

〈논 문〉

정밀도 성능평가를 위한 3차원 측정기 수치모델 개발

박 희 재*

(1995년 7월 22일 접수)

Development of Numerical CMM in Pursuit of Accuracy Assessment for Coordinate Measuring Machines

H. J. Pahk

Key Words : Coordinate Measuring Machine(CMM : 3 차원 측정기), Volumetric Error Map, Geometric Error, Probe Error(프로브오차)

Abstract

In this paper, a comprehensive computer model is described which can be used to generate the volumetric error map combining the machine parametric errors and the measurement probe error, for most types of CMMs and axis configurations currently in use.

기 호 설 명

(X, Y, Z) : 3차원 측정기의 공칭(기계)좌표값
 (Xa, Ya, Za) : 3차원 측정기의 실제 좌표값
 (Tx, Ty, Tz) : X, Y, Z 축을 따라서 정의되는 회전변환행렬
 Lx, Ly, Lz : X, Y, Z 축을 따라서 정의되는 병진운동벡터
 $\delta X_i(X_j)$: X_j 축을 따라서 정의되는 X_i 방향의 병진운동오차
 $EX_i(X_j)$: X_j 축을 따라서 정의되는 X_i 방향의 회전운동오차
 α, β_1, β_2 : XY, YZ 및 ZX 축간에서 정의되는 직각도오차
 (X_p, Y_p, Z_p) : 프로브 옵셋 좌표값
 $\Delta X, \Delta Y, \Delta Z$: X, Y, Z 방향으로의 3차원 입체 오차(계통오차)
 RX, RY, RZ : X, Y, Z 방향으로의 3차원 랜덤 오차 성분
 ϕ, θ : (r, ϕ, θ) 구면좌표계에서 정의되는 프로빙방향

A, B : 다축 프로브의 틸트각도 및 롤 각도
 x, y, z : 국부적 기계좌표계
 x', y', z' : 프로브좌표계
 e_x, e_y, e_z : (x, y, z) 좌표계의 단위벡터
 e_x, e_y, e_z : 좌표계의 단위벡터
 $Probe(\phi, \theta)$: (ϕ, θ) 방향에서의 프로브오차
 Mx, My, Mz : 기계좌표계에서의 프로빙방향
 Mx', My', Mz' : 프로브 좌표계에서의 프로빙방향

1. 서 론

3차원 측정기(CMM: Coordinate Measuring Machine)는 생산 및 제조업체의 품질검사 및 관리 활동에 매우 혁명적인 효과를 가져왔다. 이는 종래 수작업 또는 게이지작업 등으로 이루어지던 측정 및 검사 공정을 좌표 측정기로 대체함으로써 측정 및 검사 공정의 효율화, 고정도화가 이루어졌다는 것을 의미한다. 따라서 3차원 측정기는 생산현장에서 정밀도의 표준이 되고 있으므로 항상 높은 정밀도를 측정기가 유지하도록 하는 일련의 작업은 매

*회원, 서울대학교 기계설계학과

우 중요하다. 3차원 측정기의 수치모델은 3차원 측정기 정밀도 향상 연구에 매우 중요한 부분을 차지하며, 이는 측정기의 성능을 시뮬레이션을 통해서 매우 빠른 시간에 수행함으로써 측정기의 성능평가를 최적화할 수 있기 때문이다. 측정기의 수치모델은 측정기의 파라미터 오차들의 입력을 통해서 측정기의 성능에 대해 시뮬레이션을 수행하는 모델로서, 신뢰성있는 측정기의 수치모델을 구현하기 위해서는 3차원 측정기의 정밀한 모델링이 필요하게 된다. 3차원 측정기의 수치모델을 구현하고자 할 때 고려해야 할 점 중의 하나는 위치오차, 진직도오차, 직각도오차 등의 파라미터오차 성분들이 측정을 수행한 위치에 따라서 달라진다는 사실이다. 따라서 정밀한 3차원 측정기 수치모델을 위해서는 파라미터오차가 측정위치에 따라서 변환되는 변환식들이 반드시 고려되어야 한다. 따라서 본 연구에서는 파라미터오차 성분들이 측정위치에 따라서 변환되는 변환식을 고려한 수치모델을 제시한다. 또한 상용의 접촉식 프로브를 장착하고 있는 측정기의 경우, 측정트리거링 힘은 프로브의 접촉방향에 따라서 일반적으로 달라지게 된다. 따라서 측정기의 기하학적 오차뿐만 아니라, 프로브 접촉방향과 관련한 오차도 고려되어야 한다. 그러므로, 본 연구에서는 현재 생산현장에서 사용되고 있는 대부분의 3차원 측정기에 적용할수 있도록, 3차원 측정기의 기하학적 오차와 측정프로브의 오차를 모두 고려하는 3차원 측정기 입체오차 모델을 탑재한 측정기 수치모델 시스템이 구현되었다.

2. 측정기의 모델과 3차원 입체오차 모델링

3차원 측정기의 공간오차의 계산은 측정기의 기계적/기구학적 구조에 따라 다르게 계산되어지며, 본 논문에서는 대부분의 3차원 측정기 모델에 적용이 가능한 3차원 입체오차 모델을 마이크로 컴퓨터 환경안에서 구현하였다. 21 개의 파라미터 오차 성분들을 합성하여 3차원 측정기의 입체오차를 구성하는 일반적인 방법은 강체 운동을 고려하는 것으로서 이는 이전의 여러 연구자들에 의해 기술되었다.^(1,2,3) 상용의 3차원 측정기는 또한 다양한 기구학적 모델^(4,5)로 분류되어지는데, 본 연구에서는 일반적인 상용의 3차원 측정기에 적용할수 있도록

다양한 기구학적 모델에 대해서 구현하였다. 일반적으로 상용의 3축 측정기는 기구학적인 조합에 따라 크게 5가지 종류로 나눌 수 있으며, 각각의 종류는 구현된 좌표계의 위치에 따라서 2가지 모델이 가능하다. 즉, 이동브릿지타입(moving bridge type : MB1, MB2 model), 고정 브릿지타입(fixed bridge type : FB1, FB2 model), 이동수평 아암타입(moving horizontal arm type : MH1, MH2 model), 고정수평 아암타입(fixed horizontal arm type : FH1, FH2 model), 컬럼타입(column type : CX, CY model) 등으로 대별되게 되며, 각 타입의 간략화된 구조의 그림은 Fig. 1에 있다. Fig. 1에서

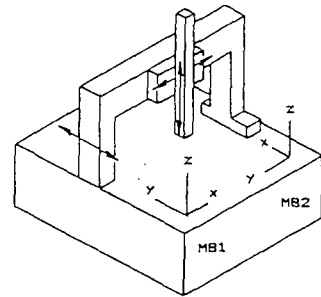


Fig. 1(a) Moving bridge CMM

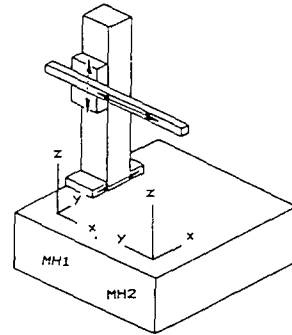


Fig. 1(b) Moving horizontal arm CMM

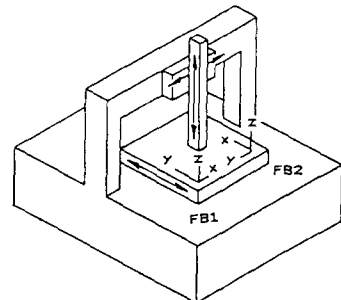


Fig. 1(c) Fixed bridge CMM

소개된 간략화된 구조중에서도 이동브릿지타입, 이동수평 아암타입의 3차원 측정기가 본 논문에서 소개되었으며, 나머지 다른 구조의 3차원 측정기에 대해서는 부록에 언급되어 있다. 이동브릿지타입 측정기 이동브릿지타입, 캔틸레버타입, 갠트리타입, L-형상타입 등의 3차원 측정기는 간략화된 기구학적 구조로는 이동브릿지타입으로 분류될 수 있다. Fig. 1(a)에서 보인 것처럼 이동브릿지타입은 좌표계의 위치에 따라서 MB1 및 MB2의 두 가지 가능한 모델이 가능하다. 예를 들면, MB1 모델에서는 이동브릿지의 방향이 Y축이 되고, 캐리지방향이 X축이 되며, 수직램은 Z축 방향이다. 그리고 좌표계의 원점은 측정기 기준 평면의 왼쪽 코너에 위치하고 있는 것으로 고려한다. MB1 모델의 상세한 해석은 다음과 같다. (X, Y, Z)를 3차원 측정기의 선형스케일과 같은 선형거리 측정장치로부터의 출력을 통해서 나타나는 공칭좌표값(nominal coordinate data)이라 하고, (Xa, Ya, Za)를 공칭좌표값에 대응하는 실제 좌표값으로 가정한다. (Xp, Yp, Zp)를 램의 끝단에 달린 측정프로브의 움셋 좌표값이라고 할때 실제 좌표값(Xa, Ya, Za)는 기구학적 관계를 이용해서 회전행렬과 병진운동 벡터들의 조합으로 다음과 같이 유도된다. 즉,

$$[Xa, Ya, Za]^T = Ty\{Tx\{Tz[Xp, Yp, Zp]^T + Lx\} + Ly\} + Lz \quad (1)$$

여기서, Tx, Ty, Tz는 회전행렬이고 Lx, Ly, Lz는 각각 X, Y, Z축에 따른 병진운동벡터로서, 다음 식들로서 정의된다.

