

< 논 문 >

형상충전기법과 세분화된 유동장 재생성기법을 이용한 자유표면을 가진 비압축성 점성유동의 수치적 모사

정준호* · 양동열**

(1995년 1월 27일 접수)

Numerical Analysis of Incompressible Viscous Flow with Free Surface Using Pattern Filling and Refined Flow Field Regeneration Techniques

J.H. Jeong and D.Y. Yang

Key Words: Free Surface(자유표면), Transient Viscous Flow(비정상 점성 유동), Finite Element Method(유한요소법)

Abstract

In this paper, two new techniques, the pattern filling and the refined flow field regeneration, based on the finite element method and Eulerian mesh advancement approach have been developed to analyze incompressible viscous flow with free surfaces. The governing equation for flow analysis is Navier-Stokes equation including inertia and gravity effects. The penalty and Newton-Raphson methods are used effectively for finite element formulation. The flow front surface and the volume inflow rate are calculated using the pattern filling technique to select an adequate pattern among five filling patterns at each quadrilateral control volume. By the refined flow field regeneration technique, the new flow field which renders better prediction in flow surface shape is generated and the velocity field at the flow front part is calculated more exactly. Using the new techniques to be developed, the dam-breaking problem has been analyzed to predict flow phenomenon of fluid and the predicted front positions versus time have been compared with the reported experimental result

————— 기 호 설 명 —————

<p>dQ_{in} : 유출입량 증분</p> <p>dt_{min} : 시간간격</p> <p>du : 속도증분벡터</p> <p>dU : 속도증분벡터의 절점값</p> <p>f_j : i-측면 충전율(i-th)</p> <p>f_{vol} : 검사체적에서의 충전율</p> <p>N_a, N_p : 형상함수</p> <p>p : 정수압</p>	<p>\dot{Q}_{in}</p> <p>s^i</p> <p>u</p> <p>u^{i-1}</p> <p>U</p> <p>$\overline{V}_{s^i}^a, \overline{V}_{s^i}^b$</p> <p>$\sigma_{ji}$</p> <p>$\rho$</p> <p>$\mu$</p> <p>$\Delta t$</p>	<p>: 검사체적에서 유체의 단위시간당 유출입량</p> <p>: 검사체적에서의 i-측면(i-th)</p> <p>: 속도벡터</p> <p>: 전시간 단계의 속도벡터</p> <p>: 속도벡터의 절점값</p> <p>: 측면 s^i에서 양쪽 절점속도</p> <p>: 응력</p> <p>: 밀도</p> <p>: 점도</p> <p>: 시간간격</p>
---	---	--

*한국과학기술원 대학원 기계공학과

**회원, 한국과학기술원 기계공학과

σ_n	: 수직응력
τ	: 전단응력
λ	: 벌칙상수

1. 서 론

고체나 유체 유동의 물리적 현상을 해석하기 위하여 비정상 유동장의 자유표면에 관한 연구는 과거에서부터 많이 이루어져 왔으며, 최근 들어 금속 재료를 사용한 주조, 단조, 압연, 고분자 재료를 이용한 사출성형, 압축성형 등의 재료 가공공정의 수치모사에 대한 관심이 높아지면서 이 분야에 대한 연구가 더욱 활발하게 진행되고 있다.

자유표면, 즉 유동선단이 존재하는 유동장을 해석하는 방법에는 초기 격자의 결점이 이동하면서 해석하는 라그랑지안(Lagrangian) 격자기법^(1,2)과 움직이지 않는 오일러리안(Eulerian) 격자기법^(3,13) 그리고 라그랑지안과 오일러리안기법을 접목시킨 ALE기법⁽¹⁴⁾으로 나눌 수가 있는데, 일반적으로 널리 사용되고 있는 라그랑지안과 오일러리안 격자 기법에 대하여 보다 구체적으로 살펴보면 다음과 같다. 먼저, 라그랑지안 격자기법에 의한 해석은 유동선단, 속도장, 압력장 등의 해석결과가 정확한 대신 격자의 변형이 많이 일어날 때마다 격자 재구성 과정을 반복해야 하기 때문에 복잡한 형상을 가진 다이(die)에서는 충전해석이 용이하지 못하다. 이에 반하여 오일러리안 격자기법은 초기 격자가 형상의 변형없이 그대로 사용되거나 선택적으로 사용되기 때문에 기하학적으로 복잡한 다이형상에서의 해석이 용이한 반면, 정확한 유동선단 예측과 자유경계면에서의 경계조건 처리에 어려움이 따른다. 최근의 연구 경향을 보면 라그랑지안 격자기법보다 오일러리안 격자기법에 보다 더 활발한 연구 활동이 진행되고 있는데, 그 이유로는 첫째, 실제 산업 현장에서 사용되는 다이의 형상, 즉 제품 형상이 매우 복잡하여 특히 일반 유체, 용융 금속, 고분자 유동 등을 해석하는데 있어 라그랑지안 격자기법은 한계가 있다는 점과 둘째, CAE를 위한 상업화된 코드는 비숙련자가 전혀 어려움없이 원하는 결과를 손쉽게 얻어내는 것을 목표로 하고 있기에 수치해석 도중 사용자의 작업이 거의 필요 없는 오일러리안 격자기법이 상업화된 코드에 보다 적합하기 때문이다. 오일러리안 격자기법의 대표적인 방법은 Harlow와 Welch에 의한 MAC⁽³⁾법과

Hirt와 Nichols에 의한 VOF⁽⁶⁾법이 있다. 이 기법은 FDM기법을 근간으로 발전되어져 지금까지도 자유 유동장 처리기법의 기본 개념을 제공하고 있다. MAC은 단위체(cell)들을 가로질러 이동하는 마커(marker)들을 따라가며 유동장을 해석하는 방법으로 유체의 유동 특성을 잘 표현하고 있으나 유동의 진전에 있어 비압축성 조건을 만족시키기 어렵다는 단점이 있다. VOF법은 비압축성 연속방정식을 근간으로 한 VOF(fractional volume of fluid)를 각 단위체마다 계산하고 계산된 VOF를 가지고 유동장을 정의하는 방법이다. 이 기법은 FEM 분야에서도 응용 발전되어 고분자 사출성형 공정에서는 Broyer⁽⁴⁾와 Wang⁽¹¹⁾등에 의하여 고분자의 충전해석기법이 개발되었고, 금속 주조공정에 있어서는 Dhatt⁽⁹⁾와 Chan⁽¹⁰⁾ 등에 의하여 용융금속의 충전해석을 위한 연구 결과가 발표된 사례가 있다.

본 연구에서는 자유표면 유동장 해석을 위하여 오일러리안 격자기법을 사용했다. 그러나, 앞에서도 언급한 바와 같이 오일러리안 격자기법은 많은 장점을 가지고 있는 반면, 유동선단과 검사체적(control volume)에서의 유체의 유출입량의 계산과 정확한 유동선단 형상의 예측, 부분충전 검사체적에서의 자유단 경계조건 처리에 많은 어려움이 따른다. 또한, 유동장을 계산하기 위한 격자와 검사체적과는 서로 직접적으로 연계되어 있기 때문에, 유동장의 수치해석결과의 정확도를 높이기 위한 보다 미세한 크기의 격자사용은 격자충수의 증가와 더불어 검사체적의 증가를 가져와 해석에 소요되는 시간이 기하급수적으로 커지는 결과를 낳게 된다. 이러한 문제점을 해결하고자 일반적인 사각형 검사체적에 적용되는 형상충전기법(pattern filling technique)과 세분화된 유동장 재생성기법(refined flow field regeneration technique)을 제안하여 보다 정확한 유동선단 및 유체 유동의 물리적 현상 예측과 유동선단부를 포함한 유동장 전체에 있어서 수치해석결과의 신뢰도를 높이고자 한다.

