

<논 문>

파동접근법을 이용한 분기된 배관계의 진동 및 파워흐름해석

구경희* · 박윤식**

(1995년 7월 31일 접수)

Vibration and Power Flow Analysis for the Branched Piping System by Wave Approach

G.H. Koo and Y.S. Park

Key Words : Wave Approach(파동접근법), Branched Piping System(분기배관계), Dynamic Stiffness Matrix(동적 강성행렬), Power Flow(파워흐름)

Abstract

In this paper the vibration and power flow analysis for the branched piping system conveying fluid are performed by wave approach. The uniform straight pipe element conveying fluid is formulated using the dynamic stiffness matrix by wave approach. The branched piping system conveying fluid can be easily formulated with considering of simple assumptions of displacements at the junction and continuity conditions of the pipe internal flow. The dynamic stiffness matrix for each uniform straight pipe element can be assembled by using the global assembly technique using in conventional finite element method. The computational method proposed in this paper can easily calculate the forced responses and power flow of the branched piping system conveying fluid regardless of finite element size and modal properties.

기 호 설 명

A_f, A_p	: 유체단면적, 배관단면적	F_e, F_g	: 국부좌표계 및 기준좌표계에서의 복원력벡터
APF_L, APF_R	: 배관요소의 왼쪽 끝단 및 오른쪽 끝단의 총 능동파워흐름	F_{ie}, F_{if}	: 외부 굽힘 가진력 및 배관유동기인 굽힘력
A_{in}, B_n, C_n	: 굽힘진동, 비틀림진동, 축진동의 파동계수	G	: 탄성전단계수
C	: 배관내부 유체의 속도	I, J	: 배관단면 굽힘관성모멘트 및 비틀림관성모멘트
$[D]_{b.c.}$: 경계조건이 적용된 동적강성행렬	k_a, k_b, k_c	: 굽힘, 비틀림, 축진동 파동수
$[D]_{1e}, [D]_{2e}$: 배관요소의 변위 및 힘계수 행렬	m_p, m_f	: 단위길이당 배관 및 유체질량
$[D]_g$: 기준좌표계에서의 동적 강성행렬	M_{ib}, M_t	: 굽힘모멘트 및 비틀림모멘트
D_i, D_o	: 배관내경 및 외경	p, P_e, P_f	: 배관 내부압력, 축방향 외력, 축방향 유체기인력
$[D]_{sg}$: 배관요소의 동적 강성행렬	S_i	: 전단력
E	: 탄성영계수	$[Tc]$: 좌표변환행렬
f_m, F_m	: m 번째 자유도에 대한 복원력	$w_m(x, t)$: 배관절점에서의 m 번째 자유도 변위
		W_e, W_g	: 국부좌표 및 기준좌표에서의 변위벡터

*한국과학기술원 대학원

**회원, 한국과학기술원 기계공학과

- β, η : 비틀림진동에 대한 손실계수, 굽힘과 축진동에 대한 손실계수
- ν : 푸아송비
- ρ_p : 단위길이당 배관의 극관성모멘트
- ω : 각 주파수

1. 서 론

배관계는 기기 및 구조물을 연결하여 물, 가스 그리고 기름 등 각종 유체를 전달하는 구조물로서 매우 중요하게 취급되는 구조물 중의 하나이다. 따라서 내부유동을 포함한 배관계에 대한 진동해석은 그 설계의 중요성으로 인하여 지금까지 많은 관심의 대상이 되어 왔다. 이러한 내부유동을 포함한 배관계는 지금까지 Chen 및 기타 많은 연구자들에 의하여 배관 내부유동에 따른 안정성과 진동해석에 대한 연구가 수행되어 왔다.^(1~3) 이러한 대부분의 연구자들은 복잡한 배관계에 대해서는 대부분 유한요소 해석법을 사용하였으며 간단한 하나의 직선배관 또는 곡선배관에 대해서는 해석적 방법을 사용하여 연구를 수행하였다.

본 연구에서는 파동특성을 이용한 파동접근법을 사용하여 내부유동을 포함한 복잡한 3차원 배관계에 대한 공식화를 유도하고 이를 이용하여 분기된 배관계에 대한 진동해석 및 파워흐름 해석을 수행하였다. 실제로 보와 같은 단일파동 가이드(single wave guide)에 대한 파동접근법의 적용은 Richard와 Leung에 의하여 이미 오래전에 수행되었으며⁽⁴⁾ 최근에는 Doyle과 그의 동료 그리고 Langley 등에 의하여 많이 이용되었다.^(5,6) 이러한 파동접근법은 균일 직선배관 부위를 근사형상함수를 사용하여 공식화하는 유한요소 해석법과는 달리 파동특성을 이용한 변위에 대한 엄밀해를 사용하여 배관 양끝단의 변위와 복원력 상태벡터로 나타낼 수 있기 때문에 고주파수 진동해석시에 엄밀해를 보장할 수 있는 유리한 장점을 가지고 있다. 내부유동을 포함한 엘보우와 같은 3차원 곡선배관 부위를 파동접근법을 이용하여 하나의 배관요소로 모델링하는 연구는 이미 참고문헌 (7)에서 수행되었다. 파동접근법은 이러한 직선배관부위 및 곡선 배관부위를 많은 유한요소로 표현해야 하는 유한요소 해석법과는 달리 하나의 배관요소로 나타냄으로써 해석시간이 크게 절약되고 단지 소규모의 컴퓨터용량을 필요로 함으로써 개인용 컴퓨터에서 쉽게 해를 구할 수 있다.