$$Tx = \begin{bmatrix} 1 & -Ez(X) & Ey(X) \\ Ez(X) & 1 & -Ex(X) \\ -Ey(X) & Ex(X) & 1 \end{bmatrix}$$

$$Ty = \begin{bmatrix} 1 & -Ez(Y) & Ey(Y) \\ Ez(Y) & 1 & -Ex(Y) \\ -Ey(Y) & Ex(Y) & 1 \end{bmatrix}$$

$$Tz = \begin{bmatrix} 1 & -Ez(Z) & Ey(Z) \\ Ez(Z) & 1 & -Ex(Z) \\ -Ey(Z) & Ex(Z) & 1 \end{bmatrix} \quad (2)$$

그리고

$$Lx = [X + \delta x(X), \delta y(X) - \alpha X, \delta z(X)]^T$$

$$Ly = [\delta x(Y), Y + \delta y(Y), \delta z(Y)]^T$$

$$Lz = [\delta x(Z) - Z, \delta y(Z) - \beta_2 Z, Z + \delta z(Z)]^T \quad (3)$$

여기서, $\delta x(X)$, $\delta y(Y)$, $\delta z(Z)$ 은 위치오차이고, $\delta z(X)$, $\delta y(X)$; $\delta x(Y)$, $\delta z(Y)$; $\delta x(Z)$, $\delta y(Z)$ 는 X, Y, Z 축을 따라서의 진직도오차를 의미한다. 또한, $Ex(X)$, $Ey(X)$, $Ez(X)$, $Ex(Y)$, $Ey(Y)$, $Ez(Y)$, $Ex(Z)$, $Ey(Z)$, $Ez(Z)$ 는 X, Y, Z 축을 따라서의 회전각도로 정의되는 회전오차, α , β_1 , β_2 는 X축 - Y축, X축 - Z축, Y축 - Z축간의 직각도오차를 의미한다. 3차원 입체오차 성분 (ΔX , ΔY , ΔZ)는 윗식의 실제 좌표와 공칭좌표와의 차이로 정의되므로 프로브 움셋 좌표값 (Xp , Yp , Zp)를 고려하면 식 (1)으로부터 입체오차 (ΔX , ΔY , ΔZ)는 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} \Delta X &= Xa - (X + Xp) \\ &= \delta x(X) + \delta x(Y) + \delta x(Z) \\ &\quad + Z(-\beta_1 + Ey(X) + Ey(Y)) \\ &\quad - Yp(Ez(X) + Ez(Y) + Ez(Z)) \\ &\quad + Zp(Ey(X) + Ey(Y) + Ey(Z)) \\ \Delta Y &= Ya - (Y + Yp) \\ &= \delta y(X) + \delta y(Y) + \delta y(Z) \\ &\quad + X(-\alpha + Ez(Y)) \\ &\quad - Z(\beta_2 + Ex(Y) + Ex(X)) \\ &\quad + Xp(Ez(X) + Ez(Y) + Ez(Z)) \\ &\quad - Zp(Ex(X) + Ex(Y) + Ex(Z)) \\ \Delta Z &= Za - (Z + Zp) \\ &= \delta z(X) + \delta z(Y) + \delta z(Z) - XEy(Y) \\ &\quad - Xp(Ey(X) + Ey(Y) + Ey(Z)) \\ &\quad + Yp(Ex(X) + Ex(Y) + Ex(Z)) \end{aligned} \quad (4)$$

식 (4)는 이동브릿지 (MB1모델)에 대한 3차원 입체오차 방정식으로서 입체오차의 계통오차 성분을 구성한다. 한편, 각 파라미터 오차들의 랜덤오차 성분이 반복측정작업을 통해서 알려져 있는 경우에, 입체오차의 랜덤성분은 오차전파이론에 의한 구적공식(quadrature formula)을 이용하여 계산할 수 있다. 따라서 3 차원 측정기 작업공간내의 (X, Y, Z) 위치에서 랜덤오차 성분(RX, RY, RZ)은 다음과 같이 계산된다. 즉,

$$\begin{aligned} RX^2 &= R\delta x(X)^2 + R\delta x(Y)^2 + R\delta x(Z)^2 \\ &\quad + Z^2(R\beta_1^2 + REy(X)^2 + REy(Y)^2) \\ &\quad + Yp^2(REz(X)^2 + REz(Y)^2 \\ &\quad + REz(Z)^2) + Zp^2(REy(X)^2 \\ &\quad + REy(Y)^2 + REy(Z)^2) \\ RY^2 &= R\delta y(X)^2 + R\delta y(Y)^2 + R\delta y(Z)^2 \\ &\quad + X^2(R\alpha^2 + REz(Y)^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + Z^2(R\beta_2^2 + RE_x(Y)^2 \\
& + RE_x(X)^2) + Xp^2(RE_z(X)^2 \\
& + RE_z(Y)^2 + RE_z(Z)^2) \\
& + Zp^2(RE_x(X)^2 + RE_x(Y)^2 \\
& + RE_x(Z)^2) \\
RZ^2 = & R\delta_z(X)^2 + R\delta_z(Y)^2 + R\delta_z(Z)^2 \\
& + X^2RE_y(Y)^2 + Xp^2(RE_y(X)^2 \\
& + RE_y(Y)^2 + RE_y(Z)^2) \\
& + Yp^2(RE_x(X)^2 + RE_x(Y)^2 \\
& + RE_x(Z)^2) \quad (5)
\end{aligned}$$

여기서, 각 파라미터오차 성분 앞에 붙여진 R 은 각 파라미터오차의 랜덤오차 성분을 기술하기 위하여 사용하였다. 이동수평 아암타입 측정기는 베드 기준평면 위에서 컬럼운동을 하고, 컬럼 위에서 캐리지가 수직운동을 하고 있으며, 캐리지 위에서 아암이 수평운동을 하고 있다. Fig. 1(b)에 보인 것처럼 좌표계의 위치에 따라서 MH1, MH2의 두 가지의 기구학적 모델이 가능하며, MH2 모델에 대한 입체오차 식은 다음과 같이 유도된다. MH2 모델에서 컬럼운동은 X 축으로, 수직 캐리지운동은 Z 축으로, 수평 아암운동은 Y 축으로 간주한다. 따라서, 실제좌표 (Xa, Ya, Za) 와 공칭좌표 (X, Y, Z) 사이의 관계는 위의 이동브릿지타입과 마찬가지로 기구학적 강체운동을 고려하여 다음과 같이 기술할 수 있다.

$$\begin{aligned}
[Xa, Ya, Za]^T = & Tx[Tz\{Ty(Xp, Yp, Zp)^T \\
& + Ly\} + Lz] + Lx \quad (6)
\end{aligned}$$

여기서 변환행렬과 병진운동벡터는 식 (2) 및 식 (3)과 같이 동일하게 정의된다. MBI 모델의 경우와 마찬가지로 $\Delta X = Xa - (X + Xp)$, $\Delta Y = Ya - (Y + Yp)$, $\Delta Z = Za - (Z + Zp)$ 를 고려하면, 입체오차 식을 다음과 같이 유도할 수 있다. 즉,

$$\begin{aligned}
\Delta X = & \delta x(X) + \delta x(Y) + \delta x(Z) - Y(E_z(Z) \\
& + E_z(X)) + Z(E_y(X) - \beta_1) \\
& - Yp(E_z(X) + E_z(Y) + E_z(Z)) \\
& + Zp(E_y(X) + E_y(Y) + E_y(Z)) \\
\Delta Y = & \delta y(Y) + \delta y(X) + \delta y(Z) - \alpha X \\
& - Z(E_x(X) + \beta_2) + Xp(E_z(X) \\
& + E_z(Y) + E_z(Z)) - Zp(E_x(X) \\
& + E_x(Y) + E_x(Z)) \\
\Delta Z = & \delta z(Z) + \delta z(X) + \delta z(Y) + Y(E_x(X) \\
& + E_x(Z)) - Xp(E_y(X) + E_y(Y) + E_y
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (Z)) + Yp(E_x(X) + E_x(Y) + E_x(Z)) \quad (7)
\end{aligned}$$

