

〈논 문〉

## 등제한조건 함수를 이용한 구조물의 호몰로지 설계

이권희\* · 박경진\*\*

(1995년 6월 1일 접수)

### Structural Homology Design Using Equality Constraints

Kwon-Hee Lee and Gyung-Jin Park

**Key Words:** Independent Dof(독립자유도), Dependent Dof(종속자유도), Generalized Inverse Matrix(일반 역행렬), Constraint Matrix(제약행렬)

#### Abstract

The concept of homology design has been devised for the application to large telescope structure by S.V. Hoerner. It is defined that the deformation of a structure shall be called homologous, if a given geometrical relation holds, for a given number of structural points, before, during, and after the deformation. Recently, the need of homology design in the structural design has been increased due to the required precision in the structure. Some researchers have utilized the theory on the structural design with finite element method in the late 1980s. In the present investigation, a simple method using geometrical equality constraints is suggested to gain homologous deformation. The previous method is improved in that the decomposition of FEM equation, which is very expensive, is not necessary. The basic formulations of the homology design with the optimization concept are described and several practical examples are solved to verify the usefulness and validity. Especially, a back-up structure of a satellite antenna is designed by the suggested method. The results are compared with those of existing researches.

#### 1. 서 론

대부분의 구조설계에서는 역학적으로 변형 및 응력 등의 제한조건(constraint)을 만족하면서 구조물의 성능을 극대화시키는 설계 해를 찾아내는데 목적을 두고 있다. 그러나 구조물의 특성상 기하학적 형상이 제한조건으로 존재한다면 설계시 이 조건을 고려하기가 쉽지 않다. 예를 들면, 지구국 위성안테나 또는 대형망원경에서 전파를 반사시켜 주는 역할을 하는 주반사판(main reflector)의 설계가 있다. 주반사판의 설계에서 초점거리를 맞추기 위한

가장 중요한 제한조건은 초기형상인 포물면이 운용 중의 전파효율을 높이기 위해서 하중이 작용한 후에도 변형된 형상이 포물면을 유지해야 한다는 것이다. 이 경우에 하중작용 전후에서 반사판의 기하학적 형상이 포물면을 이루어야 한다는 것이 제한조건으로 설정되어야 한다. 이외에도 기하학적인 제한조건이 존재할 수 있는 경우로는 하중작용 전후에서 평면을 유지해야 하는 정반설계, 하중작용 전후에 이차함수의 기하학적 형상을 유지해야 하는 트러스형 다리구조물 설계, 그리고 하중작용 후에 어떤 특정한 반응치가 산출되도록 하는 지능구조물(intelligent structure) 설계 등이 있다.<sup>(1)</sup>

1967년 Hoerner는 구조물을 구성하는 점들이 변형 전, 변형 중 그리고 변형 후를 걸쳐 요구되는

\*회원, 한양대학교 대학원 기계설계학과

\*\*회원, 한양대학교 기계공학과

기하학적 형상이 유지된다면 이것을 호몰로지 변형이라고 정의하였다.<sup>(2)</sup> 호몰로지 설계란 위의 예와 같이 어떠한 모드의 외력하에서 변형 전, 변형 중, 변형 후를 걸쳐 구조물 전체 또는 그 일부가 지정된 형상을 유지하도록 하는 설계를 의미한다. 그 이후 80년대 말부터 호몰로지 설계에 대해 많은 연구가 진행되고 있는데 이들은 대부분 유한요소법과 연계하여 그 이론을 재구성하였다.<sup>(3-5)</sup> 이 이론은 전체 자유도를 호몰로지 변형의 기하학적인 조건을 만족해야 하는 종속자유도와 만족할 필요가 없는 독립자유도로 분리하여 두 개의 자유도들 사이의 관계를 제약행렬(constraint matrix)로서 정의하였다. 그리고 이 방법은 제약행렬에 의해 유한요소법의 지배방정식을 분할한 후 테일러 급수 전개를 하여 연립방정식을 구성한다. 이 연립방정식은 무어-펜로즈(Moore-Penrose)의 일반 역행렬<sup>(6)</sup>을 이용하여 해를 구하며 설계변수가 수렴할 때까지 설계변화량을 구한다. 그러나 이 방법은 유한요소법에서 강성행렬 및 힘벡터를 분할해야 하는 비효율성이 존재하고 이로 인해 분할된 행렬들은 비대칭이 되어 많은 양의 메모리가 필요하게 된다. 따라서 설계변수에 대한 분할된 행렬 및 변위의 변화량을 구하는데 많은 시간과 비용이 요구된다.

본 연구에서는 독립자유도와 종속자유도의 관계식을 등제조건함수로 취급하여 그 변화량이 계속 등제조건을 만족하도록 하여 설계변수를 찾는 방법을 개발하였다. 이 방법은 기존 연구의 단점인 강성행렬 및 힘벡터의 분할과정이 없고 설계변수에 대한 변위의 변화량만을 계산하면 된다. 그리고 기존의 유한요소 프로그램을 수정하지 않고 이용하므로 알고리즘이 단순화되는 경향이 있다. 따라서 독립자유도와 종속자유도 사이의 관계를 수식적으로 표시할 수 있다면 쉽게 해를 구할 수 있다. 설계변수의 변화량을 구할시 무어-펜로즈의 일반 역행렬을 이용함으로써 설계변수의 초기치로부터 변화가 제일 작은 해를 구할 수 있는 장점을 이용하였다. 설계범위는 변위 및 응력에 대한 부등제한 조건이 없는 경우로 국한시켰다. 개발된 방법의 실용성을 예시하기 위하여 7-bar 구조물 설계문제에 대해서는 기하학적인 제한조건으로서 독립자유도와 종속자유도 사이의 관계가 선형인 경우와 특정한 변위가 발생하도록 하는 해를 구하였다. 그리고 안테나의 백-업 구조물(back-up structure)설계 문제에 대해서는 기하학적인 제한조건이 비선형인

2차 함수인 경우를 예로 들었으며 기존의 연구와 비교, 분석하였다.

