

〈논 문〉

회전원판의 진행과 모드 절직경 수 규명 -방향성 주파수응답함수의 이용

김명업* · 이종원**

(1995년 8월 16일 접수)

Identification of Diametrical Node Number of Travelling Wave Modes in Rotating Disk-Use of Directional Frequency Response Function

Myeong-Eop Kim and Chong-Won Lee

Key Words : Wave Directional Frequency Response Functions(방향성 주파수응답함수)

Abstract

Directional frequency response functions(dFRFs) are introduced for isotropic rotating disks, treating pairs of excitations and measurements as the complex input and output, respectively. It is shown that the dFRFs can be effectively used for separation of the forward and backward travelling wave modes and identification of the diametrical node numbers associated with modes of interest. Numerical simulations and experimental works are performed to demonstrate the analytical development and its validity.

1. 서 론

회전원판은 축과 함께 회전기계를 구성하는 중요한 기계요소로서, 원통, 웨이퍼가공기, 터빈, 그리고 컴퓨터의 기억장치 등에 많이 응용되고 있다. 최근에 개발되고 있는 회전기계는 에너지 및 재료의 효율적 이용과 기계적 성능 향상을 위해서 지속적으로 고속화, 경량화 추세에 있기 때문에 이에 따른 복잡한 진동 특성을 정확히 파악하는 것이 중요한 연구과제가 되고 있다.^(1~6) 회전원판의 진동 특성은 회전속도에 따라 크게 변화하며 임계 속도에 이르면 아주 작은 횡방향 외력에도 큰 변형이 발생하여 계의 성능 및 안전성을 저하시키게 된다. 이를 방지하기 위해 회전원판의 진동을 줄이기 위한 연구들이 진행되어 왔으나, 회전원판에 대한 진동 특성을 정확히 파악하지 못하여 충분한 효과를 얻

지 못하고 있는 실정이다.

일반적인 정지계의 진동 특성을 규명하기 위하여 실험적인 모드해석이 적용되어 왔으며, 이를 이용하여 얻은 고전적인 주파수응답함수로부터 정지계의 진동 특성을 효과적으로 규명하여 왔다. 그러나 정지계와는 달리 회전에 의한 효과가 포함된 회전원판은 고전적인 주파수응답함수로부터 효과적으로 진동 특성을 규명하기가 어려웠다. 회전원판이 갖는 진동모드의 특성이 절직경과 절원으로 분류되고, 특히 절직경의 수에 따라 진동모드의 특성이 크게 달라지기 때문에 진동 특성을 규명할 때 이에 대한 정보를 파악하는 것이 중요하다. 특히 회전원판이 회전함에 따라 절직경이 존재하는 모드가 전진파와 후진파로 분리되고, 진동모드의 순서가 정지계에서와 다르게 변화하여 특정 회전속도에서 얻어진 고전적인 주파수응답함수로 부터는 각 모드의 절직경 수를 용이하게 파악할 수 없었다.

본 논문에서는 등방 회전원판의 진동 특성(모드 분리와 절직경 수의 규명)을 규명하기 위하여 회전

*삼성자동차(주) 기술연구소

**회원, 한국과학기술원 기계공학과

원판의 주파수응답함수에 대한 수학적인 모델을 제시하고, 이를 이용하여 주파수 영역에서 진동모드의 분리와 절직경 수를 규명하기 위한 방법을 제시하고자 한다. 제시된 방법의 신뢰성을 검증하기 위해서 실험을 수행하였으며, 또한 본 논문에서 제안된 방법들이 일반적인 회전원판, 비대칭성(asymmetry) 원판에도 효과적으로 적용됨을 실험적으로 확인하였다.

2. 운동방정식

컴퓨터 하드디스크나 원형톱을 Fig. 1과 같이 내반경이 a 이고, 외반경이 b 이며, 회전속도 Ω_s 로 회전하는 원판으로 모형화하였다. 횡방향 진동이 아주 작고 감쇠와 회전관성 및 전단변형을 무시할 수 있을 때, 두께가 일정하고 등방성이며 균질인 원판의 무차원 운동방정식을 회전좌표계 (r, θ) 에서 표현하면

$$\frac{\partial^2 w}{\partial \tau^2} + \nabla^4 w = q(r, \theta, \tau) \quad (1)$$

여기서,

$$w(r, \theta, \tau) = \frac{W(R, \theta, t)}{b}$$

$$r = \frac{R}{b}$$

$$\tau = \left(\frac{D}{\rho h b^4} \right)^{1/2} t$$

$$q = \frac{Q b^3}{D}$$

$$D = \frac{E h^3}{12(1 - \mu^2)}$$

식 (1)에서 ρ 는 단위부피당 질량, h 는 두께, E 는 탄성계수, μ 는 푸아송비이고, $Q(R, \theta, t)$ 는 회전좌표계에서 정의된 단위면적당 외력이다. 식 (1)