본 연구에서 수행한 파워흐름은 최근에 많은 관심의 대상이 되고 있는 분야로서 SEA (Structural Energy Analysis) 방법을 사용하여 파워흐름을 해석한 Lyon를 비롯하여⁽⁸⁾ Nefske와 Sung,⁽⁹⁾ Wohlever와 Bernhard⁽¹⁰⁾ 그리고 Pavic⁽¹¹⁾ 등에 의하여 많은 연구가 수행되어 왔다. 그리고 여러가지 구조물에 대한 파워흐름의 측정에 관한 연구도 많은 연구자들에 의하여 수행되어 왔다.^(12,13) 실질적으로 진동구조물에 있어서 진동에너지의 전달경로에 대한 분석은 진동제어 측면 및 설계측면에서 매우 중요하다. 그러나 일반적인 진동량의 결과만으로는 진동에너지의 전달경로를 쉽게 파악할 수 없다. 본 연구에서 수행한 분기된 배관계에 대한 파워흐름해석은 각 분기배관으로의 진동에너지의 전달경로를 쉽게 분석할 수가 있고 이러한 파워흐름 해석 결과로부터 각 분기배관에 대한 지배적인 진동에너지 전달부위를 분석하여 진동제어를 위한 제어위치 선정과 분기된 배관계의 설계변경 등에 이용할 수 있다.

2. 본 론

2.1 파동접근법을 이용한 배관해석 공식화

Fig. 1과 같이 균일한 단면특성을 갖는 3차원 직선배관요소에 대한 지배 운동방정식은 다음과 같은 편미분방정식의 형태로 표현할 수 있다.

굽힘진동

$$E(1+j\eta)Iy^{IV}(x,t) + pA_y y''(x,t) + m_p \ddot{y}(x,t) = F_{ie}(x,t) + F_{if}(x,t), \quad i=1,2 \quad (1)$$

비틀림진동

$$G(1+j\beta)J\phi''(x,t) - \rho_p \ddot{\phi}(x,t)$$

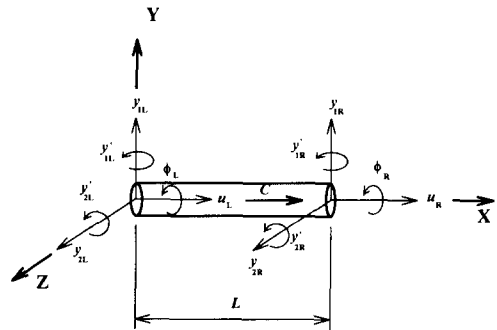


Fig. 1 Displacement vectors of a single straight pipe element conveying fluid

$$= T_e(x, t) + T_f(x, t) \quad (2)$$

축진동

$$\begin{aligned} E(1+j\eta)A_p u''(x, t) - m_p \ddot{u}(x, t) \\ = P_e(x, t) + P_f(x, t) \end{aligned} \quad (3)$$

여기서, 식 (1)의 아래첨자 i 는 두 개의 주 굽힘평면에 대한 굽힘변위를 나타내기 위한 것이다. 배관진동의 감쇠효과를 고려하기 위하여 점탄성재료에 대한 손실계수를 사용하여 탄성계수를 복소수형태로 표현하였으며, 위의 식에서 굽힘진동과 축진동에는 손실계수, η 를 사용하였으며 비틀림진동에는 손실계수, β 를 사용하였다. 각 식들에 있어서는 기호는 기호설명에 나타나 있다.

배관에 작용하는 하중은 배관내부 압력, p 와 가진력 F , T , P 이다. 식 (1)에서 (3)까지의 오른쪽 항에 표현된 가진력에 있어서 아래첨자 e 는 배관외부에서 작용하는 기계적 가진하중을 나타내며 아래첨자 f 는 배관내부 유동으로 인하여 배관의 내벽에 작용하는 유체의 동하중을 나타낸다. 본 논문에서는 이러한 배관내에 작용하는 유체동하중을 플러그유동 근사방법(plug-flow approximation)과 세장물체이론(slender-body theory)을 적용하여 공식화하였다. 이러한 세장 물체이론은 배관직경이 변형파장(wave length)에 비하여 충분히 작고 배관변형이 작은 배관계에 적용 가능하다. 이러한 근사방법을 이용하여 각각의 배관진동 모드에 작용하는 유체의 동하중은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$F_U(x, t) = -m_f \left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} + 2C \frac{\partial^2}{\partial x \partial t} + C^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right] \times y_i(x, t), \quad i=1, 2 \quad (4)$$