## 2. 호몰로지 설계의 소개

호몰로지 설계란 설계자가 구조물의 일부나 구조물 전체의 변형 또는 고유진동수 등을 미리 예측하여 이러한 반응치가 얻어지도록 설계변수를 결정하는 기법이며, 본 연구에서는 변형량을 조절하는 호몰로지 설계에 대한 이론을 개발하였다. 구조물 일부의 변형을 예측하는 경우에는 기하학적인 제약조건이 상수, 선형함수 또는 비선형함수가 가능하다. 유한요소법과 연계한 호몰로지 이론을 간단히 설명하면 다음과 같다. 정적문제에서 계의 지배방정식은 다음 식으로 표시할 수 있다.<sup>(7)</sup>

$$[K]\{U\}=\{f\} \quad (1)$$

여기서,  $[K]$ 는 강성행렬,  $\{U\}$ 는 변위벡터, 그리고  $\{f\}$ 는 외력벡터를 표시한다. 변위  $\{U\}$ 는 호몰로지 변형의 제약을 받는 성분인 종속자유도에 관한 변위  $\{U_d\}$ 와 제약을 받지 않는 성분인 독립자유도에 관한  $\{U_i\}$ 로 분리할 수 있다.

$$\{U\}=\begin{Bmatrix} U_i \\ U_d \end{Bmatrix} \quad (2)$$

변위의 분할에 의하여 그에 대응되는 강성행렬의 요소 및 외력을 분할하면 식 (1)은 다음과 같이 표시할 수 있다.

$$\begin{bmatrix} K_{ii} & K_{id} \\ K_{di} & K_{dd} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_i \\ U_d \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_i \\ f_d \end{Bmatrix} \quad (3)$$

여기서,  $K_{ii}$ ,  $K_{id}$ ,  $K_{di}$ ,  $K_{dd}$ ,  $f_i$ ,  $f_d$ 는  $U_i$ ,  $U_d$ 의 분할에 의해 분리된  $[K]$  및  $\{f\}$ 의 성분이다. 또한 호몰로지 제약을 받는 종속자유도와 독립자유도의 변위에 관한 관계는 제약행렬  $[C]$ 를 도입하여 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$\{U_d\}=[C]\{U_i\} \quad (4)$$

여기서,  $[C]$ 는 문제의 성격에 따라 종속자유도와 독립자유도를 결정한 후 설계자가 작성해 주는 제약행렬이다. 식 (4)를 식 (3)에 대입하면 다음의 두 개의 방정식을 얻을 수 있다.

$$[K_s]\{U_i\}=\{f_i\} \quad (5)$$

$$[K_r]\{U_i\}=\{f_d\} \quad (6)$$

여기서,

$$[K_s] = [K_{ii}] + [K_{ia}][C] \quad (7)$$

$$[K_r] = [K_{ai}] + [K_{aa}][C] \quad (8)$$

식 (5)에서  $[K_s]$ 의 크기는  $N_i$ (독립자유도의 수)  $\times$   $N_i$ 이며 식 (6)에서  $[K_r]$ 의 크기는  $N_a$ (종속자유도의 수)  $\times$   $N_i$ 가 된다. 따라서 임의의 설계치에 대하여 식 (5)는 유일한  $\{U_i\}$ 의 해를 갖고 있지만 그 해가 반드시 식 (6)을 만족시키지 않는다. 식 (6)에서 호몰로지 설계가 구현될 조건은  $[K_r]\{U_i\} - \{f_a\}$ 가 영이 되는 것이지만 일반적으로 초기에는 이것을 만족시키지 않으므로 만족시킬 때까지 설계 변화량을 구하게 된다. 식 (6)에서 각 항을 1차의 테일러 급수 전개하여 대입하고 2차 이상의 항을 무시하면 다음 식과 같이 표시할 수 있다.

$$\sum_{j=1}^M ([K_r'] \{U_i\} + [\overline{K_r}]\{U_i\}) \delta b_j = \{f_a\} - [\overline{K_r}]\{U_i\} \quad (9)$$

여기서,  $M$ 은 설계변수의 수,  $[K_r']$ 는 설계변수의 변화에 따른  $[K_r]$ 의 변화량,  $\{U_i\}$ 는 설계변수의 변화에 따른  $\{U_i\}$ 의 변화량, 그리고  $\delta b_j$ 는 설계변수의 변화량이며, 각 항의 기호  $-$ 는 현재 설계점에서의 값을 의미한다. 식 (9)에서 계수행렬은 정방행렬이 아니고  $N_a \times M$ 의 크기를 가지므로 해는 무수히 많이 존재한다. 그러나 무어-펜로즈의 일반

역행렬을 이용하면 현재 설계점으로부터 설계변수의 변화량의 노름(norm)을 최소로 하는 해를 구할 수 있으며 이에 대한 내용은 다음 장에 수록하였다. 식 (9)에서  $\delta b_j$ 가 구해지면 설계변수는 다음과 같이 대치된다.

$$b_j = b_j + \delta b_j, \quad j=1, \dots, M \quad (10)$$

식 (10)이 수렴조건을 만족하면 호몰로지 설계가 실현된 것이다. 기존의 호몰로지 설계의 전반적인 과정을 Fig. 1에 표시하였다.

