

〈논 문〉

## 전최소자승법을 이용한 강인한 모드매개변수 규명법

정의봉\* · 김준엽\*\* · 김 현\*\*\*

(1995년 4월 3일 접수)

### Robust Modal Parameter Identification Using Total Least Square Method

Weui-Bong Jeong, Jun-Yeop Kim and Hyun Kim

**Key Words:** Total Least Square Method(전최소자승법), Experimental Modal Analysis(실험모드해석), Robustness(강인성), Identification(규명)

#### Abstract

The least square estimation is used frequently in experimental modal analysis technique to eliminate noise signals. However, identified modal parameters are sometimes inaccurate, since the least square estimation is sensitive to noise. In this paper, a new total least square estimation, which is robust to noise signals, is developed and applied to experimental modal analysis technique such as Prony method and Circle Fit method. Several simulated results show that the proposed method is robuster to noise than conventional method.

#### 1. 서 론

구조물의 고유진동수, 고유모드, 모드감쇠비 등의 모드특성을 실험적으로 규명하는 방법인 실험모드해석<sup>(1-3)</sup>은 널리 이용되고 있다. 실험모드해석기법 중에는 진동시험시 혼입되는 잡음신호를 제거하기 위하여 최소자승법<sup>(4)</sup>을 이용하는 경우가 많다. 그러나 최소자승법은 우변에만 잡음이 있고 좌변에는 잡음이 없는 경우에 한정되므로 양변 모두에 잡음이 있는 경우 잡음이 증가하면 해가 불안정하여지며 따라서 모드특성도 정확히 규명되지 않는 경우가 많다.

Yoshimura<sup>(5)</sup>는 최소자승법의 문제점을 개선하기 위하여 Golub<sup>(6)</sup>가 제안한 고유벡터를 이용하는 TLS(Total Least Square)법을 실험모드해석의 하나인 Prony법<sup>(1)</sup>과 Vold법<sup>(7)</sup> 적용하여 잡음에 대한

강인성을 보였다. 그러나 고유벡터를 이용하는 TLS법은 모든 실험데이터에 혼입되는 잡음의 분산 정도가 모두 같은 경우에 한정하여 적용가능하여 분산정도가 서로 다른 경우에는 최적의 해를 구하기가 어려운 단점이 있다.

본 연구에서는 잡음의 분산정도를 임의로 선정할 수 있는 통계학 이론<sup>(8)</sup>에 근거를 둔 반복계산 TLS법을 개발한다. 그리고 실험모드해석기법 중 시간영역기법인 Prony법과 주파수영역기법인 Circle Fit법에 기존의 최소자승법, Yoshimura<sup>(5)</sup>의 고유벡터이용 TLS법과 제안하는 TLS법을 적용한다. 그리고 규명된 모드특성의 잡음에 대한 강인성(robustness)을 시뮬레이션으로 비교한다.

이산계인 1, 2자유도 모델과 연속계인 보모델에 응용한 결과, 제안하는 방법이 잡음에 대하여 기존의 방법들 보다 강인함을 보였다.

#### 2. 모드해석에서 최소자승법의 문제점

실험모드해석에서 모드매개변수의 규명을 위하여

\*회원, 부산대학교 정밀기계공학과 및 기계기술연구소

\*\*회원, 국방과학연구소 환경실험실

\*\*\*LG전자(주) 생활시스템연구소

널리 사용되는 최소자승법은 실험데이터로부터 구성되는  $n \times m$  ( $n > m$ ) 행렬  $[X]$ 와  $n \times 1$  벡터  $\{Y\}$ 가 다음식

$$[X]\{A\} = \{Y\} + \{e\} \quad (1)$$

을 만족해야 할 때 오차행렬의 Norm인  $\{e\}^T\{e\}$ 를 최소화하는 미지수  $\{A\}$ 를 구하는 것으로 최소자승법의 해는

$$\{A\} = ([X]^T[X])^{-1}[X]^T\{Y\} \quad (2)$$

로 주어진다. 최소자승법은 행렬  $[X]$ 에 잡음이 없고 벡터  $\{Y\}$ 에만 잡음이 포함되어 있다고 가정하는 경우의 최적해이다. 그러나 실험모드해석법 중의 많은 방법들은 행렬  $[X]$ 와 벡터  $\{Y\}$ 가 모두 실험데이터로부터 구성되며, 이와 같은 경우 최소자승법에 의한 해  $\{A\}$ 는 최적의 해라고 할 수 없다. 이와 같은 최소자승법의 문제점을 개선하기 위해서는 행렬  $[X]$ 와 벡터  $\{Y\}$  모두에 잡음이 함유되어 있다고 가정하여 식 (1)을