이되고, 3차원 측정기의 작업공간내의 임의의 위치 (X, Y, Z) 에서의 랜덤오차 성분 (RX, RY, RZ) 도 이동브릿지타입과 유사하게 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\begin{aligned}
RX^2 = & R\delta_x(X)^2 + R\delta_x(Y)^2 + R\delta_x(Z)^2 \\
& + Y^2(RE_z(Z)^2 + RE_z(X)^2) \\
& + Z^2(RE_y(X)^2 + \beta_1^2) \\
& + Yp^2(RE_z(X)^2 + RE_z(Y)^2 \\
& + RE_z(Z)^2) + Zp^2(RE_y(X)^2 \\
& + RE_y(Y)^2 + RE_y(Z)^2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
RY^2 = & R\delta_y(X)^2 + R\delta_y(Y)^2 + R\delta_y(Z)^2 \\
& + X^2(R\alpha^2 + RE_z(Y)^2) + Z^2(R\beta_2^2 \\
& + RE_x(Y)^2 + RE_x(X)^2) \\
& + Xp^2(RE_z(X)^2 + RE_z(Y)^2 \\
& + RE_z(Z)^2) + Zp^2(RE_x(X)^2 \\
& + RE_x(Y)^2 + RE_x(Z)^2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
RZ^2 = & R\delta_z(X)^2 + R\delta_z(Y)^2 + R\delta_z(Z)^2 \\
& + X^2RE_y(Y)^2 + Xp^2(RE_y(X)^2 \\
& + RE_y(Y)^2 + RE_y(Z)^2) \\
& + Yp^2(RE_x(X)^2 + RE_x(Y)^2 \\
& + RE_x(Z)^2) \quad (8)
\end{aligned}$$

기타의 3차원 측정기 모델에 대한 입체오차 식들은 부록에 수록해 놓았다.

2.3 오차 변환규칙

서론에서 언급하였듯이, 측정된 파라미터오차들은 입체오차 모델을 만들기 이전에 3차원 측정기내의 한 개의 동일한 기준점에 대해서 변환되어야 하는데, 이는 각각의 파라미터오차들은 측정된 위치에 따라서 달라지기 때문이다. 이러한 파라미터오차들의 변화를 보면 다음과 같은 규칙이 있음을 알 수 있다. (1) 각도오차 성분들은 아베오프셋(Abbe offset)을 통해서 위치오차나 진직도오차와 같은 병진운동 오차(translational error)에 영향을 준다. 즉, 한 축을 따라서의 오각도오차와 피치각도 오차는 그 축을 따라서의 위치오차 값에 아베오프셋을 통해서 영향을 준다. 또한, 롤각도오차는 축을 따라서의 진직도오차 값에 아베 오프셋을 통해서 영향을 준다. 위치오차 및 진직도오차에 미치는 각도의 영향은 위에서 유도한 입체오차 모델에서 각도 오차와 각각의 오차성분에 대한 식들로부터 구할

수 있다. (2) 직각도오차 값은 각도오차 성분들에 의해 영향을 받는다. 직각도오차가 각도오차 성분들에 의해서 받는 영향도 3차원 입체오차 식으로부터 위의 규칙들을 살펴 봄으로써 구할 수 있다. 따라서 측정기내의 한 개의 기준점에 대한 파라미터 오차들의 변환관계를 유도할 수 있게 된다.

2.3.1 MBI 모델

(X_o, Y_o, Z_o) 가 기준 원점으로부터의 측정음셋이라고 하면, 위치오차는 요 및 피치각도오차에 영향을 받으므로 다음과 같이 변환된다. 변환된 오차들을 밑줄로 표시하면,

$$\begin{aligned}\underline{\delta x(X)} &= \delta x(X) - ZoEy(X) \\ \underline{\delta y(Y)} &= \delta y(Y) + ZoEx(Y) - XoEz(Z) \\ \underline{\delta z(Z)} &= \delta z(Z)\end{aligned}$$

진직도오차들은 롤오차와 이와 관련된 아베옴셋에 의해 영향받게 되며, 기준 직선에 대한 편차값으로서 계산되는데, 이는 진직도오차는 기준직선에 대한 편차오차이기 때문이다. 따라서 진직도오차의 변환식은 다음과 같다.

$$\begin{aligned}\underline{\delta y(X)} &= \delta y(X) + ZoEx(X) \\ \underline{\delta z(X)} &= \delta z(X) \\ \underline{\delta x(Y)} &= \delta x(Y) - ZoEy(Y) \\ \underline{\delta z(Y)} &= \delta z(Y) + XoEy(Y) \\ \underline{\delta x(Z)} &= \delta x(Z) \\ \underline{\delta y(Z)} &= \delta y(Z)\end{aligned}$$

위에서 언급한 것처럼 직각도오차도 각도오차의 영향을 받는다.

$$\begin{aligned}\underline{\alpha} &= \alpha + Ez(Y_o) \\ \underline{\beta_1} &= \beta_1 + Ey(Y_o) + Ey(X_o) \\ \underline{\beta_2} &= \beta_2 - Ex(X_o) - Ex(Y_o)\end{aligned}\quad (9)$$

2.3.2 MH2 모델

MH2 모델에 대한 파라미터오차 변환도 위의 MB1 모델의 경우와 마찬가지로 구해지며, MH2 모델의 입체오차 식으로부터 다음의 오차 변환식을 유도할 수 있다. 즉,

$$\begin{aligned}\underline{\delta x(X)} &= \delta x(X) + YoEz(X) - ZoEy(X) \\ \underline{\delta y(Y)} &= \delta y(Y) \\ \underline{\delta z(Z)} &= \delta z(Z) - YEx(Z) \\ \underline{\delta y(X)} &= \delta y(X) + Zo*Ex(X) \\ \underline{\delta z(X)} &= \delta z(X) - Yo*Ex\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\underline{\delta x(Y)} &= \delta x(Y) \\ \underline{\delta z(Y)} &= \delta z \\ \underline{\delta x(Z)} &= \delta x(Z) + Yo*Ez(Z) \\ \underline{\delta y(Z)} &= \delta y(Z) \\ \underline{\alpha} &= \alpha \\ \underline{\beta_1} &= \beta_1 + Ey(X_o) \\ \underline{\beta_2} &= \beta_2 - Ex(X_o)\end{aligned}\quad (10)$$

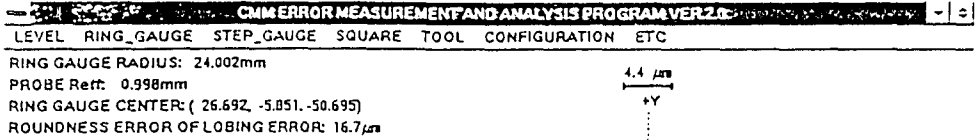
기타 유형의 3차원 측정기에 대한 파라미터오차 변환식은 부록에 설명되어 있다.

3. 프로브오차 모델링

상용의 접촉식 프로브로 측정을 수행할 때에는 측정 프로브내에 있는 전기적 스위치의 트리거링을 통해서 현재의 좌표를 읽도록 되어 있다. 이 때 트리거링이 일어나는 메카니즘에 의해서 트리거링에 소요되는 측정력이 방향에 따라 달라지게 되어, 트리거링이 일어나는 방향에 따라서 트리거링 이동거리(pretravel variation : 프로브에 접촉한 순간부터 트리거링이 일어나 좌표값을 읽어들이게 되는 순간까지의 측정기가 이동한 거리)가 달라지게 된다. 따라서 이는 측정방향에 따라서 트리거링 이동거리에 차이가 나타나는 프로브 로빙오차(probe lobing error)가 나타나는 원인이 된다. Fig. 2(a)는 정밀한 링 게이지를 측정하는 경우에 나타나는 전형적인 프로브 로빙오차를 보여준다.

3.1 프로브좌표계

일반적인 프로브오차를 고려하기 위해서 많이 사용되고 있는 상용의 접촉식 2축 프로브를 고려하여 프로브 오차의 모델링을 수행하였다. 상용의 2축 프로브의 간략도가 Fig. 2(b)에 있으며, 여기서, A와 B는 각각 틸트각도, 롤각도를 의미한다. 프로브 오차를 효율적으로 해석하기 위해서 프로브좌표계 (x', y', z') 와 국부 기계좌표계 (x, y, z) 가 도입되었다. 프로브좌표계에서, z' 축은 프로브 축의 방향과 같고, y' 축은 국부 기계좌표계의 z 축과 z' 축의 벡터적의 방향으로 정의된다. 또한 x' 축은 y' 와 z' 방향의 벡터적의 방향으로 정의되어 프로브 좌표계 (x', y', z') 가 정의된다. 그러므로 프로브 좌표계와 국부 기계좌표계가 기준구(master sphere)의 중심에 동일한 중심을 가진다고 하면, 프로브좌표계 (x', y', z') 와 국부 기계좌표계 (x, y, z) 는 다음의 관계를 갖는다.