### 3. 등제조건 함수를 이용한 호몰로지 설계

앞에서 설명된 유한요소법과 연계한 연구의 특징은 전체 계의 자유도를 독립자유도와 종속자유도로 분리하고 이것들의 관계식인 제약행렬  $[C]$ 를 작성하여 유한요소법의 지배방정식을 분할하였다. 그리고 식 (9)를 무어-펜로즈의 일반 역행렬을 이용하여 구한 것이다. 그러나 이 방법은 식 (3)과 같이 계의 강성행렬 및 힘벡터를 분할해야 한다는 점과 식 (9)에서 분할된 강성행렬 및 변위벡터의 설계변수의 변화에 따른 변화량 구하는데 비효율성이 존재한다. 따라서 호몰로지 설계를 구현하는데 있어 강성행렬 및 힘벡터를 분할하지 않으면서 설계 해를 구하는 것이 필요하다. 본 논문에서는 위의 단점을 해결하기 위해 독립자유도와 종속자유도 사이의 관계식을 등제조건 함수로 설정하여 호몰로지 설계를 실현하는 새로운 알고리즘을 제시하였다. 이 방법을 이용하면 계의 지배방정식을 분할하는 과정이 없으므로 설계변수의 변화에 따른 강성행렬 및 변위벡터의 변화량을 보다 효율적으로 구할 수 있으며 기존의 유한요소 프로그램을 수정하지 않고 이용할 수 있다.

호몰로지 설계는 기하학적인 제약을 받는 절점들의 변위가 함수관계를 갖는 경우와 특정변위를 갖는 경우에 각각 적용할 수 있다.

#### 3.1 절점들의 변위가 함수관계를 갖는 경우

식 (4)의 독립자유도와 종속자유도의 관계로부터 등제한 조건함수,  $h$ 는 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$h = \{U_a\} - [C]\{U_i\} \quad (11)$$

여기서, 제약행렬  $[C]$ 의 크기는  $N_a \times N_i$ 이며 문제

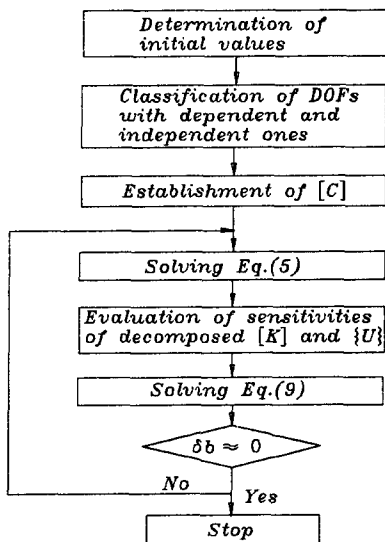


Fig. 1 Flow of the homology design with decomposed FEM equation

의 성질에 따라 선형함수 및 비선형함수가 될 수 있다. 식 (11)은 설계변수의 미소변화 후에도 만족되어야 하는 조건이므로, 다음 식도 역시 성립하게 된다.

$$h + \delta h = 0 \quad (12)$$

식 (11)을 식 (12)에 대입하고 이것을 행렬식으로 바꾸면 다음과 같이 표시할 수 있다.

$$\left( \begin{array}{c} \frac{\partial U_{a1}}{\partial b_1} \dots \frac{\partial U_{a1}}{\partial b_M} \\ \vdots \\ \frac{\partial U_{aN_d}}{\partial b_1} \dots \frac{\partial U_{aN_d}}{\partial b_M} \end{array} \right) - [C] \times \left( \begin{array}{c} \frac{\partial U_{i1}}{\partial b_1} \dots \frac{\partial U_{i1}}{\partial b_M} \\ \vdots \\ \frac{\partial U_{iN_i}}{\partial b_1} \dots \frac{\partial U_{iN_i}}{\partial b_M} \end{array} \right) \delta b = [C]\{U_i\} - \{U_a\} \quad (13)$$

이 식을 간단히 하면 다음과 같이 표시할 수 있다.

$$[A]\delta b = \{F_{res}\} \quad (14)$$

여기서,

$$[A] = \left( \begin{array}{c} \frac{\partial U_{a1}}{\partial b_1} \dots \frac{\partial U_{a1}}{\partial b_M} \\ \vdots \\ \frac{\partial U_{aN_d}}{\partial b_1} \dots \frac{\partial U_{aN_d}}{\partial b_M} \end{array} \right) - [C] \times \left( \begin{array}{c} \frac{\partial U_{i1}}{\partial b_1} \dots \frac{\partial U_{i1}}{\partial b_M} \\ \vdots \\ \frac{\partial U_{iN_i}}{\partial b_1} \dots \frac{\partial U_{iN_i}}{\partial b_M} \end{array} \right) \quad (15)$$

$$\{U_a\} = [U_{a1}, U_{a2}, \dots, U_{aN_d}]^T \quad (16)$$

$$\{U_i\} = [U_{i1}, U_{i2}, \dots, U_{iN_i}]^T \quad (17)$$

$$\{F_{res}\} = [C]\{U_i\} - \{U_a\} \quad (18)$$

식 (15)의 행렬  $[A]$ 는 다음 네 가지 조건을 만족시키는 무어-펜로즈의 일반 역행렬  $[A]^{-}$ 를 갖고 이것은 유일하게 결정된다.<sup>(1,6)</sup>

$$([A][A]^{-})^T = [A][A]^{-} \quad (19)$$

$$([A]^{-}[A])^T = [A]^{-}[A] \quad (20)$$

$$[A][A]^{-}[A] = [A] \quad (21)$$

$$[A]^{-}[A][A]^{-} = [A]^{-} \quad (22)$$

식 (19) 및 (20)은  $[A][A]^{-}$ 와  $[A]^{-}[A]$ 가 대칭행

렬임을 나타내며  $[A]$ 가 정방행렬이고,  $|A| \neq 0$ 이면  $[A]^{-}$ 와  $[A]^{-1}$ 는 일치한다. 식 (14)의 일반해는 일반 역행렬을 이용하여 다음과 같이 표시할 수 있다.