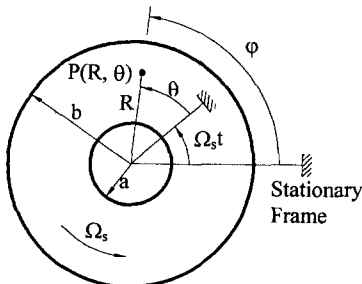


Fig. 1 Configuration of rotating disk

을 관성좌표계 (r, φ) 에서 표현하기 위하여 좌표변환식을 이용하였다. 즉,

$$\begin{aligned} \theta &= \varphi - \Omega_s \tau \\ \frac{\partial w(r, \theta, \tau)}{\partial \tau} &= \frac{\partial v(r, \varphi, \tau)}{\partial \tau} + \Omega_s \frac{\partial v(r, \varphi, \tau)}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial^2 w(r, \theta, \tau)}{\partial \tau^2} &= \frac{\partial^2 v(r, \varphi, \tau)}{\partial \tau^2} + 2\Omega_s \frac{\partial^2 v(r, \varphi, \tau)}{\partial \tau \partial \varphi} \\ &\quad + \Omega_s^2 \frac{\partial^2 v(r, \theta, \tau)}{\partial \varphi^2} \end{aligned} \quad (2)$$

여기에서 v 와 φ 는 무차원 횡방향 변위와 각변위이며, $\Omega_s = \Omega_s \left(\frac{\rho h b^4}{D} \right)^{1/2}$ 는 무차원 회전속도이다. 식 (2)를 식 (1)에 대입하면 다음과 같은 관성좌표계에서의 무차원 운동방정식을 얻는다.

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 v}{\partial \tau^2} &= 2\Omega_s \frac{\partial^2 v}{\partial \tau \partial \varphi} + \Omega_s^2 \frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} + \nabla^4 v \\ &= f(r, \varphi, \tau) \end{aligned} \quad (3)$$

여기에서 $f(r, \varphi, \tau)$ 는 관성좌표계에서 정의된 무차원 외력이다. 식 (3)의 응답을 고유함수(eigenfunction)의 확장정리(expansion theorem)를 이용하여 표현하면

$$\begin{aligned} v(r, \varphi, \tau) &= \sum_{m, n=0}^{\infty} [a_{mn}(\tau) \cos m\varphi \\ &\quad + b_{mn}(\tau) \sin m\varphi] R_{mn}(r) \end{aligned} \quad (4)$$

여기에서 하첨자 m 과 n 은 각각 절직경과 절원의 수를 나타내며, $a_{mn}(\tau)$ 과 $b_{mn}(\tau)$ 은 원주방향과 반경방향의 고유함수를 나타낸다. 식 (4)를 복소형태(complex form)로 표현하면

$$\begin{aligned} v(r, \varphi, \tau) &= \frac{1}{2} \sum_{m, n=1}^{\infty} [c_{mn}(\tau) \cos^{-jm\varphi} \\ &\quad + \bar{c}_{mn}(\tau) e^{jm\varphi}] R_{mn}(r) \end{aligned} \quad (5)$$

여기에서

$$c_{mn}(\tau) = a_{mn}(\tau) + j b_{mn}(\tau)$$

또한 '-'는 공액복소(complex conjugate), j 는 허수를 나타내며, $c_{mn}(\tau)$ 는 복소파좌표(complex wave coordinate), $e^{-jm\varphi}$ 와 $e^{jm\varphi}$ 는 원주방향의 고유함수를 의미한다.

3. 주파수응답함수

이 절에서는 물리적인 의미를 갖는 등방 회전원판의 주파수응답함수를 3단계의 과정을 통하여 유도하였다. 첫번째로 모드해석을 이용하여 연속체

방정식으로부터 각 파좌표(wave coordinate)에 대한 모드 방정식을 유도하고, 관심있는 주파수영역에 포함되어 있는 모드의 모드방정식만을 이용하여 부분계를 구성한 다음 파좌표계에서 정의되는 방향성 주파수응답함수(wave dFRF)를 얻는다. 얻어진 주파수응답함수는 파좌표계에서 정의되었기 때문에 모드 변위와 모드 힘과의 관계를 나타낸다. 두번째로 파좌표에서 정의되는 모드 힘, 모드 변위들과 관성좌표계에서 정의되는 외력과 변위 사이의 관계를 유도하며, 마지막으로 앞의 과정에서 얻어진 결과를 이용하여 관성좌표계에서 정의되는 주파수응답함수를 구성한다.

회전원판에서 관측되는 전진파와 후진파 모드들과 공액 모드들에 관한 물리적인 의미를 명확히 이해하기 위해서는 Lee^(7,9)에 의해 제안된 방향성 주파수응답함수를 정의하는 것이 편리하다. 식 (5)를 이용하면 파방향성 주파수응답함수(wave dFRF)를 유도할 수 있다. 식 (5)를 식 (3)에 대입하고 얻어진 식에 $R_{mn}(r)e^{jm\varphi}$ 를 곱하고 고유함수의 직교성을 이용하면, 다음과 같은 진행파에 관한 모드 방정식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} \ddot{c}_{mn}(\tau) - 2jm\Omega\dot{c}_{mn}(\tau) + (\omega_{mn}^2 - m^2\Omega^2)c_{mn}(\tau) \\ = f_{mn}(\tau) \end{aligned} \quad (6)$$