OF POINT:200
[c:\cmm_error\cmmfinal\vs12282.rpb] [20.0℃, 40.0%, 1020.0mbar] [Year Mon Date Time 1993.12.28 4:10]

Fig. 2(a) Typical probing error pattern

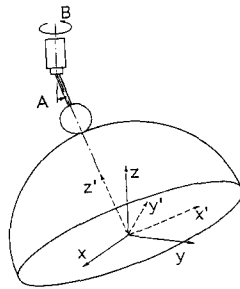


Fig. 2(b) Probe coordinate system

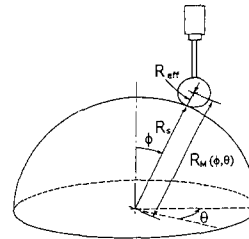


Fig. 2(c) Probe error calibration

$$\begin{aligned}
 e'_z &= (-\sin A \cos B, -\sin A \sin B, \cos A) \\
 e'_y &= e'_z \times e_z / |e'_z \times e_z| \\
 &= (-\sin B, \cos B, 0) \\
 e'_x &= e'_y \times e'_z / |e'_y \times e'_z| \\
 &= (\cos A \cos B, \cos A \sin B, \sin A) \quad (11)
 \end{aligned}$$

여기서, e'_x, e'_y, e'_z 는 프로브좌표계 (x', y', z') 를 위한 기본 벡터들이고, e_x, e_y, e_z 는 기계좌표계 (x, y, z) 에 대한 기본 벡터들이다.

따라서 두 개의 좌표계 사이의 관계를 3×3 변환 행렬 Tp 로 기술할 수 있다.

$$[x', y', z']^T = Tp[x, y, z]^T \quad (12)$$

여기서

$$Tp = \begin{bmatrix} \cos A \cos B & -\sin B & -\sin A \cos B \\ \cos A \sin B & \cos B = 0 & -\sin A \sin B \\ \sin A & 0 & \cos A \end{bmatrix}$$

이때, A, B 는 프로브의 틸트각도와 롤각도를 의미하며, 식 (12)는 프로브오차 교정과 오차 모델링에 유용한 식이 된다.

3.2 프로브오차 교정

프로브오차의 교정은 진구도가 매우 좋은 기준구를 3차원 측정기로 측정함으로써 수행할 수 있다.^(6,7) 경도각과 위도각이 각각 ϕ, θ 인 기준구상의 (ϕ, θ) 위치를 고려하면, 이 지점에서 측정되는

프로브오차는 위의 경도각과 위도각으로 정의되는 프로브 접촉방향에서 정의되는 프로브오차가 된다. 기준구상의 (ϕ_i, θ_j) 위치에서 정의되는 기준구의 반지름을 $R_s(\phi_i, \theta_j)$ 라 하고, Fig. 2(c)에서와 같이 (ϕ_i, θ_j) 위치에서 기준구와 프로브 볼의 두 중심 사이의 측정된 거리를 $R_m(\phi_i, \theta_j)$ 라 하면 다음의 관계가 성립한다.

$$R_{eff} - Probe(\phi_i, \theta_j) = R_m(\phi_i, \theta_j) - R_s(\phi_i, \theta_j) \quad (13)$$

여기서, R_{eff} 는 프로브 볼의 유효 반지름이고, $Probe(\phi_i, \theta_j)$ 는 (ϕ_i, θ_j) 방향에서 정의되는 프로브 오차이다. 식 (13)에서 우변의 $R_m(\phi_i, \theta_j)$ 와 $R_s(\phi_i, \theta_j)$ 는 측정데이터이므로, 이를 최소자승방법에 의해서 평균값과 평균으로부터의 편차를 구할 수

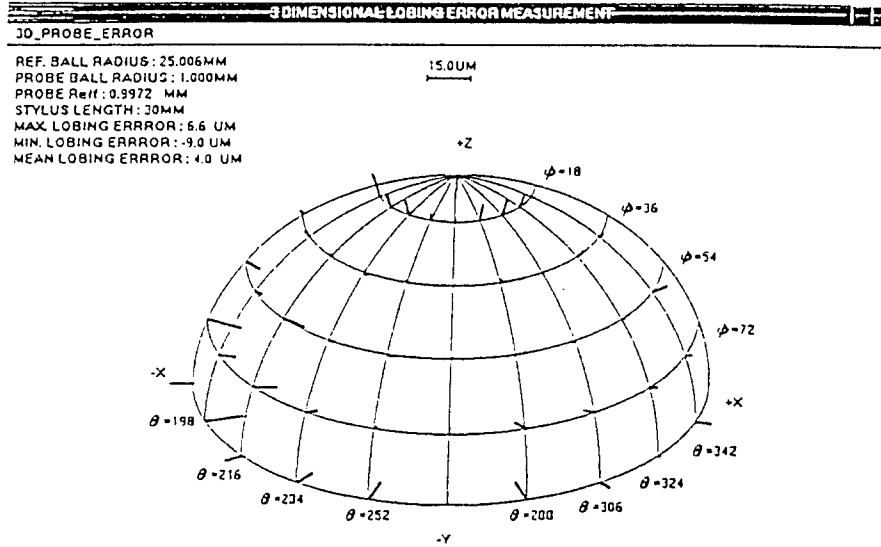


Fig. 3(a) 3 Dimensional probe error map

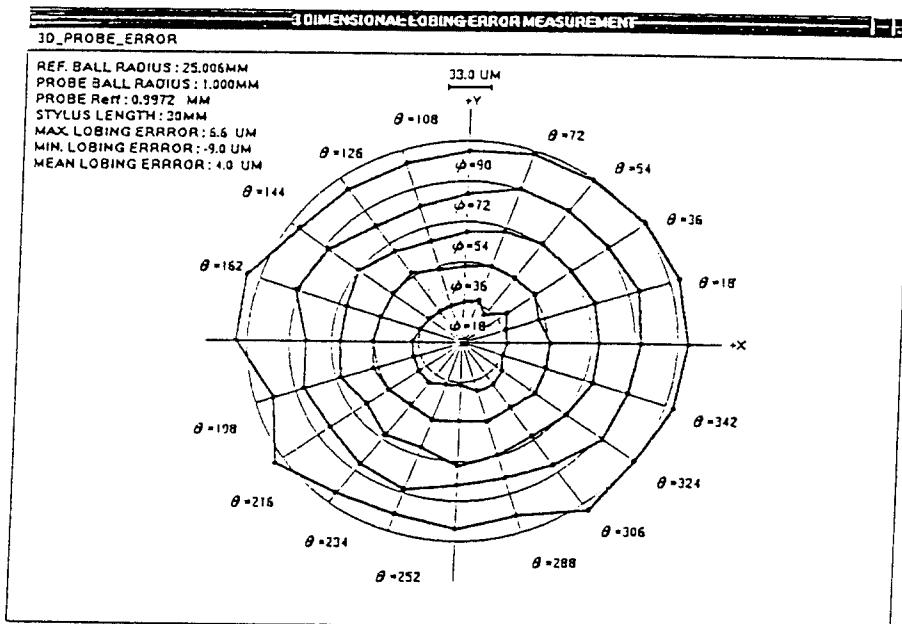


Fig. 3(b) 2 Dimensional representation of the probe error map

있게 되며, 이 평균값이 좌변의 유효 반지름(R_{eff}) 이 되고, 평균값으로부터의 편차량은 프로브오차 (ϕ_i, θ_j)가 된다. 따라서 프로브 볼의 유효 반지름 R_{eff} 과 프로브오차(ϕ_i, θ_j)을 구할 수 있다. 프로브 교정의 실제적인 적용을 위해서, 1 마이크로미터 이하의 진구도를 가진 반지름 25.006 mm의 기준구가 1 mm 프로브 볼반지름과 30 mm 길이를 가진 접촉식 프로브에 의해서 실제적인 측정을 수행하였다. 자동 측정을 수행하기 위해서 CNC에 의한 측정경로를 (ϕ_i, θ_j) 방향을 따라 각각 18° 간격마다 측정점이 되도록 생성하였다. 기준구에 대해서 전체적으로 101 점을 측정하였으며(5개의 위도원을 따른 100개의 점과 꼭대기의 한 점), 측정결과를 식 (13)에 따라 해석하였다. 해석결과로서 유효 반지름은 0.997 mm, 최대 프로브오차는 6.6 mm, 그리고 최소 프로브오차는 -9.0 mm, 그리고 제곱평균 (root mean square) 프로브 오차는 4.0 mm이다. 프로브오차를 효율적으로 표현하기 위해서 프로브 오차를 오차 맵으로 표현하였으며, 3차원 프로브오차 맵이 Fig. 3(a)에 나타나 있다. 그림에서 각 위도각 및 경도각을 가지는 방향에서의 프로브오차는 각 위도각 및 경도각을 나타내는 노드에서의 반경 방향의 법선으로 나타나 있다. 또한 프로브오차는 Fig. 3(b)와 같이 위도각 및 경도각을 나타내는(ϕ_i, θ_j) 직교망 위에 표시할 수 있다. Fig. 3(b)에서, 프로브오차(ϕ, θ)는 직교망 위의 (ϕ, θ)지점에서의 반경방향 편차로서 표현된다. 본 연구에서는 프로브오차로부터 프로브오차 맵을 생성하는 시스템이 구현되었다.