$$[X+E]\{A\} = \{Y\} + \{e\} \quad (3)$$

와 같이 수정하여 좌, 우변의 잡음을 동시에 고려하는 TLS(Total Least Square)법이 필요하다. Yoshimura<sup>(5)</sup>는 실험모드해석법의 하나인 Prony법<sup>(1)</sup>에 고유벡터를 이용한 TLS법<sup>(6)</sup>을 응용하였으며 계산방법은 다음과 같다. 즉,  $n \times (m+1)$  행렬  $[C]$ 를 아래와 같이 두고

$$[C] = [X, Y] \quad (4)$$

$[C]^T[C]$ 의 가장 작은 고유치에 대응하는 고유벡터를  $\{\phi_{m+1}\}$ 이라 하면  $[X]$ ,  $\{Y\}$ 에 포함되어 있는 잡음을 동시에 고려하는 다음과 같은 오차 Norm

$$\begin{aligned} \lambda &= \|e\|^2 + \|E\|^2 \\ &= \sum_{i=1}^n e_i^2 + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m E_{ij}^2 \end{aligned} \quad (5)$$

을 최소화하는 TLS법의 해는 다음식

$$\begin{Bmatrix} A \\ -1 \end{Bmatrix} = \alpha \{\phi_{m+1}\} \quad (6)$$

의  $\{A\}$ 부분이 된다. 여기서,  $\alpha$ 는 고유벡터  $\{\phi_{m+1}\}$ 의 끝성분이  $-1$ 이 되도록 정규화하기 위한 상수이다. 그러나 Yoshimura의 TLS법은  $[X]$ ,  $\{Y\}$ 에 함유되어 있는 잡음의 분산정도가 1:1인 경우에만 적용가능하여 분산정도가 서로 다를 경우에는 최적의 해를 구하기가 어렵다. 예를 들어 분산정도가

1:1인 Prony법에서는 고유벡터를 이용하는 TLS법을 적용할 수 있지만 1자유도법으로 널리 사용되고 있는 Circle Fit법의 경우에는  $[X]$ ,  $\{Y\}$ 에 함유되어 있는 잡음의 분산정도가 서로 상이하여 고유벡터를 이용하는 TLS법만으로는 유용한 해를 얻기가 어렵다. 그러므로  $[X]$ ,  $\{Y\}$ 의 잡음의 분산정도를 임의로 선정할 수 있는 방법의 개발이 필요하다.

### 3. 제안방법

다음과 같은 선형 연립방정식의 해를 구하는 문제를 고려한다.

$$\begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} & \cdots & X_{1m} \\ X_{21} & X_{22} & \cdots & X_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ X_{n1} & X_{n2} & \cdots & X_{nm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix} \simeq \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_n \end{bmatrix} \quad (7)$$

좌변의  $X_{ij}$  ( $i=1, \dots, n, j=1, \dots, m$ )와 우변의  $Y_i$  ( $i=1, \dots, n$ )는 모두 실험데이터로부터 구성된다고 가정하자. 그리고  $X_{ij}$  및  $Y_i$ 는 모평균이  $x_{ij}$ ,  $y_i$  이고 모분산이  $\sigma_{x_{ij}}^2$  및  $\sigma_{y_i}^2$ 라 하자. Maximum Likelihood Estimation에 의하면 최적의 추정치  $x_{ij}$ ,  $y_i$  및  $a_j$ 는 다음의 제약조건식

$$f_i = y_i - \sum_{j=1}^m x_{ij} a_j = 0, \quad i=1, \dots, n \quad (8)$$

을 만족하면서 다음의 추정오차 평가식

$$\sum_{i=1}^n \left\{ \left( \sum_{j=1}^m \frac{(X_{ij} - x_{ij})^2}{2\sigma_{x_{ij}}^2} \right) + \frac{(Y_i - y_i)^2}{2\sigma_{y_i}^2} \right\} \quad (9)$$