2. 본 론

2.1 지배방정식

비정상 비압축성 점성 유동장 해석을 위한 지배방정식은 가속도와 중력장을 모두 고려한 Navier

-Stokes 방정식과 연속방정식을 사용하였다.

연속방정식

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \quad (1)$$

Navier-Stokes 방정식

$$\rho \frac{\partial u_i}{\partial t} + \rho u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \sigma_{ji}(u) + \rho f_i \quad (2)$$

여기서, $\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + 2\mu d_{ij}$
 $d_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$

경계조건으로는 벽면에서 자유미끄럼(free-slip) 조건을 사용했고, 유동장 표면에서의 대기 압력에 의한 수직응력 그리고 표면장력과 유체와 공기 사이의 마찰에 의한 전단응력을 무시하였다. 경계조건으로 자유 미끄럼 조건을 사용한 이유는 본 연구에서 해석예제로 삼은 물(water)의 유동현상이 점성력보다 관성력과 중력에 의하여 더 큰 영향을 받기 때문에 점성력에 의해 생성되는 벽면 경계층의 크기가 해석을 위한 격자의 크기에 비하여 상대적으로 작아 비미끄럼(no-slip) 조건보다는 자유미끄럼조건을 사용하는 것이 물리적 유동현상을 모사하는데 있어 보다 적합하기 때문이다. 경계조건을 종합하면 다음과 같다.

$u_n = 0$ 벽면 $\partial\Omega_{wall}$ 을 따라 (3)

$\sigma_n = -p + 2\mu_{air} \frac{\partial u_n}{\partial x_n} = 0$ 유동선단 $\partial\Omega_{front}$ 을 따라

$\tau = \mu_{air} \left(\frac{\partial u_n}{\partial x_t} + \frac{\partial u_t}{\partial x_n} \right) = 0$ 유동선단 $\partial\Omega_{front}$ 을 따라

마지막으로 초기조건은 다음과 같다.

$u_i = u_i^0$ 전체 영역 Ω 에서 $t=0$ 일 때

2.2 유한요소 수식화

자유도 수를 감소시켜 수치 계산상의 효율을 높일 수 있는 벌칙상수(penalty) 방법⁽¹⁵⁾을 사용하여 비압축성 조건을 만족시켰다. 즉, 연속방정식과 구성방정식을 결합시켜 σ_{ij} 를 다음과 같이 정리한다.

$$\sigma_{ij} = \lambda d_{kk} \delta_{ij} + 2\mu d_{ij} \quad (4)$$

또한, Newton-Raphson⁽¹⁶⁾ 방법을 사용하여 비선형 방정식을 계산하는데 있어 수렴성을 증가시켰는데, 이를 위하여 Navier-Stokes 방정식인 식 (2)에 있어 속도변수 u 에 $u + du$ 를 대입하여 다음과 같은 식을 유도한다.

$$\begin{aligned} & \rho \frac{1}{\Delta t} \{ u_i + du_i - u_i^{t-1} \} + \rho \left\{ u_j \frac{\partial du_i}{\partial x_j} + du_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right\} \\ & = \frac{\partial \sigma_{ji}(du)}{\partial x_j} - \rho u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \sigma_{ji}(u)}{\partial x_j} + \rho f_i \end{aligned} \quad (5)$$

다음 단계로 속도와 속도증분벡터 u, du 를 이산화 한다.

$$\begin{aligned} u_k &= U_{k\gamma} N_\gamma \\ du_j &= dU_{j\beta} N_\beta \\ \frac{du_i}{dt} &= \frac{dU_{i\alpha} N_\alpha}{dt} \end{aligned} \quad (6)$$

최종적으로 식 (5)를 약형(weak form)으로 만들고 식 (6)을 사용하여 이산화를 하면 다음과 같은 유한요소 방정식이 얻어진다.

$$K_{i\alpha j\beta} dU_{j\beta} = F_{i\alpha} \quad (7)$$

여기서,

$$\begin{aligned} K_{i\alpha j\beta} &= \frac{\rho}{\Delta t} \int N_\alpha N_\beta \delta_{ij} d\Omega \\ &+ \rho \int \{ U_k N_\alpha N_\beta \delta_{ij} + U_{i,j} N_\alpha N_\beta \} d\Omega \\ &+ \int \{ \lambda N_{\alpha,i} N_{\beta,j} + \mu \delta_{ij} N_{\alpha,k} N_{\beta,k} + \mu N_{\alpha,j} N_{\beta,i} \} d\Omega \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_{i\alpha} &= \frac{\rho}{\Delta t} \int N_\alpha N_\beta \delta_{ij} d\Omega U_{j\beta}^{t-1} \\ &+ \left(-\frac{\rho}{\Delta t} \int N_\alpha N_\beta \delta_{ij} d\Omega - \rho \int U_k N_\alpha N_{\beta,k} \delta_{ij} d\Omega \right. \\ &\left. - \int \{ \lambda N_{\alpha,i} N_{\beta,j} + \mu \delta_{ij} N_{\alpha,k} N_{\beta,k} \} d\Omega \right) U_{j\beta} \\ &+ \int \rho f_i N_\alpha d\Omega \end{aligned}$$

최종 유한요소 방정식에서 볼 수 있듯이 본 방정식은 비선형성을 가지고 있기 때문에 내부 반복계산을 통하여 해를 구한다.

2.3 형상충전기법

오일러리안 격자기법 중 각 검사체적에 0에서 1까지의 수치값인 충전율을 계산하면서 유동선단을 진전시키는 방법은 유동장 형성기법 관점에서 두 가지로 크게 나눌 수 있는데, 첫째 계산되는 유동장이 초기 유동장과 항상 동일한 기법^(7-10,12)과 둘째, 시간에 따라 계속적으로 새로운 유동장을 생성하는 기법^(6,4,11,13)이 있다. 전자는 정의된 유동선단으로 전체 유동장을 두 영역을 나누고 구분된 영역의 물질상수 값만 변화시키면 되므로 유동장을 재구성할 필요가 없어 편리하나, 초기의 전 유동장을 반복적으로 계산하기 때문에 계산에 소요되는 시간

이 길고, 수치적으로 체적 손실이 생길 수 있다는 단점이 있다. 후자는 매시간 간격마다 유동장을 재구성하여 필요한 부분만을 선택적으로 계산하기 때문에 해석기법이 상대적으로 복잡하나, 계산시간이 짧고, 기법의 특성상 체적 손실이 없으며, 보다 안정적인 유동진전현상을 예측할 수 있다. 그러나 두 기법 모두 유동선단 부분에 존재하는 검사체적의 유출입량을 물리적으로 정확하게 계산한다는 것은 용이하지 못하다. 그 이유는 오일러리안 격자기법의 특성상 실제 유동장과 계산상에 사용되는 유동장과는 차이가 있어 부분적으로 충전된 검사체적에서의 속도장을 정확하게 구할 수 없기 때문이다. 이러한 부분 충전된 검사체적의 유출입량을 계산하기 위한 연구결과를 보면 부분충전 영역을 속도장 계산에 위한 영역에 포함시켜 유출입량을 구한 후 충전율로서 가중치를 주거나⁽⁶⁾ 부분충전 영향을 지배방정식에 첨가시켜 반복 계산을 통하여 해를 구하는 방법⁽¹³⁾이 사용되었다. 또한, 정사각형 검사체적에 대하여 인접하고 있는 두 검사체적간의 충전율을 이용하여 직선형태의 유동선단과 유출입량을 계산하는 방법⁽¹⁷⁻¹⁹⁾이 개발된 바 있다. 그러나, 아직까지도 일반적인 사각형 검사체적에 대하여 충전형상을 고려한 유출입량 계산기법에 대한 연구결과가 발표된 바가 없다.