$$T_f(x, t) = 0 \quad (5)$$

$$P_f(x, t) = m_f \frac{\partial^2}{\partial t^2} u(x, t) \quad (6)$$

위의 식 (5)에서와 같이 배관의 내부유동은 배관비틀림진동에 영향을 주지 않는 것으로 가정하였다. 따라서 식 (4)에서 (6)을 식 (1)에서 (3)에 대입한 후에 조화가진인 경우를 가정하면 다음과 같은 주파수영역에서의 진동방정식들을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} E(1+j\eta)IY_i^{IV}(x, \omega) + (m_f C^2 + pA_f) Y_i''(x, \omega) \\ + j2m_f \omega C Y_i'(x, \omega) - (m_p + m_f) \omega^2 Y_i(x, \omega) \\ = F_{ie}(x), \quad i=1, 2 \end{aligned} \quad (7)$$

$$G(1+j\beta)J\Phi''(x, \omega) - \rho_p \omega^2 \Phi(x, \omega) = T_e(x, \omega) \quad (8)$$

$$\begin{aligned} E(1+j\eta)A_p U''(x, \omega) + (m_p + m_f) \omega^2 U(x, \omega) \\ = P_e(x, \omega) \end{aligned} \quad (9)$$

위의 각 식들에 대한 일반적인 해는 다음과 같은 파동특성을 이용한 형태로 표현할 수 있다.

$$Y_i(x) = \sum_{n=1}^4 A_{in} e^{k_{an}x} \quad (10)$$

$$\Phi(x) = \sum_{n=1}^2 B_n e^{k_{bn}x} \quad (11)$$

$$U(x) = \sum_{n=1}^2 C_n e^{k_{cn}x} \quad (12)$$

위의 식 (10)에서 굽힘진동에 대한 파동수(wave number), k_a 는 다음과 같은 특성방정식의 4개의 복소근으로부터 구해진다.

$$\begin{aligned} E(1+j\eta)Ik_a^4 + (m_f C^2 + pA_f)k_a^2 + j2m_f \omega Ck_a \\ - (m_p + m_f)\omega^2 = 0 \end{aligned} \quad (13)$$

그리고 비틀림진동 및 축진동에 대한 파동수, k_b 와 k_c 는 다음과 같은 특성방정식의 2개의 복소근들로부터 구해질 수 있다.

$$G(1+j\beta)Jk_b^2 - \rho_p \omega^2 = 0 \quad (14)$$

$$E(1+j\eta)A_p k_c^2 + (m_p + m_f)\omega^2 = 0 \quad (15)$$

따라서 진동방정식에 대한 식 (10)에서 식 (12)까지의 일반적 해로부터 균일한 단면특성을 갖는 직선배관요소에 대한 동적강성행렬(dynamic stiffness matrix)을 구할 수 있다. 이러한 동적강성행렬은 균일 직선배관요소의 양끝점에 대한 변위와 복원력의 상태변수로 부터 구할 수가 있으며 먼저 변위 상태벡터와 파동계수(wave coefficients)와의 관계를 구해보면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} Y_{iL} \\ Y'_{iL} \\ Y_{iR} \\ Y'_{iR} \end{Bmatrix}_e &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ k_{a1} & k_{a2} & k_{a3} & k_{a4} \\ e^{k_{a1}L} & e^{k_{a2}L} & e^{k_{a3}L} & e^{k_{a4}L} \\ k_{a1}e^{k_{a1}L} & k_{a2}e^{k_{a2}L} & k_{a3}e^{k_{a3}L} & k_{a4}e^{k_{a4}L} \end{bmatrix}_e \\ &\times \begin{Bmatrix} A_{i1} \\ A_{i2} \\ A_{i3} \\ A_{i4} \end{Bmatrix}_e \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{Bmatrix} \Phi_L \\ \Phi_R \end{Bmatrix}_e = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ e^{k_{b1}L} & e^{k_{b2}L} \end{bmatrix}_e = \begin{Bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{Bmatrix}_e \quad (17)$$

$$\begin{Bmatrix} U_L \\ U_R \end{Bmatrix}_e = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ e^{k_{c1}L} & e^{k_{c2}L} \end{bmatrix}_e = \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{Bmatrix}_e \quad (18)$$

위의 식들에서 아래첨자, L 과 R 은 균일 직선배관 왼쪽 끝단과 오른쪽 끝단의 상태벡터를 각각 나타

내며, 아래첨자 e 는 국부좌표계를 갖는 균일 직선 배관 요소임을 나타낸다. 위의 식 (16)에서 (18)을 정리하면 변위벡터와 파동계수는 국부좌표계에서 다음과 같은 요소들로 구성된다.

$$\mathbf{W}_e^T = \{ U_L \ Y_{1L} \ Y_{2L} \ \Phi_L \ Y'_{1L} \ Y'_{2L} \ U_R \ Y_{1R} \ Y_{2R} \ \Phi_R \ Y'_{1R} \ Y'_{2R} \}_e \quad (19)$$

$$\mathbf{A}_e^T = \{ A_{11} \ A_{12} \ A_{13} \ A_{14} \ A_{21} \ A_{22} \ A_{23} \ A_{24} \ B_1 \ B_2 \ C_1 \ C_2 \}_e \quad (20)$$