여기에서 ω_{mn} 은 정지원판의 (m, n) 모드의 무차원 주파수이며, $f_{mn}(\tau)$ 은 복소모드힘으로 다음과 같이 표현된다.

$$f_{mn}(\tau) = \int_0^{2\pi} \int_a^b f(r, \varphi, \tau) e^{jm\varphi} R_{mn}(r) r dr d\varphi \quad (7)$$

식 (6)을 푸리에 변환시키면

$$C_{mn}(j\omega) = H_{fc}^{mn}(j\omega) F_{mn}(j\omega) \quad (8)$$

여기에서 $C_{mn}(j\omega)$ 과 $F_{mn}(j\omega)$ 는 각각 $c_{mn}(\tau)$ 와 $f_{mn}(\tau)$ 의 푸리에 변환이며, $H_{fc}^{mn}(j\omega)$ 는 다음과 같이 표현된다.

$$H_{fc}^{mn}(j\omega) = \frac{-1}{2\omega_{mn}(\omega - \omega_{mn}^F)} + \frac{1}{2\omega_{mn}(\omega - \omega_{mn}^B)} \quad (9)$$

위식은 파좌표계에서 표현된 파방향성 주파수응답함수라고 정의한다. 여기에서 ω_{mn}^B 와 ω_{mn}^F 는 전진파와 후진파 모드의 무차원 고유진동수로 다음과 같다.

$$\omega_{mn}^B = -(\omega_{mn} - m\Omega) < 0 \text{ (for } \Omega < \frac{\omega_{mn}}{m} \text{)}$$

$$\omega_{mn}^F = (\omega_{mn} + m\Omega) > 0 \quad (10)$$

회전원판의 완전한 응답을 얻기 위해서는 식 (5)의 공액 파좌표계(complex conjugate wave coordinate)에서 표현되는 파방향성 주파수응답함수를 정의하여야 한다.

$$\bar{C}_{mn}(j\omega) = H_{fc}^{mn}(j\omega) \bar{F}_{mn}(j\omega) \quad (11)$$

여기에서 $\bar{C}_{mn}(j\omega)$ 와 $\bar{F}_{mn}(j\omega)$ 는 $\bar{c}_{mn}(\tau)$ 와 $\bar{f}_{mn}(\tau)$ 의 푸리에 변환이며

$$\begin{aligned} H_{fc}^{mn}(j\omega) &= \frac{1}{2\omega_{mn}(\omega + \omega_{mn}^F)} + \frac{-1}{2\omega_{mn}(\omega + \omega_{mn}^B)} \\ &= \bar{H}_{fc}^{mn}(-j\omega) \\ &= H_{fc}^{mn}(-j\omega) \end{aligned} \quad (12)$$

회전원판의 횡방향 진동은 각각의 진동모드에 대응된 진행파들의 중첩으로 표현할 수 있으며 주파수가 낮은 몇개의 지배적인 진행파모드들로 이루어진 응답이 횡방향 진동의 대부분을 차지하는 경우가 많다. 따라서, 관심있는 주파수 영역(낮은 주파수 영역)에 포함된 M 개의 진행파 모드들로 응답이 구성되어 있다고 가정할 수 있다. 또한 낮은 주파수 영역에서는 주로 절직경 모드만이 존재하므로 절원모드를 나타내는 하첨자 n 은 기호의 편리성을 위해서 생략하였다. M 개의 진행파 모드들로 구성된 부분계는 다음과 같이 모형화 된다.

$$\dot{\mathbf{q}}_M(\tau) + \mathbf{D}_M \mathbf{q}_M(\tau) + \mathbf{K}_M \mathbf{q}_M(\tau) = \mathbf{f}_M(\tau) \quad (13)$$

여기에서

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_M(\tau) &= [c_{m_1}(\tau) \cdots c_{m_M}(\tau)]^T \\ \mathbf{f}_M(\tau) &= [f_{m_1}(\tau) \cdots f_{m_M}(\tau)]^T \\ \mathbf{D}_M(\tau) &= -2j\Omega \text{diag.}[m_1, m_2(\tau) \cdots m_M] \\ \mathbf{K}_M &= \text{diag.}[\omega_{m_1}^2 - m_1^2\Omega^2, \omega_{m_2}^2 - m_2^2\Omega^2, \cdots, \\ &\quad \omega_{m_M}^2 - m_M^2\Omega^2] \end{aligned}$$

여기에서 하첨자 m_i 는 부분계에 포함된 각모드의 절직경 수를 나타낸다. 식 (13)을 푸리에 변환하면

$$\mathbf{Q}_M(j\omega) = \mathbf{H}_M(j\omega) \mathbf{F}_M(j\omega) \quad (14)$$

여기에서

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_M(j\omega) &= [C_{m_1}(j\omega) \cdots C_{m_M}(j\omega)]^T \\ \mathbf{F}_M(j\omega) &= [F_{m_1}(j\omega) \cdots F_{m_M}(j\omega)]^T \\ \mathbf{H}_M(j\omega) &= \text{diag.}[H_{fc}^{m_1}, H_{fc}^{m_2}, \cdots, H_{fc}^{m_M}] \end{aligned} \quad (15)$$