본 논문에서는 부분충전 검사체적 사이에서의 보다 정확한 유출입량 계산을 위한 일반적인 사각형 검사체적에서의 형상충전기법을 제안하고 실제 물리적인 유동현상에 보다 근접한 계산 결과를 얻고자 한다. 여기서, 형상충전기법이라 함은 사각형 검사체적의 충전형상을 5가지 형상으로 정의하고 각 검사체적 단위로 정의된 형상 중 최적의 한 형상을 선정하여 이에 따라 유동선단과 각 검사체적간의 유출입량을 계산하는 기법이다. 실제적으로, 각 부분충전 검사체적 사이에서의 정확한 유출입량을 계산하기 위해서는 인접하는 부분충전 검사체적 사이의 인접면내에 있어 유체가 점유하는 영역과 그 영역에서의 속도장을 알아야 한다. 본 기법에서는 일반적인 사각형 검사체적의 충전율로부터 인접면에 있어 유체가 점유하는 영역을 계산함과 동시에 그 영역에서의 속도장을 구하여 보다 정확한 유출입량을 계산하고자 하는 것이다. 그러나, 이 두가지 모두 스칼라 양인 충전율만으로는 수학적으로 정확한 계산이 불가능하다. 그렇기 때문에 본 연구에서 제안한 형상충전기법에서는 다음과 같은 가정

을 하였다. 먼저, 인접면내에 있어 유체가 점유하는 영역을 예측하기 위하여 각 검사체적내의 유동선단 형태는 직선이며, 사각형의 검사체적 내의 유체의 충전시 유동선단과 동시에 만나는 검사체적의 측면들이나 대각면들에 있어서 충전상수(α)는 일정하다고 가정하였다. 여기서, 충전상수는 충전형상에 따라 2차원 격자의 각 면에 있어 전체 길이에 대한 유체의 점유길이 또는 비점유길이의 비로 정의한다. 위의 가정은 각 검사체적 내에서 발생할 실제 자유 곡선의 유동형태와는 차이가 있으나, 각 검사체적의 크기가 전체 유동장에 비하여 상대적으로 매우 작다고 전제한다면 이로 인하여 발생하는 오차는 무시할 수 있다고 판단된다. 이러한 가정은 일반적인 사각형 검사체적에 있어 체적율로부터 충전형상과 인접면내에 있어 유체가 점유하는 영역의 예측을 가능케 한다. 또한, 부분충전 검사에서 유체가 점유하는 영역에서의 속도장을 구하기 위하여서 다음과 같은 가정을 하였다. 부분충전 검사체적에서 유체가 존재하지 않는 영역을 유체가 존재하는 영역으로 가정하고 계산을 했을 때, 전체 유동장중 유체가 존재하는 영역에서의 속도장은 실제 유체가 존재하는 영역만으로 구성된 유동장으로 계산한 속도장과 거의 일치한다. 이와 같은 가정은 물리적인 현상과는 맞지 않으나 부분충전 검사체적의 유체의 충전 영역에서 비압축성 조건을 만족하는 속도장을 얻기 위하여 위와 같은 가정을 하였다. 앞에서 설명한 가정과 형상충전기법을 사용하여 부분충전 검사체적에서 유체 존재영역의 속도장은 다음과 같이 구할 수 있다. 먼저, 부분충전 검사체적을 완전충전 검사체적으로 가정하여 속도장을 구하고, 형상충전기법을 사용하여 부분충전 검사체적 내부를 유체가 존재하는 영역과 존재하지 않는 영역으로 구분과 동시에 검사체적의 각 측면에서 측면 충전율(side filling ratio)을 계산한다. 측면 충전율은 2차원 유동장에 있어서 사각형 검사체적의 각 측면과 유체가 접하는 길이를 각 측면의 전체 길이로 나누어 구한 값으로 정의한다. 이 값으로 유체가 각 측면과 접하는 영역을 정의할 수 있을 뿐만 아니라, 보간법에 의하여 유체의 존재영역(A_f)과 비존재 영역(A_e)의 경계선인 유동선단과 측면이 만나는 점의 속도를 구할 수 있다. (Fig. 1)

$$\begin{aligned} \overline{V}_f^m &= f_i \overline{V}_{f_i}^m + (1-f_i) \overline{V}_e^m, & 0 < f_i < 1 \text{ \& } a \in A_f \text{ 경우} \\ (1-f_i) \overline{V}_e^m &+ f_i \overline{V}_f^m, & 0 < f_i < 1 \text{ \& } b \in A_f \text{ 경우} \end{aligned}$$

(8)

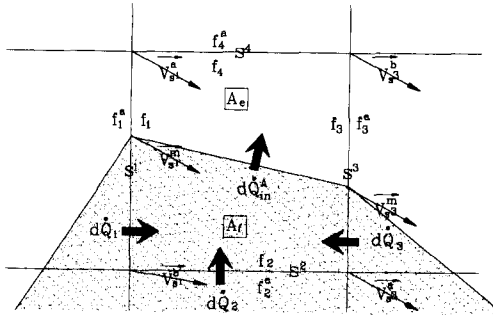


Fig. 1 Schematic diagram of volume inflow rate of fluid at fluid filled region of control volume

여기서, s^i 는 i 측면, f_i 는 측면 충전율, $\overline{V}_{s^i}^a$, $\overline{V}_{s^i}^b$ 는 측면 s^i 에서의 양쪽 절점속도이다.

이와 같이 구한 속도장은 유체가 존재하는 영역에서의 비압축성 조건을 만족하는 것으로 부분충전 검사체적에서의 유출입량 계산을 가능케 한다. 앞에서도 언급한 바와 같이 위의 식에서 유도된 속도장은 측면 충전율의 계산과 유동선단의 예측이 이루어져야만 하기 때문에 이에 대하여 설명하면 다음과 같다. 먼저, 계산하고자 하는 검사체적의 충전율과 주위 검사체적들의 충전율을 사용하여 본 연구에서 제시한 5가지의 충전형상 중 해당되는 충전형상을 선택한다(Fig. 2(a)). 그리고, 각각의 충전형상에 따른 측면 충전율을 구하고 계산된 측면 충전율로부터 각각의 측면과 유동선단의 교점을 계산하여 유동선단을 구하게 된다. 이와 같이 속도장과 유동선단을 구하는데 사용되는 측면 충전율을 계산하기 위해서는 먼저 충전상수를 구해야 하는데 앞에서 언급한 가정을 전제로 하고 Fig. 2(b)를 참조하여 기하학적으로 수식을 유도하면 각 충전형상에 대하여 다음과 같이 충전상수를 구할 수 있다.