따라서 위의 식 (16)에서 (20)까지로부터 변위상태 벡터와 파동계수와의 관계식을 간략히 표현하면 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\mathbf{W}_e = [\mathbf{D}_1]_e \mathbf{A}_e \quad (21)$$

다음으로 Euler 보이론에 의하여 균일 직선배관 요소에 작용하는 전단력, 굽힘모멘트, 비틀림모멘트 그리고 축력과 같은 선형탄성 복원력은 다음과 같이 구할 수 있다.

$$S_i(x) = -E(1+j\eta) I Y_i'''(x) \quad (22)$$

$$M_{ib}(x) = E(1+j\eta) I Y_i''(x) \quad (22)$$

$$M_i(x) = G(1+j\beta) J \Phi_i'(x) \quad (23)$$

$$P(x) = E(1+j\eta) A_p U_i'(x) \quad (24)$$

위의 식들에서와 같이 복원력 특성들은 변위특성으로 표현되며 따라서 식 (10)에서 (12)의 변위에 대한 일반적 해를 식 (22)에서 (24)에 대입하여 정리하면 균일 직선배관요소의 양끝단에 작용하는 복원력과 파동계수와의 관계식들을 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\begin{Bmatrix} -S_{iL} \\ -M_{ibL} \\ S_{iR} \\ M_{ibR} \end{Bmatrix} = E(1+j\eta) I \begin{bmatrix} k_{a1}^3 & k_{a2}^3 \\ -k_{a1}^2 & -k_{a2}^2 \\ -k_{a1}^3 e^{ka_1 L} & -k_{a2}^3 e^{ka_2 L} \\ k_{a1}^2 e^{ka_1 L} & k_{a2}^2 e^{ka_2 L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_{i1} \\ A_{i2} \\ A_{i3} \\ A_{i4} \end{Bmatrix} \quad (25)$$

$$\begin{Bmatrix} M_{iL} \\ M_{iR} \end{Bmatrix} = G(1+j\beta) J \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ e^{kb_1 L} & e^{kb_2 L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{Bmatrix} \quad (26)$$

$$\begin{Bmatrix} P_L \\ P_R \end{Bmatrix} = E(1+j\eta) A_p \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ e^{kc_1 L} & e^{kc_2 L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{Bmatrix} \quad (27)$$

위의 식 (25)에서 (26)을 정리하면 균일 직선배관 요소 양끝단에서의 선형탄성 복원력 상태벡터는 다음과 같은 요소들을 포함한다.

$$\mathbf{F}_e^T = \{ -P_L - S_{1L} - S_{2L} - M_{1L} - M_{1bL} - M_{2bL} \ P_R \ S_{1R} \ S_{2R} \ M_{1R} \ M_{1bR} \ M_{2bR} \} \quad (28)$$

따라서 식 (25)에서 (28)까지로부터 복원력과 파동계수와의 관계식을 다음과 같이 간략하게 표현할 수 있다.

$$\mathbf{F}_e = [\mathbf{D}_2]_e \mathbf{A}_e \quad (29)$$

균일 직선배관요소에 대한 동적 강성행렬식을 구하기 위하여 식 (21)의 변위와 파동계수와의 관계식으로부터 파동계수를 변위벡터로 표현하면

$$\mathbf{A}_e = [\mathbf{D}_1]_e^{-1} \mathbf{W}_e \quad (30)$$

로 나타낼 수가 있으며, 따라서 식 (30)을 식 (29)에 대입하면 다음과 같은 동적 강성행렬을 갖는 복원력과 변위의 관계식을 구할 수 있다.

$$\mathbf{F}_e = [\mathbf{D}_2]_e [\mathbf{D}_1]_e^{-1} \mathbf{W}_e = [\mathbf{D}]_e \mathbf{W}_e \quad (31)$$

일반적으로 배관내부의 유체유동이 없는 경우에 위의 식(31)에서 동적 강성행렬, $[\mathbf{D}]_e$ 는 주파수의 함수로써 12×12 대칭행렬이지만 배관내부의 유동이 존재할 경우에는 비대칭행렬이 되며 이러한 비대칭의 정도는 식 (7)의 왼쪽편 3번째 항의 유체코리올리힘(fluid Coriolis force)의 크기에 따라서 좌우된다.

식 (31)에서 표현된 동적 강성행렬은 하나의 균일 직선배관요소에 대한 것으로 전체배관계에 대한 동적 강성행렬의 표현은 기존의 유한요소 해석법에서 일반적으로 사용하고 있는 행렬조합법(matrix assembling technique)을 사용하여 각각의 배관요소로부터 구한 동적 강성행렬을 조합함으로써 구할 수 있다. 이러한 행렬조합법을 사용하기 위해서는 국부좌표계로 표현된 각각의 균일 직선배관요소의 동적 강성행렬을 좌표변환행렬, $[\mathbf{T}_c]$ 를 이용하여 기준좌표계로 변환할 필요가 있다. 따라서 식 (31)은 다음과 같이 기준좌표계로 변환할 수 있다.

$$[\mathbf{T}_c]^T \mathbf{F}_e = [\mathbf{T}_c]^T [\mathbf{D}]_e [\mathbf{T}_c] \mathbf{W}_e \quad (32)$$

식 (32)를 간략히 표현하면

$$\mathbf{F}_g = [\mathbf{D}]_{sg} \mathbf{W}_g \quad (33)$$

와 같다. 여기서, 아래첨자 sg 는 기준좌표계에서 구해진 하나의 균일 직선배관요소임을 나타낸다.