여기에서 $H_{fc}^{m_i}(j\omega)$ 는 절직경 수 m_i 에 관련된 파

방향성 주파수응답함수를 의미한다.

k 번째 위치 (r_k^r, φ_k) 에서 측정된 식 (7)의 응답 $\nu(r, \varphi, \tau)$ 은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\nu_k(\tau) = \frac{1}{2}\{u_k(\tau) + \bar{u}_k(\tau)\} \quad (16a)$$

여기에서

$$u_k = \sum_{i=1}^M c_{m_i}(\tau) e^{-jm_i\varphi_k} R_{m_i}(r_k^r)$$

또한 행렬식으로 쓰면

$$\nu(\tau) = \frac{1}{2}\{u(\tau) + \bar{u}(\tau)\} \quad (16b)$$

여기에서

$$u(\tau) = \mathbf{T}r\mathbf{Q}_M(\tau) \quad (16c)$$

$$\nu(\tau) = [\nu_1(\tau) \nu_2(\tau) \cdots \nu_K(\tau)]^T$$

$$u(\tau) = [u_1(\tau) u_2(\tau) \cdots u_K(\tau)]^T$$

$$\mathbf{T}_r = \begin{bmatrix} e^{-jm_1\varphi_1} R_{m_1}(r_1^r) & \cdots & e^{-jm_M\varphi_1} R_{m_M}(r_1^r) \\ \vdots & & \vdots \\ e^{-jm_1\varphi_K} R_{m_1}(r_K^r) & \cdots & e^{-jm_M\varphi_K} R_{m_M}(r_K^r) \end{bmatrix}$$

그리고 K 는 측정위치의 개수를 나타낸다. 식 (16c)를 푸리에 변환하면 다음과 같이 표현된다.

$$\mathbf{U}(j\omega) = \mathbf{T}_r\mathbf{Q}_M(j\omega) \quad (17)$$

여기에서

$$\mathbf{U}(j\omega) = [U_1(j\omega) \cdots U_K(j\omega)]^T \quad (18)$$

$U_k(j\omega)$ 는 $u_k(\tau)$ 의 푸리에 변환이다.

L 개의 가진기가 있을 때, 식 (3)의 외력 $f(r, \varphi, \tau)$ 는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$f(r, \varphi, \tau) = \sum_{l=1}^L \frac{f_l(\tau) \delta(r - r_l^r) \delta(\varphi - \varphi_l^r)}{r} \quad (19)$$

식 (19)를 식 (7)에 대입하면 외력과 모드힘과의 관계식을 얻을 수 있다.

$$f_{m_i}(\tau) = \sum_{l=1}^L f_l(\tau) R_{m_i}(r_l^r) e^{jm_i\varphi_l^r} \quad (20a)$$

또는

$$\mathbf{f}_M(\tau) = \mathbf{T}_r\mathbf{f}(\tau) \quad (20b)$$

여기에서

$$\mathbf{f}(\tau) = [f_1(\tau) f_2(\tau) \cdots f_L(\tau)]^T$$

여기에서 $f_{m_i}(\tau)$ 는 절직경 수 m_i 에 관련된 모드 힘이며, r_l^r 과 φ_l^r 는 l 번째 외력의 반경방향과 원주

방향의 위치를 나타낸다. 식 (20b)를 주파수영역에서 표현하면

$$\mathbf{F}_M(j\omega) = \mathbf{T}_r\mathbf{F}(j\omega) \quad (21)$$

여기에서

$$\mathbf{F}(j\omega) = [F_1(j\omega) \cdots F_L(j\omega)]^T$$

$$\mathbf{T}_r = \begin{bmatrix} e^{jm_1\varphi_1} R_{m_1}(r_1^r) & \cdots & e^{jm_1\varphi_L} R_{m_1}(r_L^r) \\ \vdots & & \vdots \\ e^{jm_M\varphi_1} R_{m_M}(r_1^r) & \cdots & e^{jm_M\varphi_L} R_{m_M}(r_L^r) \end{bmatrix} \quad (22)$$

식 (14), 식 (17) 그리고 식 (21)을 이용하면 다음과 같은 주파수응답 행렬을 얻을 수 있다.

$$\mathbf{U}(j\omega) = \mathbf{H}^0(j\omega) \mathbf{F}(j\omega), \bar{\mathbf{U}}(j\omega) = \mathbf{H}^c(j\omega) \mathbf{F}(j\omega) \quad (23)$$

여기에서

$$\mathbf{H}^0(j\omega) = \mathbf{T}_r\mathbf{H}_M(j\omega) \mathbf{T}_r, \mathbf{H}^c(j\omega) = \bar{\mathbf{T}}_r\mathbf{H}_M(j\omega) \bar{\mathbf{T}}_r$$

$$\mathbf{H}_M(j\omega) = \text{diag.}[H_{f_c}^{m_1} H_{f_c}^{m_2} \cdots H_{f_c}^{m_M}] \quad (24)$$