경우 I) $\vec{a}_2 \times \vec{a}_4 a_1^2 - (\vec{a}_1 \times \vec{a}_2 - \vec{a}_1 \times \vec{a}_4) a_1 \times 2f_{vol} V = 0$

경우 II) $a_{I} = \sqrt{\frac{2f_{vol}V + 4\vec{a}_2 \times \vec{a}_1 + \vec{a}_4 \times \vec{a}_3}{a_4 \times a_3}}$

경우 III) $a_{II} = \sqrt{\frac{2f_{vol}V}{a_1 \times a_2}}$

경우 IV)

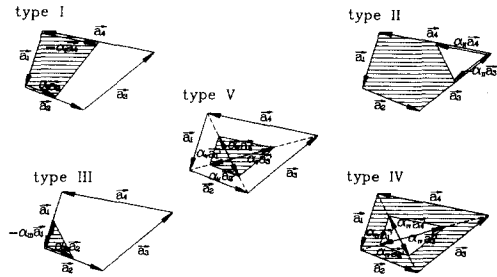
$a_{IV} = \sqrt{\frac{2(1-f_{vol})V}{\vec{a}_1' \times \vec{a}_2' + \vec{a}_2' \times \vec{a}_3' + \vec{a}_3' \times \vec{a}_4' + \vec{a}_4' \times \vec{a}_1'}}$

경우 V)

$a_{V} = \sqrt{\frac{2f_{vol}V}{\vec{a}_1' \times \vec{a}_2' + \vec{a}_2' \times \vec{a}_3' + \vec{a}_3' \times \vec{a}_4' + \vec{a}_4' \times \vec{a}_1'}}$ (9)

type I		B or C or D / A	B or C or D / Bar C or D / A	C or D / B
type II		B or C or D / A	C or D / B	
type III		B or C or D / A	C or D / B	
type IV		C or D / C or D	B / B	
type V		A / A		

(a)



(b)

Fig. 2 Rule table of pattern types for pattern filling technique (a) and detail description of pattern types (b)

여기서, f_{vol} 은 검사체적의 충전율, V 는 검사체적의 체적이다.

이와 같이 계산된 충전상수 $a_I, a_{II}, a_{III}, a_{IV}, a_V$ 를 사용하고 Fig. 2(b)를 참조하여 각 충전형상에서의 측면 충전율을 구하면 다음과 같이 구하게 된다.

경우 I) $f_1^I = 1, f_2^I = a_I, f_3^I = 0, f_4^I = a_I$

경우 II) $f_1^{II} = 1, f_2^{II} = 1, f_3^{II} = 1 - a_{II}, f_4^{II} = 1 - a_{II}$

경우 III) $f_1^{III} = a_{III}, f_2^{III} = a_{III}, f_3^{III} = 0, f_4^{III} = 0$

경우 IV) $f_1^{IV} = 1, f_2^{IV} = 1, f_3^{IV} = 1, f_4^{IV} = 1$

경우 V) $f_1^V = 0, f_2^V = 0, f_3^V = 0, f_4^V = 0$ (10)

종합적으로, 측면 충전율은 $f_{vol} = 0$ 인 검사체적에서 0, 0, 0, 0, $f_{vol} = 1$ 인 검사체적에서 1, 1, 1, 1이 되며, 나머지의 경우는 앞에서 유도된 바와 같이 5가지 형상에 따라 계산된다.

2.4 유동선단의 유연화

측면 충전율은 각각의 검사체적에서 독립적으로 계산되어지기 때문에 두 검사체적에 의하여 공유되어지는 측면에서의 측면 충전율은 불연속성을 나타

내게 된다. 이러한 불연속성은 물리적 현상과 맞지 않기 때문에 불연속 부분에 대한 유연화(smoothing) 과정을 수행하였다. 그리고, 이 과정은 항상 충전기법에 의하여 예측된 각 검사체적의 충전형상이 인접하는 검사체적의 충전형상에 의하여 보다 안정적인 형태로 재조정되도록 하는 역할을 수행한다. 유연화 과정을 설명하면 다음과 같다. 한 측면을 검사체적 a 와 b 가 공유할 경우 각각의 검사체적 a 와 b 에서 계산된 충전율을 f_a 와 f_b 라고 하면 유연화된 새로운 충전율은 다음과 같이 된다.

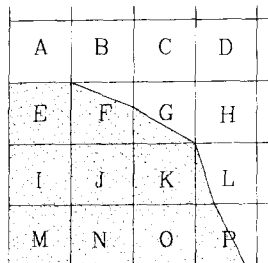
- I) $f_s = (f_a + f_b) / 2$ $0 < f_a < 1$, & $0 < f_b < 1$ 일 때
- II) $f_s = 1$ $f_a = 1$, or $f_b = 1$ 일 때 (11)

여기서, f_a 나 f_b 중 어느 것이라도 값이 1이라면 f_s 를 1로 정의한 이유는 평균값을 취함으로써 이미 완충 검사체적이 부분충전 검사체적으로 전환되는 현상을 막기 위함이다. 그리고, 이러한 유연화과정은 f_a 와 f_b 중 어느 것이라도 0값을 갖는 경우에는 유연화의 의미가 없기 때문에 제외된다.

2.5 각 검사체적에서의 유출입량 계산

본 연구에서의 유한요소해석을 위한 격자는 4절점 4각형을 사용했으며 각 격자는 검사체적과 일치시켰다. 그리고, 검사체적은 충전율과 비압축성 유동 조건에 따라 다음과 같이 3가지로 구분된다. (Fig. 3)

- 내부 검사체적 ($f_{vol} = 1$ & $\dot{Q}_{in} = 0$)
- 선단 검사체적 ($0 \leq f_{vol} \leq 1$ & $\dot{Q}_{in} \neq 0$)
- 외부 검사체적 ($f_{vol} = 0$ & $\dot{Q}_{in} = 0$)



- Internal Control Volume ($f_{vol} = 1$ & $d\dot{Q}_{in} = 0$)
: I, J, K, M, N, O
- Front Control Volume ($0 \leq f_{vol} \leq 1$ & $d\dot{Q}_{in} \neq 0$)
: A, E, F, G, L, P
- External Control Volume ($f_{vol} = 0$ & $d\dot{Q}_{in} = 0$)
: B, C, D, H

Fig. 3 Definition of control volume by filling ratio and volume inflow rate of fluid

여기서, f_{vol} : 검사체적에서의 충전율

\dot{Q}_{in} : 검사체적에서 유체의 단위시간당 유출입량

여기서, 유한요소 계산을 위한 유동장은 $0 < f_{vol} \leq 1$ 인 검사체적과 일치되는 격자들로 구성된다. 내부 검사체적은 유동장의 내부를 구성 하고 있고 유체의 유출입이 없으며, 선단 검사체적은 유동장의 외각을 둘러싸고 있기 때문에 유체의 유출입이 존재하고 시간에 따라 충전율이 변하며 유동선단이 존재하는 영역이다. 또한, 외부 검사체적은 유동장 외부에 존재하며 충전율은 0으로 변하지 않는다. 앞에서 언급한 검사체적들 중 유출입량의 계산이 필요한 것은 선단 검사체적이며, 이곳에서 항상 충전기법에 의한 유출입량은 다음과 같이 계산한다 (Fig. 1). 검사체적 A 의 측면을 s^i , s^i 를 포함하는 격자를 $m_{s^i}^k$, 격자의 총수를 $1m_{s^i}$, s^i 의 양쪽 절점 a , b 의 속도를 \vec{V}_a^i , \vec{V}_b^i , s^i 의 절대길이를 r_{s^i} , s^i 에서 검사체적 중심방향으로의 수직벡터를 \vec{n}_i 라 하면 식 (8)을 사용하고 검사체적의 외각 궤적을 따라 적분하는 방법으로 총 유출입량을 다음과 같이 구할 수 있다. 특별히, 검사체적 A 의 측면 충전율을 f_i , 각 측면을 공유하는 검사체적을 A^q , A^q 로부터 계산된 공유 측면의 측면 충전율을 f_i^q 라 할 때, 측면 충전율인 f_i 가 0이고 f_i^q 가 0이 아닌 경우에는 f_i 를 f_i^q 로 치환하고 \dot{Q}_{s^ik} 를 계산하되 그 값이 0보다 작은 경우에 \dot{Q}_{s^ik} 를 0으로 정의한다. 또한 f_i 가 0이 아니고 f_i^q 가 0인 경우에는 \dot{Q}_{s^ik} 가 양인 경우에 0으로 정의한다.