2.2 전체 배관계 방정식의 해법

앞의 2.1절에서 유도된 내부유동을 갖는 복잡한

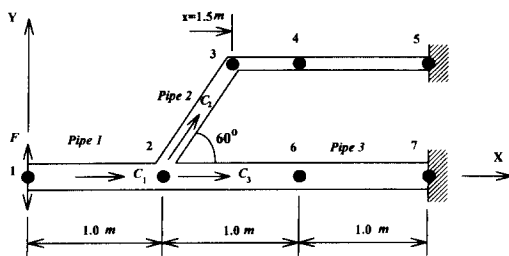
3차원 배관계의 진동방정식은 기준좌표계에서 다음과 같이 간략히 동적 강성행렬식으로 표현될 수 있다.

$$F_g = [D]_g W_g \quad (34)$$

여기서, 아래첨자 g 는 기준좌표계에서 조립된 전체 배관임을 나타낸다. 파동접근법을 이용한 내부유동을 포함한 배관계의 공식화기법은 기존의 유한요소 해석법과는 달리 균일 직선배관 부위를 하나의 배관요소로 표현할 수 있다. 따라서 식 (34)에 포함되어야 하는 또는 자유도가 표현되어야 하는 상태벡터들의 위치는 파동반사위치, 가진위치, 단면 및 재료성질이 바뀌는 곳, 배관지지점, 배관끝단, 배관분기위치, 그리고 원하는 배관응답위치등을 포함해야 한다. 파동접근법을 이용하여 엘보와 같은 굽은 배관부위를 하나의 배관요소로 공식화하는 연구는 참고문헌 (7)에서 이미 연구된 바가 있다.

경계조건을 갖는 전체 배관계의 해를 구하기 위해서 식 (34)에 대하여 배관계의 경계조건들을 적용해야 한다. 이를 위하여 구속되는 절점의 자유도에 해당하는 동적 강성행렬의 열행렬과 종행렬을 제거하면 다음과 같은 경계조건이 적용된 전체 배관계의 식을 구할 수 있다.

$$F_g = [D]_{b.c.} W_g \quad (35)$$



Fluid velocity

$$C_1 = 50 \text{ m/s}, \quad C_2 = 60 \text{ m/s}, \quad C_3 = 35 \text{ m/s}$$

Pipe dimension



$$\text{Pipe 1: } D_i = 0.09 \text{ m}, \quad D_o = 0.1 \text{ m}$$

$$\text{Pipe 2: } D_i = 0.045 \text{ m}, \quad D_o = 0.05 \text{ m}$$

Fig. 2 Configuration of the branched piping system

위의 식 (35)로부터 외부 가진력에 대한 변위응답을 구한 후에 이로부터 식 (34)를 적용하여 자유도가 구속된 경계부위에서의 반력을 구할 수 있다. 상태벡터가 취해지지 않은 모든 균일 직선배관요소 내부의 임의 위치에서의 응답은 식 (34) 및 (35)에서 구해진 변위응답해로부터 식 (30)을 적용하여 각 배관요소에 대한 파동계수를 구한 다음에 식 (10)에서 식 (12)를 적용하여 쉽게 구할 수 있다. 앞서 언급한 것과 같이 파동접근법은 유한요소해석법에서 사용하는 근사형상함수를 사용하지 않고 파동특성을 고려한 변위에 대한 엄밀해를 사용하기 때문에 본 연구에서의 파동접근법을 사용하여 구한 해는 엄밀해로 볼 수 있다.⁽⁴⁻⁶⁾ 파동접근법으로 구한 주파수응답 해석결과로부터 FFT(Fast Fourier Transformation) 기법을 사용하여 시간이력해석을 수행할 수 있으며 이러한 연구는 Doyle에 의하여 많은 연구가 수행된 바가 있다.^(14,15)

2.3 분기배관계의 주파수응답 해석

내부유동을 포함한 분기된 배관계의 모델링에는 분기절점에서의 거동에 대한 구속조건과 배관내부 유동의 연속방정식을 만족하는 조건을 설정해 줌으로써 해석모델링이 가능하다. 먼저 배관의 분기절점에서의 거동에 대한 구속조건은 다음과 같이 분기절점에서의 변위거동은 동일한 것으로 가정한다.

$$x_1 = x_2 = x_3 = \dots = x_n \quad (36)$$

위의 식에서 x 는 분기배관 절점의 자유도를 나타내며, 아래첨자 n 은 각 분기배관들의 분기절점을 나타낸다. 배관내부유동의 연속방정식에 대한 조건은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$C_{in} = A_{in} = C_1 A_1 + C_2 A_2 + C_3 A_3 + \dots + C_n A_n \quad (37)$$

여기서, 아래첨자 in 은 분기절점으로의 유입을 나타내며 n 은 분기관으로의 유출을 나타낸다.