여기에서 $\bar{\mathbf{U}}(j\omega)$ 는 $\bar{u}(\tau)$ 의 푸리에 변환이다. 따라서 실험에서 실제적으로 측정되는 횡방향 변위와 외력에 대한 주파수응답 행렬을 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$\mathbf{V}(j\omega) = \mathbf{H}(j\omega) \mathbf{F}(j\omega) \quad (25)$$

여기에서

$$\mathbf{H}(j\omega) = \frac{1}{2}\{\mathbf{H}^0(j\omega) + \mathbf{H}^c(j\omega)\}$$

$$= \frac{1}{2}\{\mathbf{T}_r\mathbf{H}_M(j\omega) \mathbf{T}_r + \bar{\mathbf{T}}_r\mathbf{H}_M(j\omega) \bar{\mathbf{T}}_r\} \quad (26a)$$

또한

$$H_{lk}(j\omega) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^M \left(R_{m_i}(r_l^r) R_{m_i}(r_k^r) \right) \times \{e^{jm_i\varphi_{lk}} H_{f_c}^{m_i}(j\omega) + e^{-jm_i\varphi_{lk}} H_{f_c}^{m_i}(j\omega)\} \quad (26b)$$

여기에서,

$$\varphi_{lk} = \varphi_l^r - \varphi_k^r$$

여기에서 $V(j\omega)$ 는 $\nu(j\omega)$ 의 푸리에 변환이다. 관성좌표계에서 정의되는 주파수응답함수, $H_{lk}(j\omega)$,는 $H_{f_c}^{m_i}(j\omega)$ 의 공액형태인 $H_{f_c}^{m_i}(j\omega)$ 를 포함하기 때문에 항상 중복된 정보를 갖게 된다는 사실

에 주목하여야 한다. 만약 중복된 정보인 $H_{fc}^m(j\omega)$ 를 포함하지 않는 주파수응답함수를 구할 수 있다면 보다 쉽게 모드를 구별할 수 있을 것이다. 다음 절에서 이에 관련된 방법을 제시하고자 한다.

4. 전진파와 후진파 모드의 분리 및 규명

주파수영역에서 전진파 및 후진파 모드를 그들의 공액 모드로부터 분리하기 위하여 Lee^(7,9)에 의하여 회전축 계에 적용된 방법인 복소모드시험법의 개념을 회전 원판에 적용하였다. 복소모드시험법의 주된 개념은 복소입력과 복소출력으로 얻어지는 방향성 스펙트럼을 사용하는 것이다. 방향성 주파수응답함수는 관성좌표계에서 정의되므로 좌표계에서 얻어진 식 (9)와 식 (12)와는 다르다. 복소기호법 $p = \nu_1 + j\nu_2$ 와 $g = f_1 + jf_2$ 를 도입하고 식 (26)을 이용하여 복소영역에서 방향성 주파수응답함수를 다음과 같이 얻을 수 있다.⁽⁷⁻¹²⁾

$$P(j\omega) = [H_{gp}(j\omega) \ H_{gp}(j\omega)] \begin{Bmatrix} G(j\omega) \\ \bar{G}(j\omega) \end{Bmatrix} \quad (27)$$

여기에서

$$2H_{gp}(j\omega) = H_{11}(j\omega) + H_{22}(j\omega) - j[H_{21}(j\omega) - H_{12}(j\omega)] \quad (28a)$$

$$2H_{gp}(j\omega) = H_{11}(j\omega) - H_{22}(j\omega) + j[H_{21}(j\omega) + H_{12}(j\omega)] \quad (28b)$$

여기에서 $P(j\omega)$, $G(j\omega)$ 그리고 $\bar{G}(j\omega)$ 는 각각 $p(\tau)$, $g(\tau)$ 그리고 $\bar{g}(\tau)$ 의 푸리에 변환이다. 이론의 일반성을 잃지 않으면서 이해의 편의를 위하여 다음과 같은 병치(collocated case)된 경우를 가정하

였다.

$$\begin{aligned} \varphi_{11} &= \varphi_{22} = 0 \\ \varphi_{12} &= -\varphi_{21} = -\varphi_0 \\ r_1^r &= r_2^r = r_1^f = r_2^f = r_0 \end{aligned} \quad (29)$$

여기에서 φ_0 는 두 센서들간의 상대적인 각변위이다. 식 (26)과 식 (29)를 식 (28)에 대입하면

$$2H_{gp}(j\omega) = \sum_{i=1}^M R_{m_i}^2(r_0) \left\{ H_{fc}^{m_i}(j\omega) [1 + \sin m_i \varphi_0] + H_{fc}^{m_i}(j\omega) [1 - \sin m_i \varphi_0] \right\} \quad (30a)$$

$$2H_{\hat{g}p}(j\omega) = \sum_{i=1}^M jR_{m_i}^2(r_0) \cos m_i \varphi_0 \left\{ H_{fc}^{m_i}(j\omega) + H_{fc}^{m_i}(j\omega) \right\} \quad (30b)$$

