp. 823~828.
- (14) Schovanec, L. and Walton, J.R., 1988, "On the Order of Stress Singularity for an Antiplane Shear Crack at the Interface of Two Bonded Inhomogeneous Elastic Materials," *ASME Journal of Applied Mechanics*, Vol. 55, pp. 234~236.
- (15) Erdogan, F., Kaya, A.C. and Joseph, P.F., 1991a, "The Crack Problem in Bonded Nonhomogeneous Materials," *ASME Journal of Applied Mechanics*, Vol. 58, pp. 410~418.
- (16) Erdogan, F., Kaya, A.C. and Joseph, P.F., 1991b, "The Mode III Crack Problem in Bonded Materials With a Nonhomogeneous Interfacial Zone," *ASME Journal of Applied Mechanics*, Vol. 58, pp. 419~427.
- (17) Gao, X. and Kuang, Z.-B., 1992, "Mode I Fracture in Two Dissimilar Functional Nonhomogeneous Planes," *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 42, pp. 33~44.
- (18) Kaw, A.K., Selvarathinam, A.S. and Besterfeld, G.H., 1992, "Comparison of Interphase Models for a Crack in Fiber Reinforced Composite," *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, Vol. 17, pp. 133~147.
- (19) Bechel, V.T. and Kaw, A.K., 1994, "Fracture Mechanics of Composites with Nonhomogeneous

- Interphases and Nondilute Fiber Volume Fractions," *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 31, pp. 2053~2070.
- (20) Choi, H.J., Jin, T.E. and Lee, K.Y., 1995, "Transient Thermal Stresses in a Cladded Semi-Infinite Medium Containing an Underclad Crack," *Journal of Thermal Stresses*, Vol. 18, pp. 269~290.
- (21) Choi, H.J., 1996, "An Analysis of Cracking in a Layered Medium with a Functionally Graded Nonhomogeneous Interface," *ASME Journal of Applied Mechanics*, (In press).
- (22) Kausel, E. and Seale S.H., 1987, "Static Loads in Layered Halfspaces," *ASME Journal of Applied Mechanics*, Vol. 54, pp. 403~408.
- (23) Choi, H.J. and Thangjitham, S., 1991, "Stress Analysis of Multilayered Anisotropic Elastic Media," *ASME Journal of Applied Mechanics*, Vol. 58, pp. 382~387.
- (24) Choi, H.J. and Thangjitham, S., 1993, "Thermally Induced Interlaminar Crack-Tip Singularities in Laminated Anisotropic Composites," *International Journal of Fracture*, Vol. 60, pp. 327~347.
- (25) Choi, H.J. and Thangjitham, S., 1994, "The Interlaminar Crack-Tip Response in a Fiber-Reinforced Composite Laminate," *International Journal of Fracture*, Vol. 66, pp. 121~138.
- (26) Wang, Y. and Rajapakse, R.K.N.D., 1994, "An Exact Stiffness Method for Elastodynamics of a Layered Orthotropic Half-Plane," *ASME Journal of Applied Mechanics*, Vol. 61, pp. 339~348.
- (27) Delale, F. and Erdogan, F., 1983, "The Crack Problem for a Nonhomogeneous Plane," *ASME Journal of Applied Mechanics*, Vol. 50, pp. 609~614.
- (28) Sneddon, I.N., 1951, *Fourier Transforms*, McGraw-Hill, New York.
- (29) Friedman, B., 1969, *Lectures on Application-Oriented Mathematics*, Holden-Day, San Francisco.
- (30) Muskhelishvili, N.I., 1953, *Singular Integral Equations*, Noordhoff, Groningen, The Netherlands.
- (31) Gradshteyn, I.S. and Ryzhik, I.M., ed., 1980, *Table of Integrals, Series, and Products*, Academic Press, New York.
- (32) Davis, P.J. and Rabinowitz, P., 1984, *Method of Numerical Integration*, 2nd Ed., Academic Press, New York.
- (33) Murakami, Y., ed., 1987, *Stress Intensity Factors Handbook*, Vol. 1, Pergamon Press, New York.