$$\delta b = [A]^{-}\{F_{res}\} + ([I_M] - [A]^{-}[A])\{a\} \quad (23)$$

여기서,  $[I_M]$ 은 크기  $M$ 의 단위행렬,  $\{a\}$ 는 임의의 벡터이다. 식 (23)은  $\{a\}$ 가 임의의 벡터이므로 무한히 많은 해를 가지고 있지만 설계변수 변화량의 노움이 최소가 되는 해는 다음과 같다.

$$\delta b = [A]^{-}\{F_{res}\} \quad (24)$$

즉, 식 (23)으로부터 구해진 식 (24)는 설계변수의 노움이 최소가 되는 해를 구하였으므로 설계변수의 초기치로부터 변화가 제일 작게 되는 해를 구하게 된다. 이것은 부재의 초기형상을 최소한으로 변경하면서 호몰로지 설계를 실현한다는 것을 의미한다. 이에 대한 수학적 증명은 부록에 수록하였다. 식 (15)의 계수행렬  $[A]$ 는 식 (9)와 마찬가지로  $N_a \times M$ 의 크기를 가지므로 식 (14)에서 해가 존재하기 위해서는 다음의 가정이 성립되어야 한다.

$$N_a \leq M \quad (25)$$

식 (15)에서 설계변수의 변화에 대한 변위의 변화량은 비교적 정확하고 알고리즘이 간단한 유한차분법을 이용하여 구하였다. 따라서 본 연구에서는 분할된 강성행렬과 독립자유도의 변위에 대한 민감도를 따로 구할 필요가 없으며 이것들은 전체 변위에 대한 민감도에 포함이 되어 있다. 식 (18)의 외력 벡터  $\{F_{res}\}$ 가 영이 된다면 그 때의 설계변수값이 그 구조물의 호몰로지 변형을 실현하는 해가 되는 것이다. 즉, 식 (23)에서 설계변수의 변화량이 수렴조건을 만족할 때까지 이 과정을 반복하게 된다. 제시된 알고리즘의 전반적인 과정을 Fig. 2에 표시하였다.

### 3.2 절점들의 변위가 특정변위를 갖는 경우

앞에서 제시된 방법을 이용하면 구조물의 일부에서 특정변위가 발생하도록 하는 설계변수를 결정할 수 있다. 설계자가 기대하는 특정변위를  $\{C_0\}$ 라고 하면 이때의 등제조건 함수는 다음과 같이 정의된다.

$$h = \{U_a\} - \{C_0\} \quad (26)$$

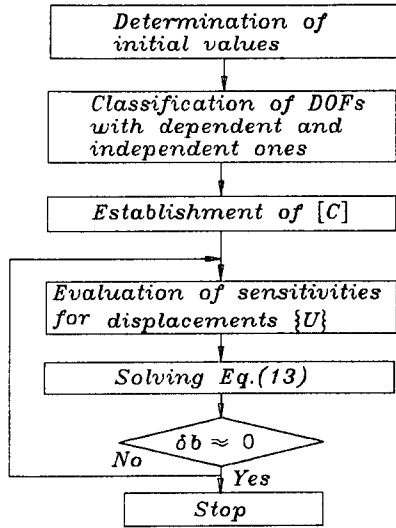


Fig. 2 Flow of the homology design with equality constraints

여기서,

$$\{C_0\} = [C_{01}, C_{02}, \dots, C_{0Nd}]^T \quad (27)$$

설계변수의 미소변화 후에도 식 (26)은 성립해야 하므로 식 (12)를 만족시켜야 한다. 식 (26)을 식 (12)에 대입하고 행렬식으로 정리하면 다음과 같이 표시할 수 있다.

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial U_{a1}}{\partial b_1} & \dots & \frac{\partial U_{a1}}{\partial b_M} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial U_{aNd}}{\partial b_1} & \dots & \frac{\partial U_{aNd}}{\partial b_M} \end{bmatrix} \delta b = \begin{Bmatrix} -(U_{a1} - C_{01}) \\ \vdots \\ -(U_{aNd} - C_{0Nd}) \end{Bmatrix} \quad (28)$$

식 (28)의 계수행렬은  $N_a \times M$ 의 크기를 가지며 절점들의 변위가 함수관계를 갖는 경우와 마찬가지로  $\delta b$ 가 수렴조건을 만족할 때까지 무어-펜로즈의 일반 역행렬을 이용하여 설계변수의 변화량을 구한다.

#### 4. 예제 및 검토

등제한 조건함수를 이용한 호몰로지 설계의 실용성을 예시하기 위하여 호몰로지 기법을 7-bar 설계와 위성안테나의 반사판을 지지하고 있는 백-업 구조물 설계에 적용하였다. 기하학적인 제한조건으로 7-bar 설계에서는 선형함수로, 백-업 구조물 설계에서는 2차 함수로 각각 설정하였다. 제시된 호몰

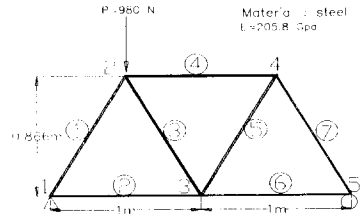


Fig. 3 7-bar structure

로지 설계를 각 문제에 대하여 기존 연구의 해와 비교, 검토하였다. 본 연구에서는 수렴조건으로 다음 식을 이용하였다.