$H_{gp}(j\omega)$ 와 $H_{\hat{g}p}(j\omega)$ 는 각각 정방향과 역방향 주파수응답함수로 정의되며, 종괄호안은 두부분으로 구분할 수 있다. 즉 $H_{fc}^{m_i}(j\omega)$ 가 포함된 첫번째항과 그것의 공액모드, $H_{fc}^{m_i}(j\omega)$, 가 포함된 두번째항으로 구성되어 있다. 만약 $\sin m_i \varphi_0 = 1$ 이면, $H_{fc}^{m_i}(j\omega)$ 의 영향이 정방향 주파수응답함수에서 사라짐을 식 (30a)에서 알 수 있다. 또한 식 (30b)에서는 m_i 에 관련된 모든 모드가 역방향 주파수응답함수에서 사라짐을 알 수 있다. 이와 같은 효과를 이용하면 고전적인 주파수응답함수에 나타난 전진파와 후진파 모드를 주파수영역에서 분리할 수 있으며, 또한 각 모드의 절직경 수를 규명할 수 있다. $\sin m_i \varphi_0 = 1$ 이 되는 조건을 구하면 다음과 같은 식으로 표현된다.

$$m_i \varphi_0 = \frac{(4k+1)\pi}{2}, \quad k=0, 1, 2, \dots \quad (31)$$

각각의 절직경 수에 대해서 식 (31)을 만족하는

Table 1 Separation of forward/backward travelling waves

(m,n) Mode	Angular distance between two stations (φ_0)		
	k=0	k=1	k=2
(1, ●)	$\pi/2$	$5\pi/2$	$9\pi/2$
(2, ●)	$\pi/4$	$5\pi/4$	$9\pi/4$
(3, ●)	$\pi/6$	$5\pi/6$	$3\pi/2$
(4, ●)	$\pi/8$	$5\pi/8$	$9\pi/8$
(5, ●)	$\pi/10$	$\pi/2$	$9\pi/10$
(6, ●)	$\pi/12$	$5\pi/12$	$3\pi/4$

Table 3 Specification of tested rotating disk

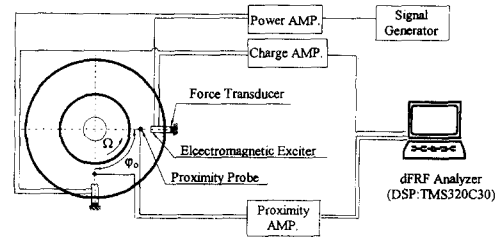
Parameters	Values
Young's modulus, N/m ²	2.0 E11
Density, Kg/m ³	7940
Poisson's ratio	0.3
Inner radius, m	0.11275
Outer radius, m	0.2255
Thickness, m	1.30 E-3

φ_0 는 무한히 존재하기 때문에 Table 1에 그러한 해 중에서 대표적인 것을 나타내었다. 실제로는 변위 센서와 가진기의 크기 때문에 관심있는 모드의 모드시험을 위해 이용할 수 있는 각위치는 제한적일 수 밖에 없다. Table 2에는 각 모드를 위한 대표적인 각위치를 나타내었다. 예를 들면, $\varphi_0=90^\circ$ 일때는 (1, ●), (5, ●) 그리고 (9, ●) 모드들에 관련된 전진파와 후진파가 정방향 주파수응답함수에서 동시에 분리되고, 역방향 주파수응답함수에서는 완전히 사라지게 되며, 다른 모드들은 공액 모드들까지 $H_{gp}(j\omega)$ 와 $H_{\bar{g}p}(j\omega)$ 에 나타남을 알 수 있다. 이러한 특성은 실험으로 얻어진 주파수응답함수에 나타나는 각 모드의 절직경수를 규명하는데 이용할 수 있다. 이와 유사한 방법을 이용하여 다른 모드들도 전진파와 후진파를 분리하고 각 모드의 절직경수를 규명할 수 있다.

5. 결과와 토의

5.1 실험장치

제안된 방법의 유효성을 확인하기 위하여 실험실 규모의 회전원판에 제안된 이론을 적용하였다. 회

**Fig. 2** Schematic diagram of experimental set-up

전 원판의 주파수응답함수를 구하기 위하여 실험장치를 Fig. 2의 개략도와 같이 구성하였으며, 실험에 사용된 원판의 물성치와 크기는 Table 3에 나타내었다. 원판을 정속으로 회전시키기 위하여 속도피드백과 서보 제어를 갖는 DC모터를 이용하였으며 속도의 변화량은 0.1%미만이였다. 모터로부터 발생된 진동이 축을 통하여 회전원판에 전달되는 것을 줄이기 위하여 플렉시블 커플링과 평면벨트를 사용하였다. Fig. 3과 4는 실제의 실험장치와 회전원판을 랜덤신호로 가진시키기 위하여 사용된 비접촉식 전자석 가진기를 보여준다. 전자석 가진기는 U자형 보에 고정된 한쌍의 전자석과 힘의 측정을 위한 하중계 그리고 고정용 지그로 구성되어 있으며 각 전자석은 와전류에 의한 손실을 줄이기 위하여 0.35 mm의 규소강판 15장을 적층하였다. 실험에 이용된 회전속도는 480 rpm으로 환산된 무차원 속도로는 $\Omega=1.3$ 이 되며, 와전류방식의 변위센서를 이용하여 회전원판의 횡방향 변위를 측정하였다.