$$\dot{Q}_{in}^A = \sum_{i=1}^4 \dot{Q}_i = \sum_{i=1}^4 \sum_{k=1}^{1m_i} \dot{Q}_{s^ik} W_{s^i}^k \quad (12)$$

여기서,

- $\dot{Q}_{s^ik} = 0.5 r_{s^i} (\vec{V}_a^i + \vec{V}_b^i) \cdot \vec{n}_i$, $f_i = 1$ 이면
- $0.5 r_{s^i} f_i (\vec{V}_a^i + \vec{V}_b^i) \cdot \vec{n}_i$, $0 < f_i < 1$ & $a \in A_f$ 이면
- $0.5 r_{s^i} f_i (\vec{V}_a^i + \vec{V}_b^i) \cdot \vec{n}_i$, $0 < f_i < 1$ & $b \in A_f$ 이면
- $W_{s^i}^k = 0$, $\dot{Q}_{s^ik} \geq 0$ & $m_{s^i}^k \subset A$ 또는
- $\dot{Q}_{s^ik} < 0$ & $m_{s^i}^k \not\subset A$ 이면
- 1, $\dot{Q}_{s^ik} < 0$ & $m_{s^i}^k \subset A$ 또는
- $\dot{Q}_{s^ik} \geq 0$ & $m_{s^i}^k \not\subset A$ 이면

이와 같이 각 선단 검사체적에서 총 유속량 계산한 후 각 선단 검사체적을 채우거나 비우는데 소요되는 최단 시간간격을 계산한다. 이와 같이 계산된 시간간격과 수치해석상의 안정성을 보장하기 위한 임계 시간간격을 비교하여 작은 값을 현 시간간격

dt_{min} 으로 사용하여 현 시간간격에서의 유출입량을 다음과 같이 계산한다.

$$dQ_{in}^A = \dot{Q}_{in}^A dt_{min} \quad (13)$$

최종적으로 계산된 유출입량을 사용하여 총전율을 다음과 같이 계산할 수 있다.

$$f_{vol}^t = f_{vol}^{t-1} + \frac{dQ_{in}^A}{V_{tot}^A} \quad (14)$$

여기서, V_{tot}^A 는 검사체적 A 의 총 부피이다.

2.6 세분화된 유동장 재생성기법

앞에서도 언급한 바와 같이 부분충전 검사체적에서의 속도장을 정확하게 구하기는 오일러리안 격자 기법의 특성상 매우 힘들기 때문에 본 연구에서는 형상충전기법을 제안하여 검사체적에서의 유출입량을 보다 실제적 유동 특성에 맞도록 계산하고자 하였다. 그러나, 형상충전기법에서도 부분충전 검사체적을 완전충전된 검사체적으로 가정한 유동장을 가지고 속도장과 압력장을 계산했기 때문에 이러한 가정에서부터 비롯되는 수치적 오차는 필연적으로 존재하게 된다. 이러한 문제점을 해결하기 위하여 세분화된 유동장 재생성기법을 제안한다. 본 논문에서 제안한 세분화를 통한 유동장 재생성기법은 예측된 유동선단을 따라 초기 격자들을 조합하여 형성시킨 유동장에 세분화작업을 수행하여 격자들을 새롭게 생성시키고, 각 격자들 중 부분검사체적 내의 미충전 부분에 속하는 격자의 제거과정을 수행하여 새로운 유동장을 형성시키는 기법이다. 이 기법의 장점으로는 첫째, 부분충전 검사체적에서 미충전 부분의 제거가 가능하여 실제 형태에 보다 접근된 유동장을 얻을 수 있기 때문에 속도와 압력에 대한 신뢰도를 높일 수 있다. 둘째, 기존에는 속도장과 압력장의 수치해석상 정확도를 높이기 위해서는 초기 격자수를 증가시켜야 하는데, 이는 검사체적수의 증가가 불가피하여 계산에 소모되는 시간이 기하급수적으로 증가하게 된다. 그러나, 세분화 작업을 하게 되면 유동선단부에서 격자를 미세하게 생성시킴으로써 유동선단부에서의 속도장을 보다 효율적이면서도 정확하게 계산할 수 있다는 장점이 있다. 이러한 세분화과정⁽²⁰⁾을 거치게 되면 5절점이 존재하는 격자가 존재하게 되는데 이 부분에 대하여서는 중간 절점을 양쪽 꼭지점 절점에 의하여 구속시키는 방법으로 처리하였다. 즉,

$$U_{mid} = (U_{vertex}^1 + U_{vertex}^2) / 2 \quad (15)$$

유동장의 형성은 먼저 형상충전기법에 의하여 선단 검사체적에 유체가 존재하는 영역을 정의하고 이 영역을 근간으로 세분화함과 동시에 유체가 존재하지 않는 영역 부분을 제거하게 된다. 이와 같은 유동선단 부위에 일어나는 세분화 작업으로 각 선단 검사체적 내에는 여러 개의 격자가 존재하게 되므로 유출입량의 계산에 있어 선단 검사체적과 유한요소 격자가 일치하는 경우와는 다르게 된다. 즉, Fig. 4를 참조하여 설명하면 다음과 같다. 특정한 선단 검사체적 A 내에 유체가 존재하는 영역을 정의하는 벡터를 $\vec{l}_1 \dots \vec{l}_n$ 이라 하자. 이 중 유동선단부인 \vec{l}_n 을 제외한 $\vec{l}_1 \dots \vec{l}_{n-1}$ 을 통하여 유입되는 유출입량의 합이 검사체적 A 로 유입되는 총 유출입량이 되므로 유출입량의 계산은 영역 벡터인 $\vec{l}_1 \dots \vec{l}_{n-1}$ 를 따라 이루어진다. 이에 대하여 구체적으로 살펴보면, 유동장을 구성하는 모든 격자의 측면들 중 벡터 \vec{l}_i 에 일부 또는 전부가 속하는 측면을 s_i^j , s_j^i 를 포함하는 격자를 m_{ss}^k , 격자수를 lm_{ss} , s_i^j 의 총수를 ls^i , s_j^i 의 양쪽 절점의 속도를 \vec{V}_{ss}^i , \vec{V}_{ss}^j , s_i^j 의 절대길이를 r_{ss} , s_j^i 가 벡터 \vec{l}_i 에 접하는 길이를 r_{ss}^i , \vec{l}_i 에서 검사체적 중심방향으로의 수직 벡터를 \vec{n}_i , \vec{l}_i 가 속하는 검사체적의 측면을 공유하는 검사체적을 A_i^q , A_i^p 로부터 공유 측면에 정의된 유체의 영역 정의 벡터를 \vec{l}_i 이라고 할 때 검사체적으로 유입되는 총 유속량은 다음과 같다. 단, $|\vec{l}_i| = 0$ 이고 $|\vec{l}_i'| \neq 0$ 이면, \vec{l}_i 를 \vec{l}_i' 로 치환하여 \dot{Q}_{ss}^i 를 계산하되 만약 그 값이 0보다 작다면 0으로 정의한다. 그리고, $|\vec{l}_i'| = 0$ 이고 $|\vec{l}_i| \neq 0$ 이면 0보다 큰

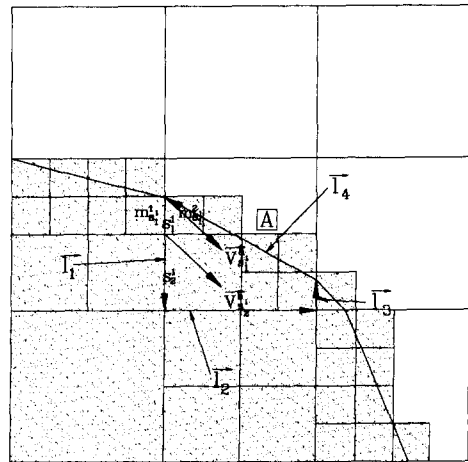


Fig. 4 Schematic diagram of refined mesh and fluid filled region of control volume