3.4 결합된 입체오차 모델

프로브오차는 프로브 접촉방향에 따라서 나타나는 오차로서 위치에 따라서 정의되는 기하학적 기하학적 입체오차와 결합될 수 있다. (Mx, My, Mz)를 기계좌표계에서의 프로브 접촉방향을 표시하는 단위벡터라 하고, 프로브오차를 프로브좌표계에서 정의하면, 프로브 접촉방향(Mx, My, Mz)은 프로브좌표계 내에서의 방향 (Mx', My', Mz')로 변환될 수 있다. 즉, 프로브좌표계 내에서의 프로브 접촉방향(Mx', My', Mz')은

$$[Mx', My', Mz']^T = T_p^{-1}[Mx, My, Mz]^T \quad (14)$$

여기서, T_p 는 식 (12)로 정의되는 변환행렬이며 이 행렬을 계산하는데 필요한 각도 (ϕ, θ)는 다음

과 같이 구할 수 있다.

$$\phi = \cos^{-1}(Mz' / \sqrt{Mx'^2 + My'^2 + Mz'^2}) \quad (15)$$

$$\theta = \tan^{-1}(My' / Mx') \quad (16)$$

프로브 접촉방향의 각도 (ϕ, θ)를 알고 있을 때, 프로브오차, (ϕ, θ)는 Fig. 3에서와 같이 프로브오차맵으로부터 얻을 수 있다. 얻어진 프로브오차는 기계좌표계에 있는 프로브 접촉방향 (Mx, My, Mz)으로 분해된다. 따라서 통합된 입체오차 성분 ($\Delta Xc, \Delta Yc, \Delta Zc$)은 입체오차에서 프로브 접촉방향의 프로브오차 성분을 뺀 값으로 구해진다. 즉,

$$\begin{aligned} [\Delta Xc, \Delta Yc, \Delta Zc]^T \\ = [\Delta X, \Delta Y, \Delta Z]^T \\ - Probe(\phi, \theta)[Mx, My, Mz]^T \end{aligned} \quad (17)$$

여기서, ($\Delta X, \Delta Y, \Delta Z$)는 프로브오차 결합전의 입체오차 성분들이고, (ϕ, θ) 각들은 프로브 좌표계에서의 프로브 접촉방향 (Mx', My', Mz')으로부터 결정된다. 따라서 식 (17)는 3차원 측정기에 대해서 적용할 수 있는 기하학적 오차와 프로브의 오차를 결합한 형태의 오차식으로서 종합적인 3차원 측정기의 수치모델을 제시한다.

4. 구체적인 구현 및 토의

3차원 측정기 수치모델이 컴퓨터 프로그램으로서 구현되었다. 즉, 파라미터오차들이 측정지점의 육섯 데이터와 함께 입력되면, 위에서 제시된 수치모델에 의해서 입체오차가 계산된다. 실제적인 적용을 위해서 고려된 2종류의 3차원 측정기의 실제적인 파라미터오차들이 입력되고, 수치모델에 의거한 입체오차가 계산되었다. 첫번째 적용으로서 이동브릿지타입의 3차원 측정기(CMM A)가 고려되었다. 900 mm × 575 mm × 400 mm으로 선정된 작업공간에 대해서, 17개의 파라미터오차(3개의 위치오차, 4개의 진적도오차, 7개의 각도오차, 3개의 직각도오차)를 레이저 인터페로미터를 사용하여 측정하고, 데이터를 입력하였다. Fig. 4(a)는 900 mm 공칭길이에 대해서 6.15 μ m의 대역폭을 가진 X방향 위치오차를 보여준다. 그림에서 반복성능(repeatability)은 반복측정을 수행하여 얻은 각 위치에서의 반복측정데이터의 2배의 표준편차중에서 가장 큰 값으로 계산하였으며, 이 경우 반복성능은 10.75 μ m를 가지는 것으로 나타났다. Fig. 4(b)는 23.0 μ m 대역폭과 21.0 μ m의 반복성능을 갖는 Y

방향 위치오차를 보여준다. Fig. 4(c)는 11.18 μ rad 대역폭과 12.30 μ rad의 반복성능을 갖는 X 피치오차를 보여준다. 직각도오차는 XY축에 대해서 14.1 μ rad, XZ축에 대해서 56.4 μ rad, YZ축에 대해서는 -32 μ rad의 측정데이터를 측정하여 입

력하였다. 입력된 파라미터오차들을 기초로 3차원 측정기 수치모델에 의한 입체오차를 계산하였으며, Fig. 5는 입체오차를 표시하고 있다. 여기서 점선은 공칭좌표를 나타내고 실선은 공칭좌표에 대응하는 실제 좌표값을 나타낸다. 형성된 수치모델을

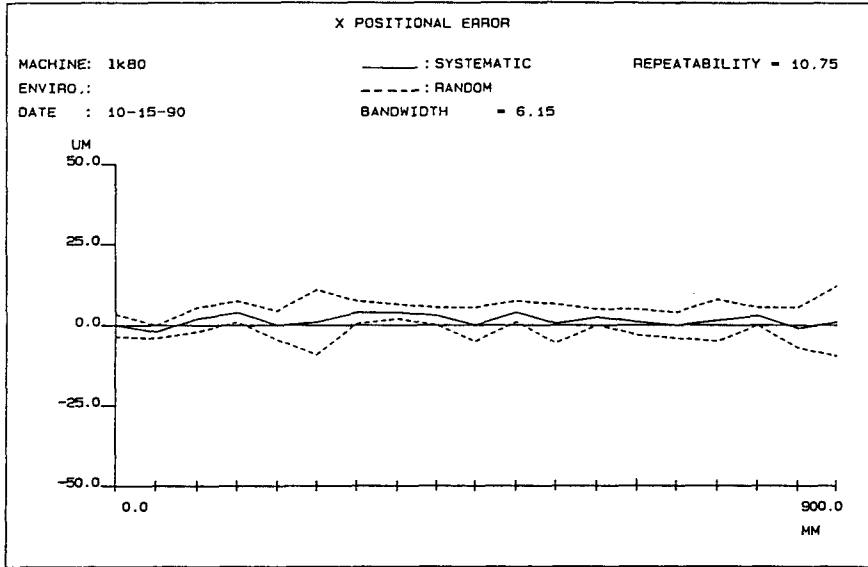


Fig. 4(a) Positional error along X axis in a Cmm of MB₁ map(ACMM)

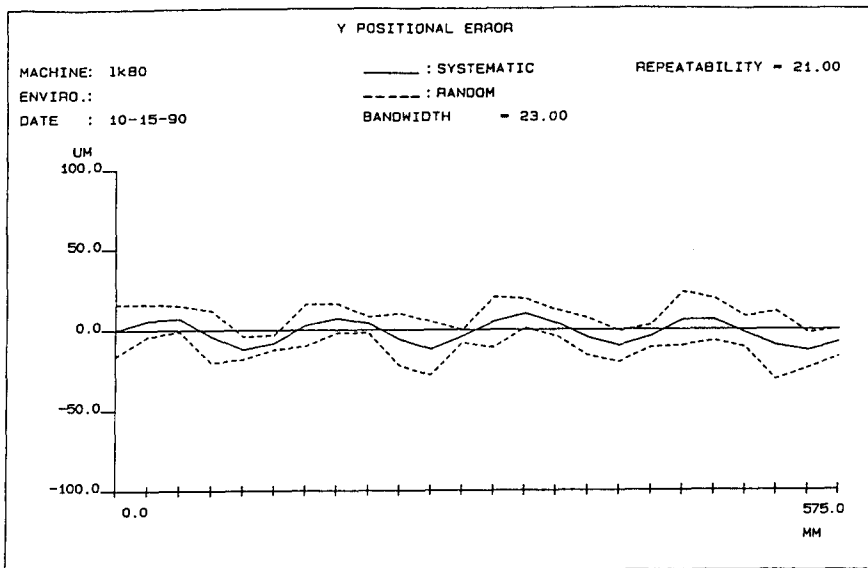


Fig. 4(b) Positional error along Y axis (A CMM)