5.2 결과 및 고찰

Fig. 5에는 고전적인 주파수응답함수를 나타내었다. (1, 0) F 와 (1, 0) B , (2, 0) B 그리고 (0, 0) 모드와 각 모드의 공액모드[(1, 0) \bar{F} , (1, 0) \bar{B} , (2, 0) \bar{B}]들이 존재함을 볼 수 있다. 전진파에 관련된 모

Table 2 (m, n) modes of separation

Angular distance between two stations (φ_0)	(m, n) modes of separation
$\pi/2$	(1, ●), (5, ●), (9, ●), ...
$\pi/4$	(2, ●), (10, ●), ...
$3\pi/2$	(3, ●), (7, ●), (11, ●), ...
$\pi/8$	(4, ●), (20, ●), ...
$3\pi/4$	(6, ●), (14, ●), ...

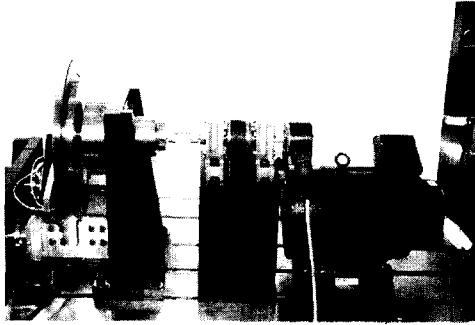


Fig. 3 Perspective view of experimental set-up

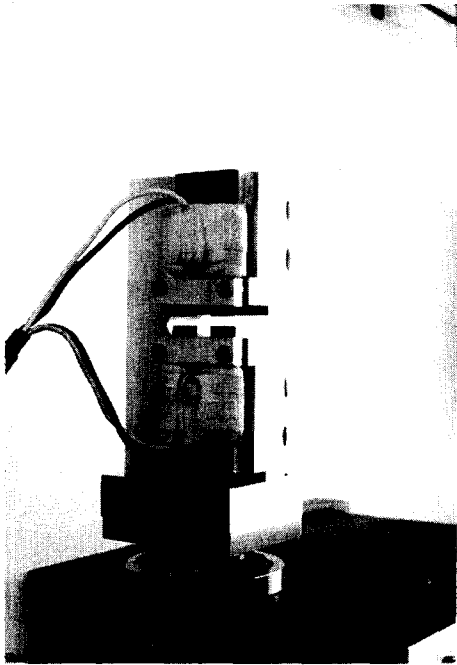


Fig. 4 Perspective view of excitation device

드는 (+)주파수 영역에 나타나며 후진파 모드는 (-)주파수 영역에 나타남을 볼 수 있으며 공역 모드들은 대칭 영역에 나타남을 볼 수 있다. 따라서 고전적인 주파수응답함수에서는 각 모드가 가지는 방향성에 대한 정보를 잃어버리고 두 주파수 영역에 같은 정보를 보여주므로 모드를 분리하거나 모드의 절직경수를 규명하는 것이 어렵다는 것을 알 수 있다. Fig. 6에는 복소모드시험법을 이용하여 얻은 $\varphi_0=90^\circ$ 일 때의 방향 주파수응답함수를 나타내었다. 공역모드인 $(1,0)\bar{F}$ 와 $(1,0)\bar{B}$ 모드들이 정방향 주파수응답함수에서 사라짐을 볼 수 있으며, $(1,0)F$ 와 $(1,0)B$ 모드가 (+)와 (-)주파수영역

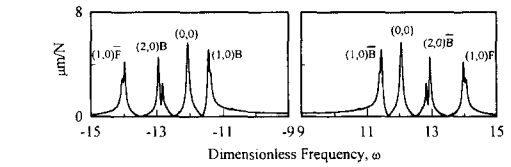


Fig. 5 Conventional FRF of tested rotating disk : $\Omega = 1.3$

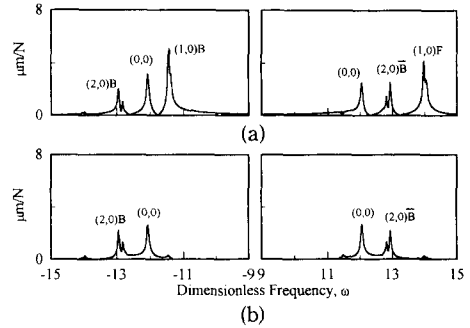


Fig. 6 (a) Normal and (b) reverse dFRFs of tested rotating disk : $\Omega = 1.3$; $\varphi_0 = 90^\circ$

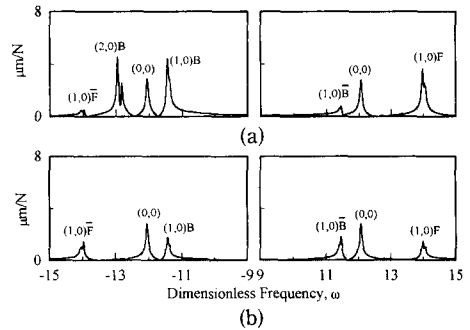


Fig. 7 (a) Normal and (b) reverse dFRFs of tested rotating disk : $\Omega = 1.3$; $\varphi_0 = 45^\circ$