값에 대하여 0으로 정의한다.

$$\dot{Q}_{m^k}^A = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{l_{s_i}} \sum_{k=1}^{l_{m_s}} \dot{Q}_{s_j^k} W_{s_j^k}^k \quad (16)$$

여기서,

$$\begin{aligned} \dot{Q}_{s_j^k}^k &= 0.5r_{s_j} (\overline{V_{s_j^k}^a} + \overline{V_{s_j^k}^b}) \cdot \vec{n}_i & \alpha &= 1 \text{ 이면} \\ & 0.5r_{s_j}' (2-a) \overline{V_{s_j^k}^a} + a \overline{V_{s_j^k}^b}) \cdot \vec{n}_i, & 0 < a < 1 \text{ \& } a < A, \text{ 이면} \\ & 0.5r_{s_j}' (a \overline{V_{s_j^k}^a} + (2-a) \overline{V_{s_j^k}^b}) \cdot \vec{n}_i, & 0 < a < 1 \text{ \& } b < A, \text{ 이면} \\ & 0, & \alpha &= 0 \text{ 이면} \end{aligned}$$

여기서, $\alpha = \frac{r_{s_j}'}{r_{s_j}}$

$$\begin{aligned} W_{s_j^k}^k &= 0, \dot{Q}_{s_j^k} \geq 0 \text{ \& } m_{s_j^k}^k \subset A \text{ 또는} \\ & \dot{Q}_{s_j^k} < 0 \text{ \& } m_{s_j^k}^k \not\subset A \text{ 이면} \\ 1, \dot{Q}_{s_j^k} & < 0 \text{ \& } m_{s_j^k}^k \subset A \text{ 또는} \\ & \dot{Q}_{s_j^k} \geq 0 \text{ \& } m_{s_j^k}^k \not\subset A \text{ 이면} \end{aligned}$$

3. 해석결과

3.1 형상충전기법에 의한 댐 붕괴시 유동해석

본 연구에서 제시한 형상충전기법의 타당성 검토를 위하여 댐 붕괴 문제를 해석하였다. 먼저 해석에 사용된 물기둥의 크기는 Fig. 5에 나타낸 것과 같이 5.715 cm × 5.715 cm이며 경계조건은 벽면에서의 마찰력을 무시한 미끄럼조건을 사용했다. 물의 밀도는 1000. kgm⁻³ 중력 가속도는 9.8ms⁻²를 사용했으며, 시간간격은 속도장과 유동 진전의 안정성을 위하여 1. × 10⁻³sec를 사용했다. 해석은 두 가지 초기격자, 즉 균일격자와 비균일격자(Fig. 6)를 사용하여 해석을 수행하였으며 각각의 해석결과를 Fig. 7에서 Fig. 9까지 나타냈다. Fig. 7은 균일 초기 격자조건에서 시간이 0.03, 0.06, 1.0sec 일 때의 유동선단, 격자의 형상과 속도장을 나타내고

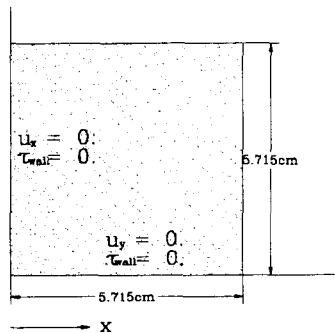
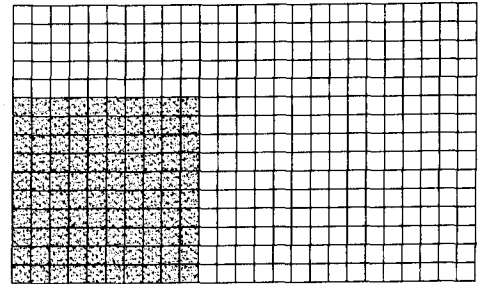
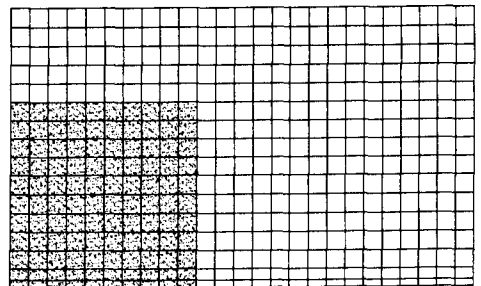


Fig. 5 Schematic diagram of initial water column and wall boundary condition for FEM analysis

있으며, Fig. 8은 비균일 초기 격자조건에서 같은 종류의 해석결과를 나타낸 것이다. 해석결과들을 살펴볼 때 두 경우 모두 유동선단의 형상이 유체의 부드러운 흐름현상을 잘 예측해 주고 있으며, 속도장 또는 경계조건에 합당한 안정적인 해석결과를 보여 주고 있다. Fig. 9는 Martin과 Moyce⁽²¹⁾에 의한 실험결과와 수치해석 결과를 비교한 것으로



(a) Homogeneous case



(b) Heterogeneous case

Fig. 6 Initial mesh and control volume configuration

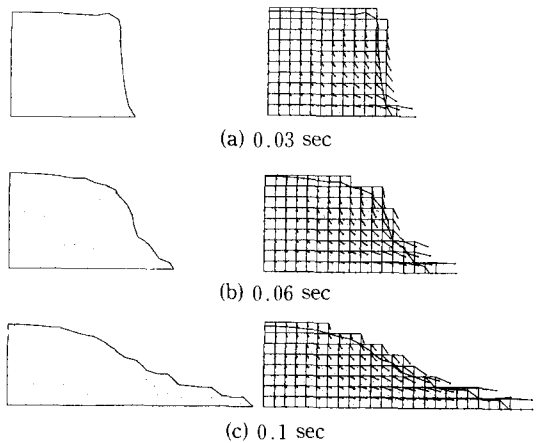


Fig. 7 Predicted fluid front surface, mesh configuration and velocity field for homogeneous control volume using pattern filling technique

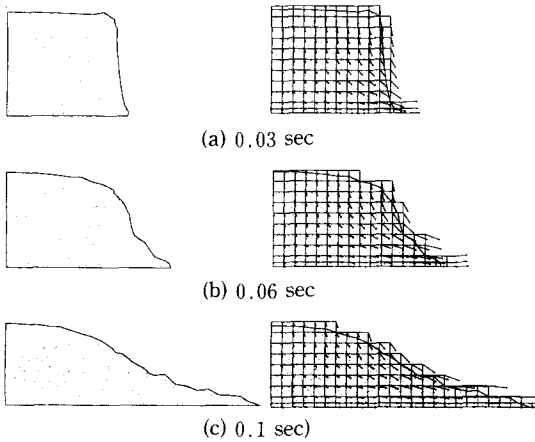


Fig. 8 Predicted fluid front surface, mesh configuration and velocity field for heterogeneous control volume using pattern filling technique