$$\|\delta b\| \leq 1.0 \times 10^{-10} \quad (29)$$

##### 4.1 7-bar 구조물 설계

Fig. 3과 같이 7개의 bar로 구성된 교량형의 트러스 구조물에서 절점 2에 하중 980 N이 수직으로 작용할 때 절점 2와 절점 4, 또는 절점 2, 절점 3과 절점 4에서 동일한 수직변위가 발생하도록 단면적을 결정하는 문제이다. 그리고 절점 2, 절점 3, 절점 4에서 특정한 변위값을 갖도록 하는 각 부재의 단면적을 결정하는 문제이다. 설계변수의 초기 조건 및 수직변위값을 Table 1에 수록하였다. 각 부재의 초기 단면적은 모두  $1 \times 10^{-4} \text{ m}^2$ 이며 절점 2, 절점 3 및 절점 4에 발생하는 수직변위는 각각  $-6.15 \times 10^{-5} \text{ m}$ ,  $-4.76 \times 10^{-5} \text{ m}$ ,  $-2.58 \times 10^{-5} \text{ m}$ 로서 서로 틀린 값을 갖고 있다. 7-bar 구조물의 호몰로지 설계에 대한 예로서 종속자유도 수가 1인 경우 ( $N_a=1$ ), 종속자유도 수가 2인 경우 ( $N_a=2$ ), 그리고 특정한 변위가 발생하도록 하는 경우에 대하여 각각 고찰하였다.

먼저 종속자유도 수가 1인 경우의 문제에서는 절점 2와 절점 4의 수직변위가 동일해야 하는 기하학적 조건이 있다고 가정하면 종속자유도와 독립자유도 사이의 관계를 다음과 같이 표시할 수 있다.

$$\{v_4\} = [0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0] \begin{Bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{Bmatrix} \quad (30)$$

여기서,  $u$ 는 수평방향의 변위,  $v$ 는 수직방향의 변

위, 그리고 첨자는 각 절점을 표시한다. 식 (30)에서 종속자유도는  $u_4$ 로, 나머지 자유도는 독립자유도로 취하였고  $v_2$ 가 구해지면  $u_4$ 는 자동적으로 결정되도록 제약행렬을 구성하였다. 식 (9) 및 식 (24)에 의하여 구한 단면적 및 변위는 Table 2, 3에 표시하였다. Table 2에서 설계변수인 단면적이 본 연구와 기존 연구가 차이를 보이고 있다. 본 연구에서는 식 (15) 및 식 (28)과 같이 유효요소의 지배방정식에서 변위에 대한 민감도를 구한 반면 기존의 연구에서는 식 (9)에서와 같이 분할된 지배방정식의 강성행렬 및 변위에 대한 민감도를 구했기 때문에 나타나는 현상이다. Table 3에서는 초기설계에 서로 틀린 변위를 가졌던 절점 2와 절점 4의 수직변위가 호몰로지 설계의 적용으로  $-6.01 \times 10^{-5}$  m로서 동일하게 발생함을 알 수 있다.

두 번째의 7-bar 설계 문제는 종속자유도 수가 2경우로 절점 2, 절점 3, 그리고 절점 4의 수직 변위가 동일하도록 하는 설계변수를 결정하는 문제이

다. 이 문제에서는 절점 2의 수직변위가 결정되면 절점 3 및 절점 4의 수직변위가 자동적으로 결정되도록 제약행렬을 구성하였다. 절점 2, 3, 4의 수직 변위가 동일하도록 종속자유도와 독립자유도 사이의 관계식은 다음과 같이 구성할 수 있다.

$$\begin{Bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ u_5 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{Bmatrix} \quad (31)$$

식 (31)에서는 종속자유도수가 두 개이므로 식 (30)의 종속자유도에  $v_3$ 가 추가되어  $v_3, v_4$ 를 종속 자유도로, 그리고 나머지 자유도를 독립자유도로 구성하였다. 즉, 이 식에서 제약행렬을 정의함으로써  $v_2=v_3=v_4$ 가 성립되도록 하는 관계식을 설정한

**Table 1** Initial areas and vertical displacements of the 7-bar problem

Element No.	1	2	3	4	5	6	7
Area( $\times 10^{-6}$ m <sup>2</sup> )	100	100	100	100	100	100	100
Node No.	2		3		4		
Ver. disp.( $\times 10^{-5}$ m)	-6.15		-4.76		-2.58		

**Table 2** Design variables of the 7-bar problem ( $N_d=1$ , unit :  $\times 10^{-6}$  m<sup>2</sup>)

Element No.	1	2	3	4	5	6	7
Present study	222.7	137.3	149.9	100.0	147.9	84.4	33.9
Existing study	157.2	115.2	102.2	100.0	102.2	84.9	23.7

**Table 3** Vertical displacements of the 7-bar problem ( $N_d=1$ , unit :  $\times 10^{-5}$  m)

Node No.	2	3	4
Present study	-4.48	-4.88	-4.48
Existing study	-6.01	-6.41	-6.01

**Table 4** Design variables of the 7-bar problem ( $N_d=2$ , unit :  $\times 10^{-6}$  m<sup>2</sup>)

Element No.	1	2	3	4	5	6	7
Present study	224.1	138.2	105.2	125.1	181.5	83.8	32.4
Existing study	161.4	116.1	70.0	146.8	91.9	84.0	21.2

**Table 5** Vertical displacements of the 7-bar problem ( $N_d=2$ , unit :  $\times 10^{-5}$  m)

Node No.	2	3	4
Present study	-4.50	-4.50	-4.50
Existing study	-6.24	-6.24	-6.24

**Table 6** Design variables of the 7-bar problem (specified displacement, unit :  $\times 10^{-6}$  m<sup>2</sup>)

Element No.	1	2	3	4	5	6	7
Present study	346.6	218.5	146.8	183.4	244.8	81.3	50.2
Existing study	489.6	183.4	115.2	194.5	163.6	59.8	48.0