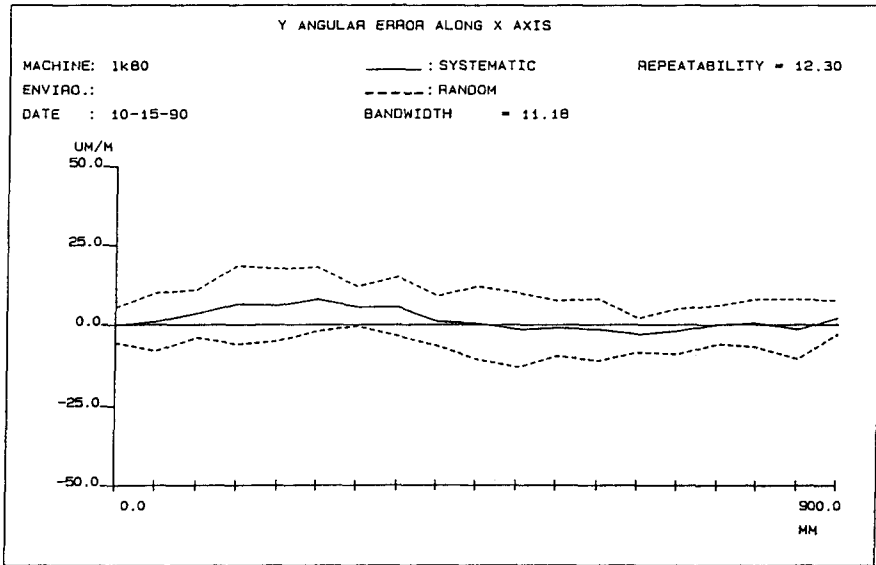


Fig. 4(c) Angular pitch error along X axis (A CMM)

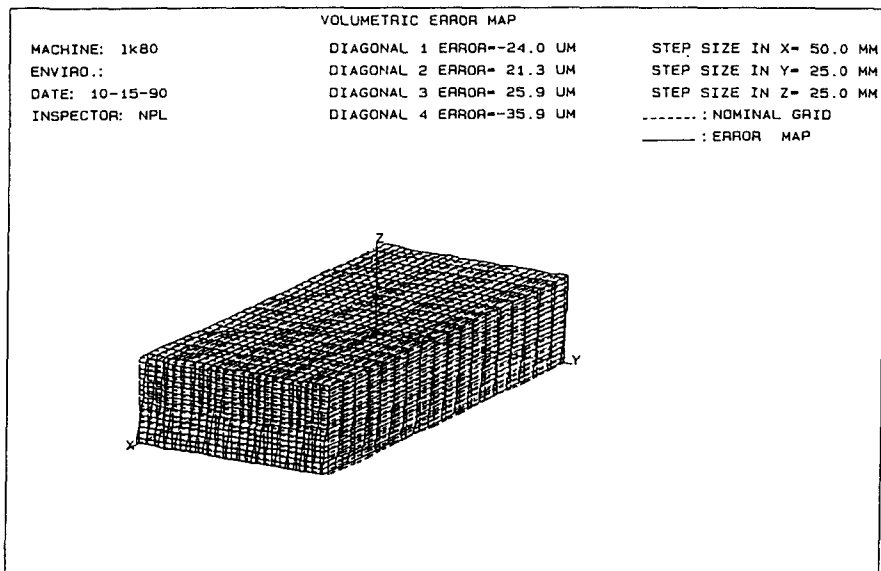


Fig. 5 Volumetric error map (A CMM)

통해서 4개의 공간 대각선(space diagonal)의 길이 측정을 시뮬레이션 한 결과 4개의 공간 대각선 길이는 공칭의 대각선 길이에 비해서 각각 $-24.0 \mu\text{m}$, $21.3 \mu\text{m}$, $25.9 \mu\text{m}$, $-35.9 \mu\text{m}$ 의 편차를 가짐을 보이고 있다. 여기서, 공간대각선은 입체오차 맵이

구현되는 직육면체 작업공간의 한 꼭지점에서 가장 먼 꼭지점을 잇는 직선을 의미한다. 두번째 적용예로서, 작업공간이 $1100 \text{ mm} \times 1100 \text{ mm} \times 1100 \text{ mm}$ 인 이동수평 아암타입의 측정기가 (CMM B) 고려되었고, Fig. 4에서와 같이 프로브 접촉방향을 따

라 프로브오차 맵이 생성되었다. 10 개의 파라미터 오차 성분(3개의 위치오차, 4 개의 각도오차, 3 개의 직각도오차)들을 레이저, 스텝게이지, 레벨 등을 이용하여 측정하여 파라미터오차로서 입력하였다. Fig. 6(a)는 대역폭이 71.0 μm 이고, 반복성능

이 3.1 μm 인 X 방향의 위치오차를 보여준다. Fig. 6(b)는 대역폭이 14.5 μm 이고 반복성능이 1.9 μm 인 Z방향의 위치오차를 보여준다. Fig. 6(c)은 대역폭이 39.0 μrad 이고 반복성능이 4.3 μrad 인 Y축에 대한 각도피치오차를 보여준다. 직각도오차

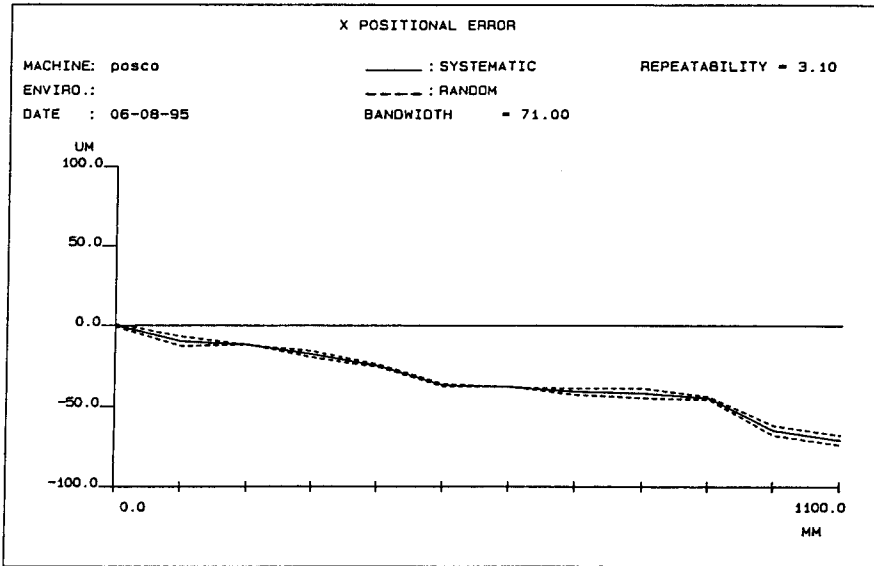


Fig. 6(a) Positional error along X axis in a CMM of MH2 Type

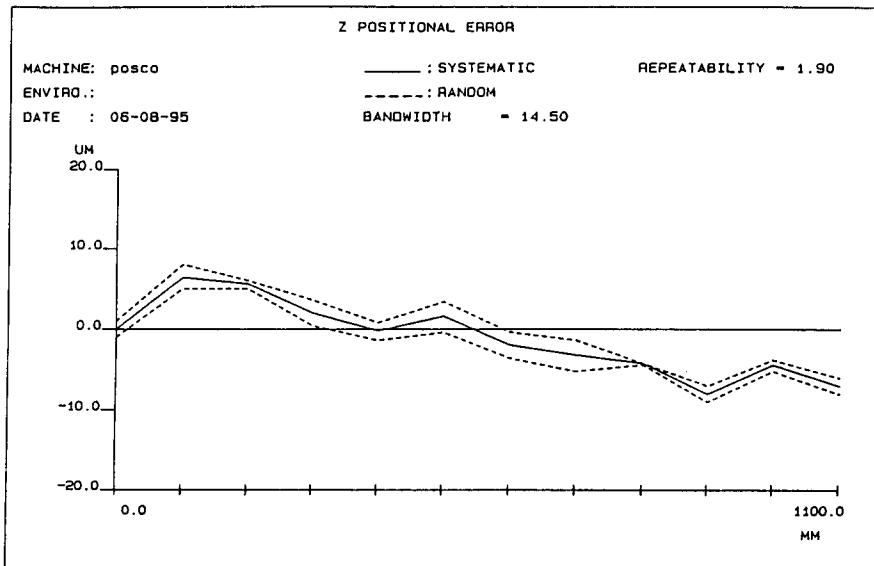


Fig. 6(b) Positional error along Z axis (B CMM)