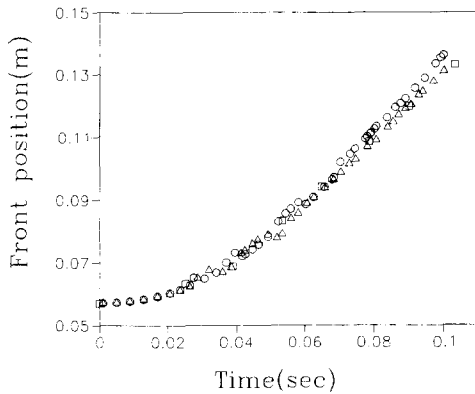


Fig. 9 Predicted front position variation versus time (homogeneous(Δ) and heterogeneous(\circ) case) using pattern filling technique compared with experimental result(\square) by Martin and Moyce⁽²¹⁾

x축은 시간 y축은 바닥면에서 시간에 따른 x축방향으로 유체의 끝단위치를 나타낸 것이다. 이 결과를 보면, 두 경우 모두가 실험결과와 상당히 근접하고는 있음을 알 수 있으며, 또한 균일 초기 격자보다 비균일 초기 격자를 사용한 경우가 상대적으로 더 많이 진전된 것을 볼 수 있다. 그 이유는 다음과 같다. 유체의 흐름을 물리적으로 생각해 보면 바닥면에서 상당히 날카로운 진행현상이 일어나게 되는데 균일 초기 격자 경우의 바닥부분의 격자와 검사체적의 크기로는 이를 나타내기 어려운 상황이다. 이에 반하여, 비균일 초기 격자의 경우는 이러한 유동의 현상을 보다 잘 표현할 수 있기 때문에

더 많은 진전이 일어난 것은 자연스러운 일이다. 그리고, 비균일 초기 격자의 경우 실험결과보다 더 많이 진전되는 경향을 볼 수 있는데, 그 이유는 형상충전기법을 사용하여 속도장을 계산할 때 부분충전 검사체적을 완전충전된 것으로 가정했기 때문에 미충전 부분에 첨가된 유체가 중력의 영향을 받아 유동장 표면에 외력으로서 작용하기 때문으로 사료된다. 균일한 초기 격자의 경우는 바닥부분의 날카로운 진행을 나타내지 못하기 때문에 생기는 오차를 미충전 부분에 첨가된 유체에 의한 외력 효과로 보상되어 실험치와 거의 일치하는 결과를 보여 주고 있는 것이다. 그러나, 두 결과 모두 실험치와 매우 근사하며, 예측된 유동전단의 형상 또한 유체 유동 특성을 잘 나타내고 있기 때문에 본 수치해석 결과로부터 형상충전기법의 실효성은 충분히 입증되었다고 할 수 있다.

3.2 세분화된 유동장 재생성기법에 의한 댐 붕괴시 유동해석

해석조건은 형상충전기법에 의한 댐붕괴 해석과 동일하며 그의 해석결과를 Fig. 10에서 Fig. 13까지 나타냈다. Fig. 10은 균일 초기 격자로부터 세분화를 수행했을 경우, 시간 0.03, 0.06 0.1sec 일 때의 유동전단의 형태와 격자의 형상을 나타내며, Fig. 11은 비균일 초기격자에서의 유동전단, 격자의 형상을 표현해 주고 있다. 또한, Fig. 12는 각각의 시간에서 계산된 속도장을 보여 주고 있다. 위의 결과들은 부드러운 유동전단을 형성뿐만 아니라 유동전단을 따라 세분화가 수행되면서 효과적으로 유동장이 재생성되는 형상을 잘 보여 주고 있으며, 세분화된 격자를 따라 계산된 속도장이 유동전단을 따라 조밀하면서도 안정적으로 분포되고 있음을 나타내고 있다. 또한, 앞 절의 해석결과인 세분화되지 않은 유동장에 비하여 매우 개선된 유동장의 형상을 보여 주고 있음을 알 수 있다. Fig. 13은 실험결과와 수치해석한 결과를 비교한 것인데, 미소하나마, 비균일 격자를 사용한 경우가 실험치와 더 근사한 해석결과를 얻은 이유는 앞서서도 언급한 바와 같이 바닥부분에서의 날카로운 흐름현상을 표현하는데 있어 비균일 격자의 경우가 보다 더 용이하기 때문이다. 그리고, 앞 절에서의 해석결과와 비교하여 볼 때 수치해석결과가 실험치와 상대적으로 더 큰 오차를 보이고 있는데 그 이유를 설명하면 다음과 같다. 세분화 작업을 한 경우가 하

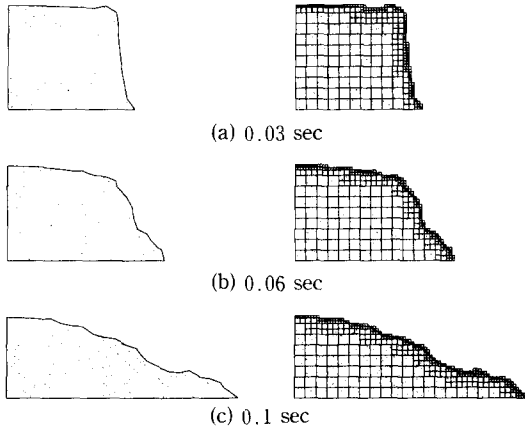


Fig. 10 Predicted fluid front surface and mesh configuration field for homogeneous control volume using refined flow field regeneration technique

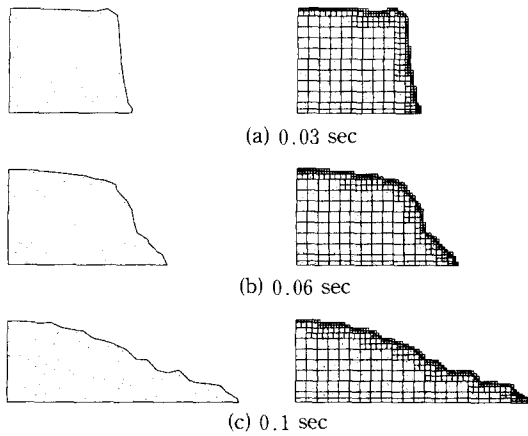


Fig. 11 Predicted fluid front surface and mesh configuration for heterogeneous control volume using refined flow field regeneration

지 않은 경우보다는 유동장의 형상이 유동선단부에서 더 정확하기 때문에 부분충전 검사체적에서 유체의 비충전 부분을 충전된 것으로 가정함으로써 자유표면에 발생하는 외력이 감소하게 되므로 이에 따라 유동진전이 늦어져 오히려 실험 결과치와의 격차를 더 크게 만든 것이다. 즉, 세분화 작업이 없었던 경우의 해석결과는 앞 절에서도 언급한 바와 같이 실험결과에 보다 더 근접하기는 하나 부분적으로 과장되어 예측된 결과라고 볼 때 세분화 작업에 의한 결과가 실험치와 상대적으로 더 많은 오차를 보이고는 있으나, 본 연구에 사용한 초기의 검사체적 구조에서 얻을 수 있는 보다 정확한 해석

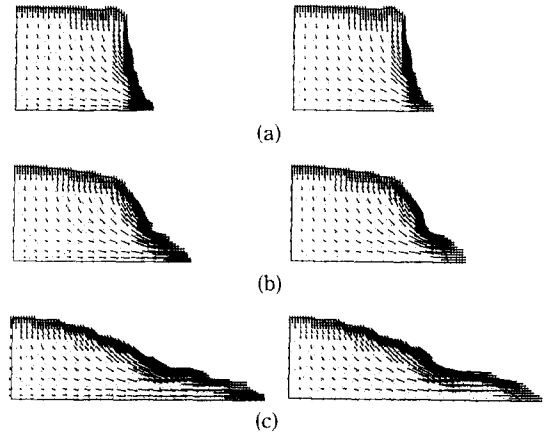


Fig. 12 Velocity field (a) 0.03 sec, (b) 0.06 sec, (c) 0.1 sec) for homogeneous(left side) and heterogeneous case(right side)