것이다. 호몰로지 설계 적용 후의 단면적 및 수직 변위를 Tables 4, 5에 각각 표시하였다. Table 4에서 본 연구와 기존 연구의 결과가 틀리는 이유는 종속자유도가 1인 경우에서 설명한 내용과 동일하다. Table 5에서 새개의 각 절점이  $-4.50 \times 10^{-5}$  m의 변위가 동일하게 발생하므로 호몰로지 설계가 실현되었음을 알 수 있다. 또한 호몰로지 변형의 제약을 받는 절점은 문제의 성질에 따라 2개 뿐만 아니라 그 이상이 될 수도 있다.

7-bar 설계의 마지막 예는 절점 2, 절점 3, 그리고 절점 4에서 모두 수직방향으로  $-3.0 \times 10^{-5}$  m의 특정 변위가 발생하도록 단면적을 결정하는 문제이다. 이때 절점 2, 절점 3 및 절점 4의 수직변위를 종속자유도로 취급하면 등제한조건 함수인 식 (26)은 다음과 같이 표시할 수 있다.

$$\mathbf{h} = \begin{Bmatrix} v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0.03 \\ -0.03 \\ -0.03 \end{Bmatrix} \quad (32)$$

호몰로지 설계 적용 후, 절점 2~4의 수직변위는 모두  $-3.0 \times 10^{-5}$  m가 산출되었으며 각 설계변수의 최종 단면적을 Table 6에 표시하였다.

#### 4.2 안테나 백-업 구조물설계 문제

Fig. 4는 위성안테나의 반사판을 지지하는 백-업 구조물을 표시하고 있으며 절점 2, 3, 4는 초기에  $y=9.0703 \times 10^{-5} x^2$ 의 포물선 형상을 갖고 있다. 반사판 구조물은 그 특성상 전파효율을 높이기 위해서는 변형 후에도 초점거리를 조절 가능하도록 포물선 형상을 유지하는 것이 중요하다. Fig. 4에서 하중작용 후, 변형된 백-업 구조물은 절점 1,

2, 3, 4에서 포물선 형상을 유지해야만 하며 이 문제에서는 기하학적인 제한조건이 2차 함수의 관계를 갖고 있다. Fig. 5는 변형 전의 포물선 형상과 변형 후의 포물선 형상을 표시하고 있다. Fig. 4 및 5에서 백-업 구조물은 허브(hub) 구조물에 의해 지지되고 있는데 허브 구조물은 백-업 구조물에 비해 상대적으로 매우 큰 강성을 갖고 있으므로 경계 조건으로서 그 연결 부위의 자유도를 구속시켰다.

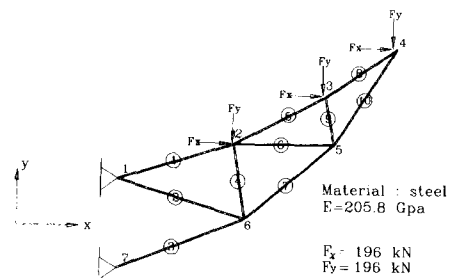
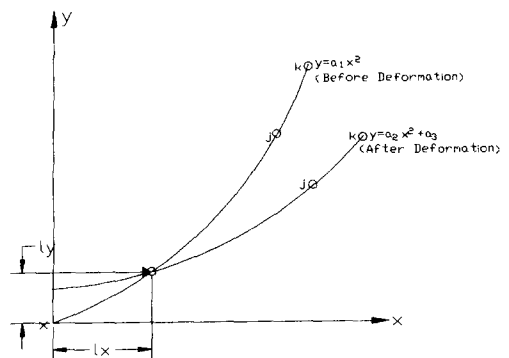
**Fig. 4** Back-up structure of antenna**Fig. 5** Configuration of parabola

Fig. 5에서 초기의 포물선 방정식은  $y=a_1x^2$ 이며, 변형 후의 포물선 방정식은  $y=a_2x^2+a_3$ 로 표시된다.<sup>(8,9)</sup>

여기서,  $a_1$ 은 초기 포물선 방정식의 2차항 계수로써 기지의 값이며,  $a_2, a_3$ 는 호몰로지 설계과정 중에 결정되어야 하는 상수이다. Fig. 5에서 변형 후의 포물선은 고정점을 지나가게 되므로 상수  $a_3$ 는  $l_y - a_1l_x^2$ 으로 대체되어  $a_2$ 를 구하는 문제로 귀결된다. 본 연구에서는 변형 후에 최외곽에 위치한 절점  $k$ 를 기준으로 상수  $a_2$ 를 결정하여 나머지 임의의 절점  $j$ 에 대해서도 같은 포물선에 위치하도록 하였다. 절점  $k$ 는 변형 후에도 포물선을 유지해야 하므로 다음 식을 만족해야 한다.

$$y_k + v_k - l_y = a_2[(x_k + u_k)^2 - l_x^2] \quad (33)$$

여기서,  $x_k, y_k$ 는 절점  $k$ 의 좌표를  $u_k, v_k$ 는 절점  $k$ 의  $x$  및  $y$ 방향의 변위를  $l_x, l_y$ 는 고정점의 좌표를 표시한다. 변형 후에도 절점  $j$ 가 절점  $k$ 와 동일한 포물선 상에 위치하기 위해서는 임의의 절점  $j$ 에 대하여 다음 식이 성립하여야 한다.