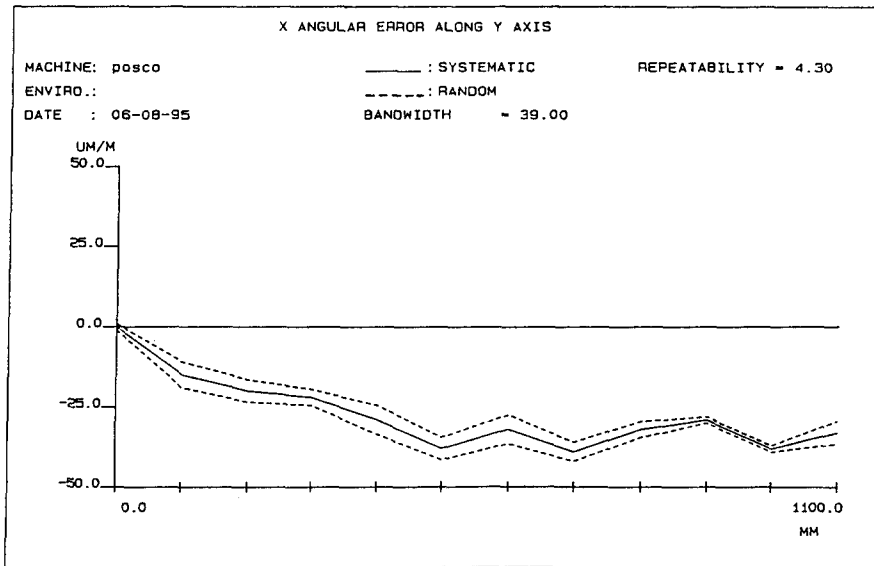


Fig. 6(c) Angular pitch error along Y axis (B CMM)

부터 구할 수 있었다. Fig. 7(a)는 4개의 공간 대각선을 따라 각각 $-42.1 \mu\text{m}$, $-45.1 \mu\text{m}$, $-83.3 \mu\text{m}$, $102.7 \mu\text{m}$ 의 오차를 가진 입체오차 맵을 보여준다. 또한, Fig. 7(b)는 입체오차 맵에서의 랜덤오차 성분을 보여 주고 있으며, 특히 4개의 공간 대는 XY, YZ, ZX 각 방향에 대해서 $43.2 \mu\text{rad}$,

$-48.9 \mu\text{rad}$, $108.9 \mu\text{rad}$ 가 측정/입력되었다. 입력된 파라미터오차들은 위에서 제시된 수치모델에 근거하여 입체오차가 계산되었으며, 입체오차에서의 랜덤오차 성분은 파라미터 랜덤오차들의 구적으로 각선길이 측정에서의 랜덤오차 성분은 각각 $3.5 \mu\text{m}$, $4.5 \mu\text{m}$, $5.7 \mu\text{m}$, $3.6 \mu\text{m}$ 인 것을 보이고 있다.

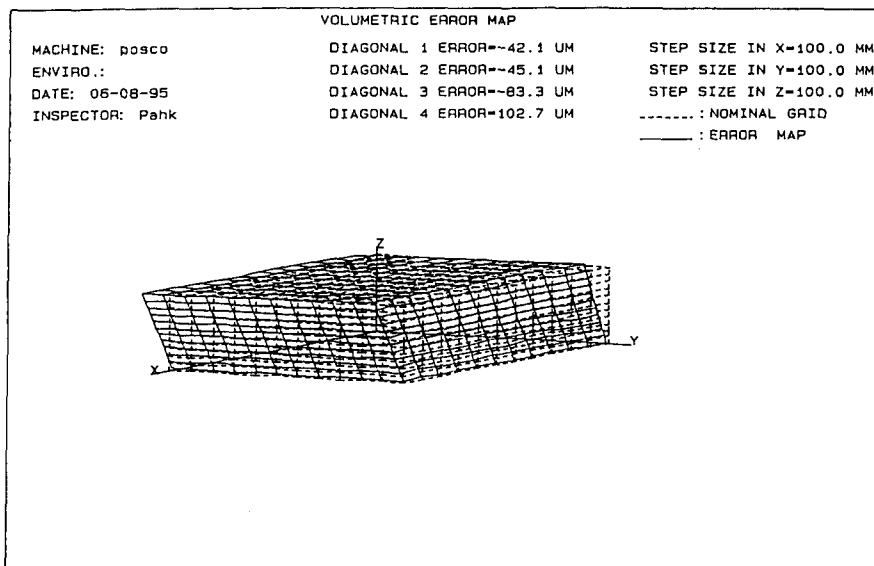


Fig. 7(a) Volumetric error map (B CMM)

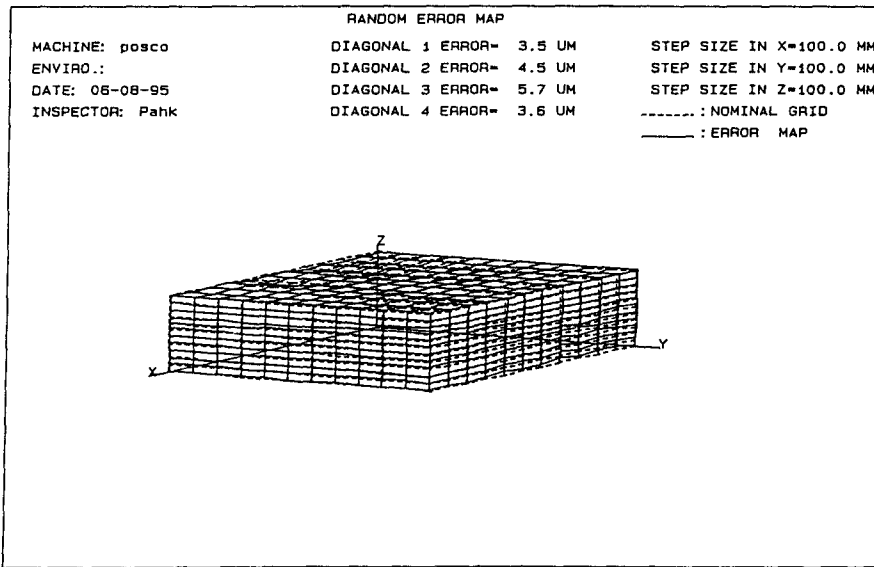


Fig. 7(b) Random error in the Volumetric error map (B CMM)

5. 결 론

대부분의 상용의 3차원 측정기에 대해서 적용할 수 있는 3차원 측정기 수치모델, 즉 입체오차 생성 모듈이 마이크로 컴퓨터 환경에서 설치되었으며 결론은 다음과 같다.

(1) 3차원 측정기 수치모델, 즉 작업공간에서의 입체오차 생성을 수행하는 컴퓨터 모듈이 개발되었다. 대부분의 상용의 3차원 측정기에 적용이 가능하도록 하기 위해서 10개의 기구학적으로 서로 다른 모델이 고려되었으며, 각각의 모델에 대응하는 입체오차 방정식이 유도되어 다양한 상용의 3차원 측정기로의 적용이 가능하도록 하였다.

(2) 파라미터오차들은 입체오차를 구현함에 앞서서, 측정기의 기준점에 대해서 변환되어야 하며, 본 연구에서는 측정점을 고려한 파라미터 오차들의 변환관계를 입체오차 식으로부터 유도하였다. 따라서 측정점이 서로 다른 파라미터오차들의 변환 관계를 명확히 설명하는 것이 가능하였다.

(3) 프로브 접촉방향에 따라서 달라지는 프로브 오차가 기하학적, 기구학적 오차들과 결합되어 수치모델로 제시되었다.

(4) 파라미터오차 입력, 프로브오차 입력, 파라미터오차 변환, 입체오차 계산, 입체오차 표현 등의 일련의 과정이 마이크로 컴퓨터 환경내에서 구

현되었다.

(5) 개발된 시스템은 3차원 측정기의 성능평가, 정밀도 평가, 오차교정 및 보정 등에 활용될 수 있을 것으로 사료된다.

참고문헌

- (1) Hocken, R., 1977, "Three Dimensional Metrology," *Annals of CIRP*, Vol. 26 No. 1:
- (2) Zhang, G., Chorlton, T., Borchardt, B. and Hocken, R. 1985, "Error Compensation of Coordinate Measuring Machines," *Annals of CIRP*, Vol. 24 No. 1
- (3) Kunzmann, F., Trapet, E. and Waeldeke, F., A, 1990, "Uniform Concept for Calibration, Acceptance Test and Periodic Inspection of Coordinate Measuring Machines Using Reference Objects," *Annals of CIRP*, Vol.39, No.1
- (4) BS 6808 : 1987 Coordinate Measuring Machines, Part 1 Glossary of Terms Part 2 Methods for Verifying Performance Part 3 Code of Practice British Standards Institution
- (5) ANSI/ASME B89. 1. 12M-1985, 1985, "An American Standard, Methods for performance Evaluation of Coordinate Measuring Machines," *The American Society of Mechanical Engineers*

- (6) Peggs, G., 1990, "Traceability for Coordinate Measurement Technology," *Proceedings of the 28th International MATADOR Conference*, Manchester, UK, pp. 463~468.
- (7) Kunzmann, H., Trapet, E. and Waldele, F., 1993, "Concept for Traceability of Measurements with Coordinate Measuring Machines," *International Progress in Precision Engineering*, 40~52
- (8) Pahk, H., 1990, "Computer Aided Volumetric Error Calibration of Coordinate Measuring Machines," PhD Thesis, UMIST

후 기

본 연구는 1994학년도 서울대학교 발전기금 일반 학술연구비 지원에 의한 연구로 수행되었음을 밝힙니다.