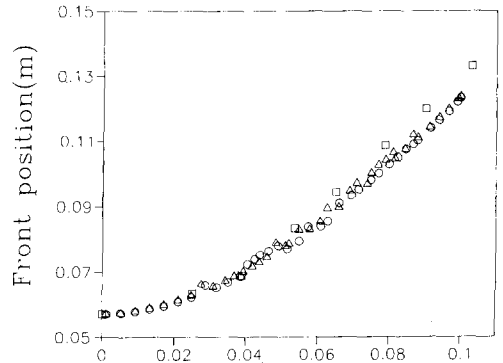


Fig. 13 Predicted front position variation versus time (homogeneous(△) and heterogeneous(○) case) using refined flow field regeneration technique compared with experimental result(□) by Martin and Moyce⁽²¹⁾

결과라고 사료된다. 결론적으로, 형상충전기법에 의한 유체의 유동해석에 있어서 보다 효율적이면서 정확한 결과를 얻기 위해서는 날카로운 유동현상이 존재하는 영역에서 조밀한 격자 및 검사체적을 구성함과 동시에 세밀화된 유동장 재생성기법을 사용하여 부분충전 검사체적으로부터 생기는 오차를 줄여야 만이 가능하다는 결론을 내릴 수 있다.

4. 결 론

형상충전기법과 세분화된 유동장 재생성기법을 제안하고 기법의 타당성 검토를 위하여 댐의 붕괴

시 유체의 흐름을 예측하는 예제에 적용한 바 다음과 같은 결론을 얻었다.

- (1) 형상충전기법은 부분충전 검사체적에서의 유출입량 계산에 있어 유체 충전부의 비압축성 유동 조건을 만족시키는 매우 효율적 방법으로 유체의 유동진전현상 모사에 있어 좋은 결과를 보였다.
- (2) 일반적인 사각형 검사체적을 5가지 충전형상으로 정의하고 측면 충전율을 계산함으로써 단순 수치 값인 충전율로부터 실제 물리적 유동 형태에 보다 근접한 유동선단을 예측할 수 있었다.
- (3) 세분화된 유동장 재생성기법은 부분충전 검사체적에서의 미충전 부분의 제거가 가능하여 유동선단에 의하여 예측된 형태에 보다 접근한 유동장을 얻을 수 있었고, 유동선단부에 격자를 미세하게 생성시킴으로써 속도장과 압력장을 보다 효율적이면서도 정확하게 계산할 수 있었다.
- (4) 형상충전기법과 세분화된 유동장 재생성기법을 사용하여 댐의 붕괴시 유체의 흐름을 수치모사한 결과 매우 안정적인 유체의 흐름현상을 예측할 수 있었으며 실험결과에 상당히 근접한 해석결과를 얻을 수 있었다.

참고문헌

- (1) Balasubramaniam Ramaswamy and Mutsuto Kawahara, 1987, "Lagrangian Finite Element Analysis Applied to Viscous Free Surface Fluid Flow," *Int. J. Numer. Methods Fluids*, Vol. 7, pp. 953~984.
- (2) Muttin, F., Coupez, T., Bellet, M. and Chenot, J. L., 1993, "Lagrangian Finite-Element Analysis of Time-Dependent Viscous Free-Surface Flow Using an Automatic Remeshing Technique: Application to Metal Casting Flow," *Int. J. Numer. Methods Eng.*, Vol. 36, pp. 2001~2015.
- (3) Harlow, F.H. and Welch, J.E., 1995, "Numerical Calculation of Time-Dependent Viscous Incompressible Flow of Fluid with Free Surface," *Phys. Fluids*, Vol. 8, pp. 2182~2189.
- (4) Broyer, E., Gutfinger, C. and Tadmor, Z., 1975, "A Theoretical Model for the Cavity Filling Process in Injection Molding," *Trans. Soc. Rheol.*, Vol. 19, pp. 423~444.
- (5) Ruschak, K.J., 1980, "A Method for Incorporating Free Boundaries with Surface Tension in Finite Element Fluid-Flow Simulators," *Int. J. Numer. Methods Eng.*, Vol. 15, pp. 639~648.
- (6) Hirt, C.W. and Nicholds, B.D., 1981, "Volume of Fluid (VOF) Method for the Dynamics of Free Boundaries," *J. Comput. Phys.*, Vol. 39, pp. 201~225.
- (7) Erik Thompson, 1986, "Use of Pseudo-Concentrations to Follow Creeping Viscous Flows During Transient Analysis," *Int. J. Numer. Methods Fluids*, Vol. 6, pp. 749~761.
- (8) Erik Thompson and Smelser, R.E., 1988, "Transient Analysis of Forging Operations by the Pseudo-Concentration Method," *Int. J. Numer. Methods Eng.*, Vol. 25, pp. 177~189.
- (9) Dhatt, G., Gao, D.M. and Ben, Cheikh A., 1990, "A Finite Element Simulation of Metal Flow in Moulds," *Int. J. Numer. Methods Eng.*, Vol. 30, pp. 821~831.
- (10) Chan, K.S., Pericleous, K. and Cross, M., 1991, "Numerical Simulation of Flows Encountered During Mold-Filling," *Appl. Math. Modelling*, Vol. 15, pp. 624~631.
- (11) Wang, K.K., et al., 1986, "Computer-Aided Design and Fabrication of Molding and Computer Control of Injection Molding," *Progress Report No. 11*, Cornell Univ., Ithaca, New York.
- (12) Usmani, A.S., Cross, J.T. and Lewis, R.W., 1992, "A Finite Element Model for the Simulations of Mould Filling in Metal Casting and the Associated Heat Transfer," *Int. J. Numer. Methods Eng.*, Vol. 35, pp. 787~806.
- (13) Wang, S.P. and Wang, K.K., 1994, "A Net inflow Method for Incompressible Viscous Flow with Moving Free Surface," *Int. J. Numer. Methods Fluids*, Vol. 18, pp. 669~694.
- (14) Hirt, C.W., Amsden, A.A. and Cook, J.L., 1974, "An Arbitrary Lagrangian-Eulerian Computing Method for All Flow Speeds," *J. Comput. Phys.*, Vol. 14, pp. 227~253.
- (15) Thomas J.R. Hughes, Wing Kan Liu and Alec Brooks, 1979, "Finite Element Analysis of Incompressible Viscous Flow by the Penalty Function Formulation," *J. Comput. Physics*, Vol. 30, pp.

- 1~60.
- (16) Noboru Kikuchi, 1986, "Finite Element Methods in Mechanics," Cambridge Univ. Press, New York, USA.
- (17) Youngs, D.L., 1982, "Time-Dependent Multi-Material Flow with Large Fluid Distortion," *Numer. Methods for Fluid Dynamics*, pp. 273~285.
- (18) Ashgriz, N. and Poo, J. Y., 1991, "FLAIR: Flux Line-Segment Model for Advection and Interface Reconstruction," *J. Comput. Physics*, Vol. 93, pp. 449~468.
- (19) Mashayek, F. and Ashgriz, N., 1995, "A Hybrid Finite-Element-Volume-of-Fluid Method for Simulation Free Surface Flows and Interfaces," *Int. J. Numer. Methods Fluids*, Vol. 20, pp. 1363~1380.
- (20) Casrey, G.F., Sharma, M. and Wang, K.C., 1988, "A Class of Data Structures for 2-D and 3-D Adaptive Mesh Refinement," *Int. J. Numer. Methods Eng.*, Vol. 26, pp. 2607~2622.
- (21) Martin, J.C. and Moyce, W.J., 1952, "An Experimental Study of the Collapse of Liquid Columns on a Rigid Horizontal Plane," *Philos. Trans. Ser. A, Math. Phys. Sci.*, Vol. 244, pp. 312~324.