분기배관계에 대한 진동해석의 적용에로써 Fig. 2와 같은 단순 분기배관계를 고려하였다. Fig. 2에서 주배관 1의 외경은 0.1 m, 내경은 0.09 m이고 분기배관의 외경은 0.05 m, 내경은 0.045 m로 가정하였으며 해석에 사용된 배관재질 자료는 $E = 70.0 \times 10^9 \text{ N/m}^2$, $\nu = 0.3$, $m_p = 2.7 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$, $m_f = 1.0 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$, $\eta = 0.01$, 그리고 $\beta = 0.01$ 이다.

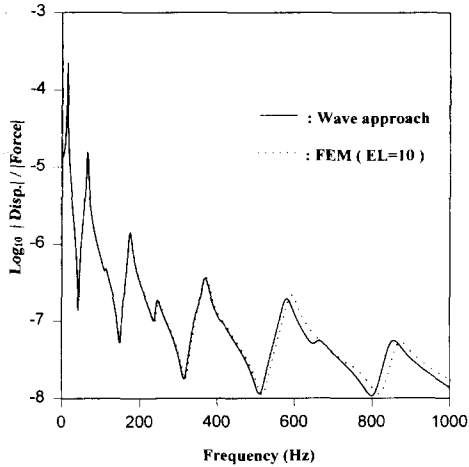


Fig. 3 Frequency responses of the branched piping system at driving point without fluid

Fig. 3은 배관의 내부유체가 없는 경우 가진점에서의 주파수응답을 나타낸 것으로 유한요소법을 이용한 해석결과와 비교하였다. Fig. 3에서 볼 수 있듯이 10개의 요소수를 사용한 유한요소해석 결과는 파동접근법에 비하여 저주파영역에서는 매우 잘 일치하나 주파수가 증가할수록 응답주파수가 파동접근법의 결과에 비하여 증가함을 알 수 있다. 이는 유한요소법에서 사용하고 있는 형상함수에 포함된 오차 및 변형과장에 대한 유한요소의 크기가 충분히 작지 않기 때문에 발생한 것으로 일반적인 고주파 진동해석시에 유한요소 해석법이 나타내는 전형적인 오차이다.

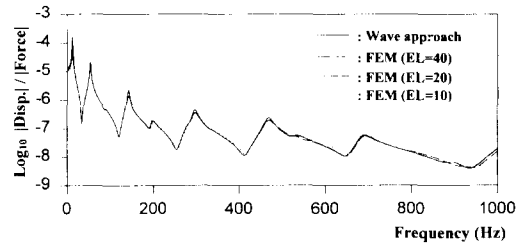
배관내부의 유동효과를 고려하기 위하여 Fig. 2의 배관 1을 통하여 분기점점으로 유입되는 유속을 50 m/s라고 가정할 때 다음과 같은 유체의 연속조건을 얻을 수 있다.

$$C_{in}=50 \text{ m/s} (D_o=0.1 \text{ m}, D_i=0.09 \text{ m})$$

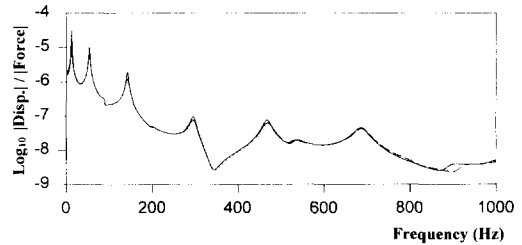
$$C_1=60 \text{ m/s} (D_o=0.05 \text{ m}, D_i=0.045 \text{ m})$$

$$C_2=35 \text{ m/s} (D_o=0.1, D_i=0.09)$$

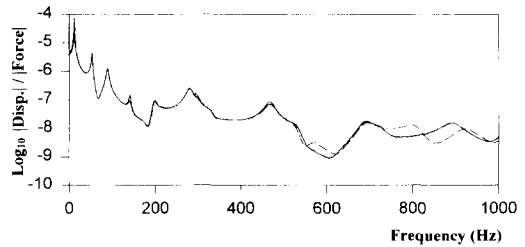
Fig. 4는 각 배관에서의 변위응답을 나타낸 것으로 앞의 내부유체를 고려하지 않은 경우에 비하여 내부유체의 부가질량 및 유체유속의 효과로 인하여 배관의 고유진동수가 줄어들음을 알 수 있다. 또한 Fig. 3과 마찬가지로 저주파에서는 유한요소 해석법과 파동접근법의 결과가 잘 일치하나 고주파로 갈수록 유한요소 해석법에 의한 응답주파수는 증가