$$y_j + v_j - l_y = a_2[(x_j + u_j)^2 - l_x^2] \quad (34)$$

여기서,  $x_j, y_j$ 는 절점  $j$ 의 좌표를  $u_j, v_j$ 는 절점  $j$ 의  $x$  및  $y$ 방향의 변위를 표시한다. 식 (33)과 식 (34)에서  $a_2$ 는 일치해야 하므로 이 조건을 이용하고 변위에 대한 2차 이상을 무시하면 독립자유도와 종속자유도의 관계는 다음과 같이 표시된다.

$$v_j = \frac{1}{x_k^2 - l_x^2} \left\{ \begin{matrix} u_j \\ u_k \\ v_k \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} 2x_j(y_k - l_y) - 2x_k(l_y - y_j)(x_j^2 - l_x^2) \\ + x_j^2(y_k - l_y) - x_k^2(y_j - l_y) + l_x^2(y_j - y_k) \end{matrix} \right\} \quad (35)$$

여기서, 절점  $j$ 의  $y$ 방향 변위는 종속자유도로, 그 나머지 자유도들은 독립자유도로 취급하였다.

호몰로지 설계의 기하학적 제한조건이 이차함수인 경우에는 제약행렬의 작성시 2차 이상의 변위항을 무시하였기 때문에 호몰로지 설계 후에 변형된

절점의 곡선은 산출된 곡선의 방정식에 대입된 좌표값과 정확히 일치하지 않는다. 예를 들면, 안테나 백-업 구조물의 설계에서 호몰로지 설계 후에 산출된 곡선  $y=a_2x^2+a_3$ 에 변형 후의  $x$ 좌표를 대입하면 그 때의  $y$ 좌표와 변형 후의  $y$ 좌표는 일치하지 않고 오차를 갖게 된다. 따라서 호몰로지 설계의 적용 후에 구조물이 어느 정도 호몰로지 설계가 구현되었는지를 판단할 수 있는 지수가 필요하다. 본 연구에서는 호몰로지 지수 HI를 다음과 같이 정의하였다.

$$HI = \text{Max}_{1 < i < n} |\epsilon_i| \quad (36)$$

여기서,

$$\epsilon_i = \frac{\text{참값} - \text{근사값}}{\text{참값}} \times 100(\%) \quad (37)$$

$n$ 은 호몰로지 제약을 받는 절점의 수, 참값은 곡선의 방정식으로부터 구한  $y$ 좌표값, 근사값은 호몰로지 설계 후의 변형된  $y$ 좌표값을 의미한다. 따라서 기하학적인 제한조건이 2차 함수인 경우의 호몰로지 지수는 영에 근접할수록 호몰로지 설계가 보다 잘 구현된 것이다.

식 (35)의 종속자유도와 독립자유도 사이의 관계를 이용하여 해를 구하면 설계변수의 값은 Table 7과 같고 변형 전후의 포물선상 좌표값을 Table 8에 표시하였다. Table 8의 좌표값에 의하여 등제조건 함수를 이용한 포물선의 방정식  $y=7.614 \times 10^{-5}x^2+16.057$ 과 기존의 방법을 이용한 포물선의 방정식  $y=7.578 \times 10^{-5}x^2+16.448$ 은 절점 4를 기준으로 구해진 것이다. 본 연구에 의한 절점 2와 절점 3의  $y$ 좌표 오차는 0.288%, 0.150%이며 기존 연구의 오차는 0.311%, 0.160%으로서 본 연구와 기존의 연구는 각각 0.288과 0.311의 호몰로지 지수를 가지므로 본 연구에 의한 방법이 더욱 좋은 정도를 보이고 있다. 이와 같이 오차를 보이는 이유는 식 (35)에서 종속자유도와 독립자유도 사이의

Table 7 Design variables of the back-up structure (unit :  $\times 10^{-6} \text{ m}^2$ )

Element No.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Initial value	774	564	774	564	774	564	774	774	564	774
Present study	786	449	707	551	981	321	798	982	512	1072
Existing study	794	422	709	547	881	279	805	894	476	946



**Table 8** Coordinates of the back-up structure(unit :  $\times 10^{-3}$  m)

Node No.	1	2	3	4(x,y)
Initial value	(1050,100)	(2338.5,496)	(3373.1,1032)	(4167.1,1575)
Present study	(1050,100)	(2368.5,442)	(3440.6,916)	(4274.1,1407)
Existing study	(1050,100)	(2368.9,440)	(3442.3,913)	(4277.1,1402)

**Table 9** Numerical performance of two methods

Problem type	Design type	Iteration	Norm
7-bar( $N_d=1$ )	Present study	10	161
	Existing study	6	98
7-bar( $N_d=2$ )	Present study	12	170
	Existing study	7	117
7-bar(specified disp.)	Present study	13	328
	Existing study	39	420
Back-up structure	Present study	6	505
	Existing study	6	413

관계식을 구할 때 2차 이상의 자유도를 무시하였기 때문에 나타나는 현상이다.

Table 9에서는 기존 방법과 등제한조건을 이용한 방법에 대하여 각각 수렴되기까지의 반복수 및 초기치와 최종해와의 노름을 비교하였다. 7-bar 문제에서 종속자유도가 1, 2인 경우에 기존 방법이 보다 빨리 수렴하고 있으나 특정변위가 발생하도록 하는 문제에서는 본 연구에서 제시된 방법이 더 우수함을 보이고 있다. 또한 안테나의 백-업 구조물 설계에서는 수렴수 및 노름이 비슷한 양상을 보이고 있다. 이러한 결과는 호몰로지 설계를 구현하기 위해 구성된 연립방정식의 형태가 기존 연구에서는 식 (9)로, 본 연구에서는 식 (14) 및 식 (28)로 다르게 표현되기 때문이다. 따라서 어느 한 방법이 수치적으로 우수한 결과를 보이리라 단정할 수 없다.