부 록

파라미터오차들의 입체오차 식과 변환규칙들은 다음과 같다.

(1) 고정 브릿지측정기(FB1 Model)
-입체오차 방정식

$$\begin{aligned} Tx(Xa, Ya, Za)^T + Lx \\ = Ty\{Tz(Xp, Yp, Zp)^T + Lz\} + Ly \end{aligned} \quad (A1)$$

여기서,

$$\begin{aligned} Tx, Ty, Tz \text{는 회전행렬,} \\ Lx = [-X - \delta x(X), \delta y(X) - aX, \delta z(X)]^T \\ Ly = [\delta x(Y), Y + \delta y(Y), \delta z(Y)]^T \\ Lz = [\delta x(Z) - \beta_1 Z, \delta y(Z) - \beta_2 Z, Z + \delta z(Z)]^T \\ \Delta X = \delta x(X) - \delta x(Y) + \delta x(Z) + YEz(Y) \\ + Z(Ey(X) - Ey(Y) - \beta_1) + Yp(-Ez(X) \\ + Ez(Y) - Ez(Z)) + Zp(Ey(X) - Ey(Y) \\ + Ey(Z)) \\ \Delta Y = \delta y(X) + \delta y(Y) + \delta y(Z) + X(-Ez(Y) \\ - a) + Z(-Ex(X) + Ex(Y) - \beta_2) + Xp(Ez(X) \\ - Ez(Y) + Ez(Z)) + Zp(-Ex(X) \\ + Ex(Y) - Ex(Z)) \\ \Delta Z = \delta z(Z) + \delta z(X) - \delta z(Y) + XEy(Y) \\ - YEx(Y) + Xp(-Ey(X) + Ey(Y) \\ - Ey(Z)) + Yp(Ex(X) - Ex(Y) + Ex(Z)) \end{aligned} \quad (A2)$$

변환규칙

$$\begin{aligned} \underline{\delta x(X)} &= \delta x(X) - ZoEy(X) \\ \underline{\delta y(Y)} &= \delta y(Y) + XoEz(Y) - ZoEx(Y) \\ \underline{\delta z(Z)} &= \delta z(Z) \\ \underline{\delta y(X)} &= \delta y(X) + ZoEx(X) \\ \underline{\delta z(X)} &= \delta z(X) \\ \underline{\delta x(Y)} &= \delta x(Y) - ZoEy(Y) \\ \underline{\delta z(Y)} &= \delta z(Y) \\ \underline{\delta x(Z)} &= \delta x(Z) \\ \underline{\delta y(Z)} &= \delta y(Z) \\ \underline{a} &= a - Ez(Yo) \\ \underline{\beta_1} &= \beta_1 + Ey(Xo) - Ey(Yo) \\ \underline{\beta_2} &= \beta_2 - Ex(Xo) + Ex(Yo) \end{aligned} \quad (A3)$$

(2) 고정수평 아암타입(FH1 Model)

-입체오차 방정식

$$\begin{aligned} Tx(Xa, Ya, Za)^T + Lx \\ = Ty\{Tz(Xp, Yp, Zp)^T + Lz\} + Ly \end{aligned} \quad (A4)$$

여기서, Tx, Ty, Tz 는 회전행렬,

$$\begin{aligned} Lx^T &= [-X - \delta x(X), \delta y(X) - aX, \delta z(X)]^T, \\ Ly^T &= [\delta x(Y), Y + \delta y(Y), \delta z(Y)]^T, \\ Lz^T &= [\delta x(Z) - \beta_1 Z, \delta y(Z), \delta y(Z) - \beta_2 Z, Z + \delta z(Z)]^T \\ \Delta X &= \delta x(X) + \delta x(Y) + \delta x(Z) + Z(-\beta_1 \\ &+ (Ey(Y) - Ey(X)) + YEz(X) \\ &+ Yp(Ez(X) - Ez(Y) - Ez(Z)) + Zp(-Ey(X) \\ &+ Ey(Y) + Ey(Z)) \\ \Delta Y &= \delta y(Y) - \delta y(X) + \delta y(Z) + XEy(X) \\ &+ Z(Ex(X) - \beta_2 - Ex(Y) \\ &+ X(a - Ez(X)) + Xp(-Ez(X) + Ez(Y) \\ &+ Ez(Z)) + Zp(Ex(X) - Ex(Y) - Ex(Z)) \\ \Delta Z &= \delta z(Z) - \delta z(X) + \delta z(Y) - YEy(X) + XEy(X) \\ &+ Xp(Ey(X) - Ey(Y) - Ey(Z)) \\ &+ Yp(-Ex(X) + Ex(Y) + Ex(Z)) \end{aligned} \quad (A5)$$

-변환규칙

$$\begin{aligned} \underline{\delta x(X)} &= \delta x(X) + ZoEy(X) - YoEz(X) \\ \underline{\delta y(Y)} &= \delta y(Y) + ZoEx(Y) \\ \underline{\delta z(Z)} &= \delta z(Z) \\ \underline{\delta y(X)} &= \delta y(X) - YoEx(X) \\ \underline{\delta z(X)} &= \delta z(X) - YoEx(X) \\ \underline{\delta x(Y)} &= \delta x(Y) - ZoEy(Y) \\ \underline{\delta z(Y)} &= \delta z(Y) \\ \underline{\delta x(Z)} &= \delta x(Z) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \underline{\delta y}(Z) &= \delta y(Z) \\ \underline{\alpha} &= \alpha + Ez(X) \\ \underline{\beta}_1 &= \beta_1 + Ey(Y) - Ey(X) \\ \underline{\beta}_2 &= \beta_2 + Ex(X) - Ex(Y) \end{aligned} \quad (A6)$$

(3) 컬럼타입 CMM (CY Model)

-입체오차 방정식

$$\begin{aligned} Ty\{Tx(Xa, Ya, Za)^T + Lx\} + Ly \\ = Tz(Xp, Yp, Zp)^T + Lz \end{aligned} \quad (A7)$$

여기서,

$$\begin{aligned} Lx^T &= [-X - \delta x(X), \delta y(X) - \alpha X, \delta z(X)]^T, \\ Ly^T &= [\delta x(Y), -Y - \delta y(Y), \delta z(Y)]^T, \\ Lz^T &= [\delta x(Z) - \beta_1 Z, \delta y(Z) - \beta_2 Z, Z + \delta z(Z)]^T \\ \Delta X &= \delta x(X) - \delta x(Y) + \delta x(Z) + Z(-\beta_1 - Ey(Y) \\ &\quad - Ey(X)) + Y(Ez(Y) + Ez(X)) \\ &\quad + Yp(Ez(X) + Ez(Y) - Ez(Z)) \\ &\quad + Zp(-Ey(X) - Ey(Y) + Ey(Z)) \\ \Delta Y &= \delta y(Y) - \delta y(X) + \delta y(Z) + Z(Ex(Y) \\ &\quad + Ex(Z) - \beta_2) + X(\alpha - Ez(X)) \\ &\quad + Xp(-Ez(X) - Ez(Y) + Ez(Z)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &+ Zp(Ex(X) + Ex(Y) - Ex(Z)) \\ \Delta Z &= \delta z(Z) - \delta z(X) - \delta z(Y) + XEy(X) \\ &+ Y(-Ex(X) - Ex(Y)) + Xp(Ey(X) \\ &+ Ey(Y) - Ey(Z)) + Yp(-Ex(X) \\ &- Ex(Y) + Ex(Z)) \end{aligned}$$

(A8)

-변환규칙

$$\begin{aligned} \underline{\delta x}(X) &= \delta x(X) + ZoEy(X) - YoEz(X) \\ \underline{\delta y}(Y) &= \delta y(Y) - ZoEx(Y) \\ \underline{\delta z}(Z) &= \delta z(Z) \\ \underline{\delta y}(X) &= \delta y(X) + ZoEx(X) \\ \underline{\delta z}(X) &= \delta z(X) - YoEx(X) \\ \underline{\delta x}(Y) &= \delta x(Y) - ZoEy(Y) \\ \underline{\delta z}(Y) &= \delta z(Y) \\ \underline{\delta x}(Z) &= \delta x(Z) \\ \underline{\delta y}(Z) &= \delta y(Z) \\ \underline{\alpha} &= \alpha + Ez(Xo) \\ \underline{\beta}_1 &= \beta_1 - Ey(Yo) - Ey(Xo) \\ \underline{\beta}_2 &= \beta_2 + Ex(Yo) + Ex(Xo) \end{aligned} \quad (A9)$$