(a) At driving point



(b) At location 6



(c) At location 4

Fig. 4 Frequency responses of the branched piping system conveying fluid

하는 결과를 나타낸다. Fig. 2의 해석모델에서 10개의 유한요소를 사용한 유한요소해석시에 요소크기는 0.5 m가 되며 따라서 주파수 500 Hz에서의 변형과장 $\lambda_{f=500\text{Hz}}$ 이 1.33 m임을 고려하면 유한요소의 크기가 변위과장에 비하여 충분히 작기 때문에 500 Hz 근방까지의 유한요소해에 의한 해석결과는 파동접근법에 의한 해석결과와 매우 잘 일치한다. 그러나 변형과장이 500 Hz 이상부터 점점 작아져 1000 Hz에서는 $\lambda_{f=1000\text{Hz}}=0.94 \text{ m}$ 가 됨으로 유한요소법에 의한 해석결과는 강성증가 효과와 같은 해석오차를 유발함으로써 파동접근법에 의한 해석결과에 비하여 응답주파수가 증가하는 결과를 나타낸다. 따라서 Fig. 4에서 볼 수 있듯이 유한요소 해석법에서 요소수를 증가시켜 요소크기를 줄일수록 유한요소 해석결과가 파동접근법에 의한 해석결과

와 점차 일치해 감을 볼 수 있다. 따라서 파동접근법을 이용한 진동해석결과는 앞에서 언급한 것과 같이 엄밀해를 나타냄을 알 수 있다.

2.4 분기배관계의 파워흐름 해석

일반적으로 파워흐름에 대한 정의는 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\text{Power flow} = \frac{\partial w_m(x, t)^T}{\partial t} f_m(x, t) \quad (38)$$

위의 식에서 w_m 과 f_m 은 각각 배관변위와 복원력을 나타낸다. 만일 모든 과정들이 에르고딕하다면 시간평균화는 앙상블평균화와 동일하다. 그리고 외부교란이 정상적(stationary)이고 이러한 외부교란을 파동형태로서 단면을 따라서 전달시키는 구조물의 성질이 시간에 따라서 변하지 않는다고 가정하면 모든 과정들은 정상적이라고 할 수 있다. 따라서 임의 단면위치에서 예상되는 파워흐름의 양의 위의 식 (38)을 시간에 따라서 적분함으로써 구할 수 있다. 또한 이러한 파워흐름의 양은 다음과 같이 Parseval's Theorem을 사용하여 응답변수들의 주파수성분값의 항들로 표현할 수 있다.

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \frac{\partial w_m(x, t)^T}{\partial t} f_m(x, t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} i\omega W_m^H(x, \omega) F_m(x, \omega) \frac{d\omega}{2\pi} \quad (39)$$

위의 식 (39)에서 기호 H 는 Hermitian 또는 복소 공액이항(complex conjugate transpose)을 의미한다. 실제로 파워는 다른 주파수들의 응답변수들 사이의 순간적인 상호작용을 가능하게 하는 비선형 양이지만 위의 식 (39)는 정상상태 파워흐름을 나타내는 동일한 주파수성분들 사이의 상호작용을 나타낸다. 그러므로 위의 식 (39)의 오른쪽항의 적분식을 사용하여 각각의 주파수에 대한 정상상태 파워흐름 양을 구할 수 있다. 따라서 앞의 파동접근법으로 구한 응답결과로부터 균일 배관요소 양끝단에서의 총 능동파워흐름(total active power flow) 양을 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$APE_L = -\frac{1}{2} \text{Re} \left(\sum_{m=1}^6 j\omega W_m^H F_m \right) \quad (40)$$

$$APE_R = -\frac{1}{2} \text{Re} \left(\sum_{m=7}^{12} j\omega W_m^H F_m \right) \quad (41)$$

위의 식 (40)과 (41)에서 총 능동파워흐름이 양의 값을 가지면 파워는 그 절점을 통하여 배관요소로

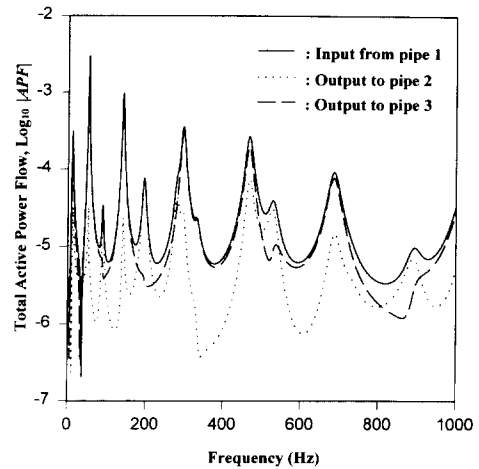


Fig. 5 Results of the Power flow analysis at the branched junction, node 2 with pipe internal flow

부터 빠져나가는 것을 의미하여 음의 값을 가지면 그 절점을 통하여 배관요소로 파워가 들어 오는 것을 의미한다. 이와 같이 구조물의 단면을 통하여 전달되는 파워흐름은 크기를 갖는 스칼라양이며 또한 방향성을 가지는 벡터임을 알 수 있다.