에서 명확히 관측됨을 볼 수 있다. 즉, $(1,0)$ 모드에 관련된 전진파와 후진파 모드가 정방향 주파수응답함수에서 잘 분리 됨을 의미한다. 또한 역방향 주파수응답함수에서는 $(1,0)$ 에 관련된 모든 모드가 사라짐을 볼 수 있으며, 이러한 결과를 바탕으로 주파수응답함수에서 관측된 각모드의 절직경수를 규명할 수 있다. Fig. 7에는 $\varphi_0=45^\circ$ 일 때의 방향성 주파수응답함수를 나타내었으며, 공역모드인 $(2,0)\bar{B}$ 모드가 정방향 주파수응답함수에서 사라지고 $(2,0)B$ 모드가 (-)주파수영역에서 명확히 관측됨을 볼 수 있다.

Fig. 5와 6 그리고 7에서 $(1,0)$ 모드들에 관련된

약간 분할된 피크(split mode)들을 볼수가 있다. 이것은 원판을 지지대에 고정시킬 때 발생하는 비대칭성의 영향 때문이다. 이러한 현상을 보여주는 원판을 비대칭성(asymmetry) 원판이라 부르며 실제 환경에서는 종종 발생하게 된다. 따라서 본 연구에서 등방 회전원판을 위해 제안된 방법이 비대칭성 원판에서도 잘 적용됨을 실증한 결과라 할수 있다.

6. 결 론

모드해석 방법을 이용하여 등방 회전원판의 고전적인 주파수응답함수를 유도하였다. 얻어진 주파수응답함수와 복소모드시험이론을 이용하여 등방 회전원판에 대한 방향성 주파수응답함수를 유도하였다. 정방향 주파수응답함수를 이용하여 전진파와 후진파를 효과적으로 분리하였으며, 정방향 및 역방향 주파수응답함수를 이용하여 각 모드의 절직경수를 규명하는 방법을 제안하였다. 실험을 통하여 제안된 방법의 유효성을 검증함과 아울러 실제 환경에서 자주 발생하는 비대칭성 회전원판에도 잘 적용됨을 확인하였다.

참고문헌

- (1) Shinha, S. K., 1987, "Determination of Natural Frequencies of a Thick Spinning Annular Disk Using a Numerical Rayleigh-Ritz's Trial Function," *Journal of Acoustical Society of America*, Vol. 81, No. 2, pp. 357~369.
- (2) Chonan, S. and Sato, S., 1988, "Vibration and Stavbility of Rotating Free-Clamped Slicing Blades," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 127, No. 2, pp. 254~262.
- (3) Honda, Y., Matsuhisa, H. and Sato, S., 1985, "Modal Response of a Disk to a Moving Concentrated Harmonic Force," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 102, No. 4, pp. 457~472.
- (4) Byun, S. W. and Lee, C. W., 1988, "Pole Assignment in Rotating Disk Vibration Control using Complex Modal State Feed, back," *Mechanical System and Signal Processing*, Vol. 2, No. 3, pp. 225~241.
- (5) Radcliffe, C. J. and Mote Jr., C. D., 1983, "Identification and Control of Rotating Disk Vibration," *ASME Journal of Dynamic System, Measurement and Control*, Vol. 105, pp. 39~45
- (6) Kim, C. S. and Lee, C. W., 1988, "Travelling Wave Control of Rotating Discs and Analysis of its Spillover Effect," *Processdings Institution of Mechanical Engineers*, Vol. 202, No. c2, pp. 119~127.
- (7) Lee, C. W., 1991, "A Complex Modal Testing Theory for Rotating Machinery," *Mechanical System and Signal Processing*, Vol. 5. No. 2, pp. 119~137.
- (8) Lee, C. W. and Joh, Y.D., 1993, "Theory of Excitation Methods and Estimation of Frequency Response Functions in Complex Modal Testing of Rotating Machinery," *Mechanical System and Signal Processing*, Vol. 7, No. 1, pp. 57~74.
- (9) Lee, C. W., 1993, *Vibration Analysis of Rotors*, Kluwer Academic Publishers.
- (10) Joh, Y. D. and Lee, C. W., 1993, "Excitation Methods and Modal Parameter Identification in Complex Modal Testing of Rotating Machinery," *International Journal of Analytical and Experimental Modal Analysis*, Vol. 8, No 3, pp. 179~203.
- (11) Lee, C. W. and Joh, C. Y., 1994, "Theoretical Development of the use of the dFRFs for the Diagnosis of Anisotropy and Asymmetry in Rotating Machinery : Theory," *Mechanical System and Signal Processing*, Vol. 8, No. 6, pp. 665~678.
- (12) Joh, C. Y. and Lee, C. W., 1995, "Use of dFRFs for Diagnosis of Asymmetric/Anisotropic Properties in Rotor-Bearing System," *ASME Journal of Vibration and Acoustics*, Vol. 117, No. 4(in press).