## 5. 결 론

본 논문에서는 등제한 조건함수를 이용한 호몰로지 설계법을 제시하였으며 다음과 같은 결론을 얻었다.

(1) 하중작용 전후에 특정한 기하학적 형상이 요구되는 구조물에서 제한조건에 영향을 받는 종속자유도와 영향을 받지않는 독립자유도 사이의 관계식인 제약행렬만 구성되면 쉽게 해를 찾을 수 있는 호몰로지 설계법을 개발하였다. 그리고 기존연구에서 사용된 강성행렬의 지배방정식의 분할과정을 제약행렬을 포함한 등제한 조건함수를 이용함으로써 유한요소 프로그램을 수정할 필요가 없도록 알고리즘을 단순화시켰으며 메모리를 절약할 수 있는 장점을 얻었다.

(2) 개발된 알고리즘은 유한요소의 지배방정식을 분할하지 않고 그대로 이용하였으므로 해석시 또는 다른 설계법과 연계될 경우, 각 설계 단계에서 설계변수에 대한 반응치의 민감도를 그대로 이용할 수 있는 장점을 갖고 있다.

(3) 안테나의 백-업 구조물 설계에서는 종속자유도와 독립자유도가 2차 함수의 관계를 제약행렬을 이용하여 구성하고 실제 적용 가능한 설계 해를 제시하였으며 호몰로지 설계가 어느 정도 구현되었는지를 검토할 수 있는 호몰로지지수를 이용하였다. 그리고 현재의 호몰로지 설계기법으로 해결되지 않는 다음 사항들에 대해 계속 연구가 진행되어야 할

것이다.

(1) 기존의 호몰로지 설계에서는 최적설계의 목적함수로 설정되는 중량 최소화 등을 고려할 수 없으므로 최적설계 알고리즘과 결합된다면 보다 경제적인 설계를 실현할 수 있는 방법이 개발될 수 있다.

(2) 개발된 알고리즘으로는 구조물이 하중작용 전후에서 특정한 변위를 갖도록 하는 호몰로지 설계만이 가능하지만 항후과제로서 구조물이 예측된 고유진동수를 갖도록 하는 호몰로지 설계법의 개발에 대한 연구가 필요하다.

Wiley & Sons, Inc., New York, pp. 19~27.

(7) Logan, D. L., 1992, *A First Course in the Finite Element Method*, PWS-KENT Publishing Company, Boston, pp. 71~74.

(8) 심진욱, 1993, "대형 안테나 구조 설계에서 HOMOLOGY설계법의 적용에 관한 연구," 석사 학위논문, 한양대학교.

(9) 이권희, 심진욱, 박경진, 1995, "등제한 조건 함수를 이용한 구조물의 Homology 설계," 대한 기계학회 춘계학술대회논문집 (I), pp. 432~435.

### 참고문헌

(1) 半谷裕彦, 川口健一, 1991, 形態解析, 培風館, pp. 57~66.

(2) Hoerner, S. V., 1967, "Homologous Deformations of Tilttable Telescopes," *Proceedings of the ASCE, Journal of the Structural Division*, Vol. 93, pp. 461~485.

(3) Nakagiri, S., Yoshikawa, N. and Niwa, T., 1992, "A Note on Finite Element Synthesis of Structures(Part 7)—Formulation of Homologous Vibration Mode—," *SEISAN-KENKYU, Institute of Industrial Science, Univ. of Tokyo*, Vol. 44, No. 9, pp. 449~452.

(4) 半谷裕彦, 夫富玲, 1989, "ホモロガス變形を制約條件とする立體トラス構造の形態解析," 日本建築學會構造系論文報告集, 第405號, pp. 97~101.

(5) 吉川, 中桐滋, 1992, "ホモロジ變形を實現する構造決定," 東京大學生産技術研究所.

(6) Rao, C. R. and Mitra, S. K., 1971, *Generalized Inverse of Matrices and its Applications*, John

### 부 록

식 (19)~(22)를 만족하는  $[A]^{-1}$ 를 무어-페로즈의 역행렬이라 정의하며, 그 일반해는 식 (23)과 같다. 이때,  $[A]^{-1}\{F_{res}\}$ 와  $([I_M]-[A]^{-1}[A])\{a\}$ 가 서로 직교한다면 다음과 같이 가정할 수 있다.

$$([I_M]-[A]^{-1}[A])\{a\}, [A]^{-1}\{F_{res}\}=0 \quad (A1)$$

식 (A1)은 다음과 같이 고쳐 쓸 수 있다.

$$([I_M]-[A]^{-1}[A])\{a\}^T \cdot [A]^{-1}\{F_{res}\} \quad (A2)$$

$$=\{a\}^T([I_M]-[A]^{-1}[A])^T[A]^{-1}\{F_{res}\} \quad (A3)$$

$$=\{a\}^T([A]^{-1}-[A]^{-1}[A][A]^{-1})\{F_{res}\} \quad (A4)$$

식 (A4)는 식 (22)에 의하여 영이 되므로 (A1)의 가정은 성립된다. 따라서 위의 결과로부터 식 (23)의 일반해에서 해의 첫번째 및 두번째 항은 다음과 같은 관계를 갖고 있다.

$$\|[A]^{-1}\{F_{res}\}\| \leq \|([I_M]-[A]^{-1}[A])\{a\}\| \quad (A5)$$

따라서  $[A]^{-1}\{F_{res}\}$ 는 일반해에서 설계변수의 변화량이 최소가 되는 해이다.