Fig. 5는 위에서 수행한 내부유동을 포함한 분기관의 주파수응답해석 적용예에서 구한 응답결과를 이용하여 Fig. 2의 분기절점 2에서의 파워흐름 해석결과를 나타낸 것으로 가진위치에서부터 분기절점에 유입되는 파워흐름의 양은 분기관 2와 3으로 각각 나누어짐을 알 수 있다. 그리고 분기절점으로 유입된 대부분의 파워흐름은 직경이 큰 분기관 3을 통하여 전달되나 200 Hz 주파수대 근방에서는 직경이 작은 분기관 2을 통하여 더 많은 파워흐름이 생김을 알 수 있다. 이러한 것을 Fig. 4의 변위응답 해석결과에서도 알 수가 있으며, Fig. 4에서 200 Hz 근방의 응답결과는 분기관 2의 응답이 분기관 3의 응답보다 크게 나타남을 알 수 있다. 이러한 배관계에서의 파워흐름은 구조물의 변위, 속도 및 가속도에 대한 동적거동 정보와 구조물의 내부에서 발생하는 응력에 대한 정보를 모두 포함하고 있기 때문에 배관계 또는 일반구조물의 동적설계에 있어서 중요한 변수로 활용될 수 있다. 그리고 또한 파워흐름의 양에 대한 정보는 원하는 위치의 진동제어를 위한 제어위치 선정 및 필요한 제어 진동주파수의 선정에 중요한 자료가 될 수 있다.

3. 결 론

파동접근법을 이용한 분기된 배관계의 진동해석은 각 분기배관의 분기절점에서의 거동이 동일한 것으로 가정하고 배관내부 유체의 연속조건을 고려하면 쉽게 수행될 수 있다. 파동접근법을 이용한 분기된 배관계의 진동해석결과 유한요소 해석법에 비하여 엄밀해를 구할 수 있다. 이는 파동접근법이 유한요소 해석법에서 사용하고 있는 근사형상함수를 사용하지 않고 파동특성을 고려한 변위에 대한 엄밀해를 사용하여 공식화하기 때문이다. 따라서 이러한 파동접근법의 엄밀해를 검증하기 위하여 유한요소 해석법과의 비교분석을 수행한 결과 유한요소해석법에서 요소수를 증가할수록 해석결과가 점차 파동접근법에 의한 해석결과에 접근함을 보였다. 따라서 파동접근법을 이용한 진동해석 결과는 앞서 언급한 것과 같이 엄밀해를 나타냄을 알 수 있다.

분기된 배관계에 대한 파워흐름 해석을 통하여 주파수에 따른 지배적인 진동에너지의 흐름방향을 알 수 있으며 이로부터 원하는 분기배관에 대한 지배적으로 진동에너지가 전달되는 주파수 성분들을 분석할 수 있다.

참고문헌

- (1) Chen, S.S., 1972, "Vibration and Stability of a Uniformly Curved Tube Conveying Fluid," *Journal of the Acoustical Society of America*, Vol. 51 pp. 223~232.
- (2) Kohli, A.K. and Nakva, B.C., 1984, "Vibration Analysis of Straight and Curved Tubes Conveying Fluid by Means of Straight Beam Finite Elements," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 93, pp. 307~311.
- (3) Misra, A.K., Paidoussis, M.P. and Van, K.S., 1988, "On the Dynamics of Curved Pipes Transporting Fluid-Part I: Inextensible Theory," *Journal of Fluids and Structures*, Vol. 2, pp. 222~244.
- (4) Rihards, T.H. and Leung, Y.T., 1977, "An Accurate Method in Structural Vibration Analysis," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 55, No. 3, pp. 363~376.
- (5) Doyle, J.F., 1988, "A Spectrally Formulated Finite Element for Longitudinal Wave Propagation," *International Journal of Analytical and Experimental Modal Analysis*, Vol. 3, No. 1, pp. 1~5.
- (6) Langley, R.S., 1990, "Analysis of Power Flow in Beams and Frameworks Using the Direct-Dynamic Stiffness Method," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 136, No. 3, pp. 439~452.
- (7) Koo, G.H. and Park, Y.S., 1995, "Vibration Analysis of a 3-Dimensional Piping System Conveying Fluid by Wave Approach," *International Journal of Pressure Vessel and Piping*, in Press.
- (8) Lyon, R.H., 1975, *Structural Energy Analysis of Dynamic Systems: Theory and Application*.
- (9) Nefske, D.J. and Sung, S.H., 1989, "Power Flow Finite Element Analysis of Dynamic Systems: Basic Theory and Application To Beams," *Journal of Vibration, Acoustics, Stress and Reliability in Design*, Vol. 111, pp. 94~100.
- (10) Wohlever, J.C. and Bernhard, R.J., 1992, "Mechanical Energy Flow Models of Rods and Beams," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 153, No. 1, pp. 1~19.
- (11) Pavic, G., 1992, "Vibroacoustical Energy Flow Through Straight Pipe," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 154, No. 3, pp. 411~429.
- (12) Noiseux, D.U., 1970, "Measurement of Power Flow in Uniform Beams and Plates," *Journal of the Acoustical Society of America*, Vol. 47, pp. 238~247.
- (13) Pavic, G., 1976, "Measurement of Structure Borne Wave Intensity-Part I: Formulation of the Methods," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 49, No. 2, pp. 221~230.
- (14) Doyle, J.F., 1989, *Wave Propagation in Structures; An FFT-Based Spectral Analysis Methodology*.
- (15) Doyle, J.F. and Farris, T.N., 1990, "A Spectrally Formulated Finite Element for Flexural Wave Propagation in Beams," *International Journal of Analytical and Experimental Modal Analysis*, Vol. 5, No. 2, pp. 99~107.