을 최소화하여야 한다. 제약조건이 있는 최적화 문제를 제약조건이 없는 최적화문제로 변환시키기 위하여 Lagrange 승수  $\lambda_i$ 를 이용하면 목적함수를 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned} S &= \sum_{i=1}^n \left\{ \left( \sum_{j=1}^m \frac{(X_{ij} - x_{ij})^2}{2\sigma_{x_{ij}}^2} \right) + \frac{(Y_i - y_i)^2}{2\sigma_{y_i}^2} \right. \\ &\quad \left. - \lambda_i (y_i - \sum_{j=1}^m x_{ij} a_j) \right\} \end{aligned} \quad (10)$$

목적함수  $S$ 를  $x_{ij}$ ,  $y_i$  및  $a_j$ 로 미분하여 0으로 놓으면

$$-\frac{\partial S}{\partial x_{ij}} = \frac{X_{ij} - x_{ij}}{\sigma_{x_{ij}}^2} - \lambda_i a_j = 0 \quad (11)$$

$$-\frac{\partial S}{\partial y_i} = \frac{Y_i - y_i}{\sigma_{y_i}^2} + \lambda_i = 0 \quad (12)$$

$$\frac{\partial S}{\partial a_j} = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_{ij} = 0 \quad (13)$$

$$i=1, \dots, n, \quad j=1, \dots, m$$

와 같이 되며 연립방정식의 해가 최적의 추정치가 된다. 비선형 연립방정식이므로 다음과 같이 반복 계산을 수행한다. 식 (11)과 식 (12)의  $x_{ij}$ ,  $y_i$  대신에  $x_{ij} + \delta x_{ij}$ ,  $y_i + \delta y_i$ 를 대입하여 풀면

$$\delta x_{ij} = -\lambda_i \sigma_{x_{ij}}^2 a_j + X_{ij} - x_{ij} \quad (14)$$

$$\delta y_i = -\lambda_i \sigma_{y_i}^2 + Y_i - y_i \quad (15)$$

을 얻고, 식 (8)에 대입하여 Taylor 전개식의 1차 항까지 고려하면

$$f_i + \frac{\partial f_i}{\partial y_i} \delta y_i + \sum_{j=1}^m \left( \frac{\partial f_i}{\partial x_{ij}} \delta x_{ij} + \frac{\partial f_i}{\partial a_j} \delta a_j \right) = f_i + \delta y_i - \sum_{j=1}^m a_j \delta x_{ij} - \sum_{j=1}^m x_{ij} \delta a_j = 0 \quad (16)$$

를 얻는다. 식 (14)와 식 (15)를 식 (16)에 대입하면  $\lambda_i$ 는 다음과 같이 구해진다.

$$\lambda_i = w_i \left[ \sum_{j=1}^m x_{ij} \delta a_j - f_i - (Y_i - y_i) + \sum_{j=1}^m (X_{ij} - x_{ij}) a_j \right], \quad i=1, \dots, n \quad (17)$$

단,

$$w_i = \frac{1}{\sum_{j=1}^m (\sigma_{x_{ij}}^2 a_j^2) + \sigma_{y_i}^2}$$

식 (17)을 식 (13)에 대입하면 다음과 같은 연립방정식을 얻는다.

$$\sum_{k=1}^m a_{kj} \delta a_j = \beta_k, \quad k=1, \dots, n, \quad j=1, \dots, m \quad (18)$$

단,

$$a_{kj} = \sum_{i=1}^n w_i x_{ik} x_{ij}$$

$$\beta_k = \sum_{i=1}^n w_i \left[ f_i + (Y_i - y_i) - \sum_{j=1}^m (X_{ij} - x_{ij}) a_j \right]$$

식 (18)의 선형 연립방정식으로부터  $\delta a_j (j=1, \dots, m)$ 를 구하면, 식 (17)에서  $\lambda_i (i=1, \dots, n)$ 를 구하고 식 (14)와 식 (15)에서  $\delta x_{ij}$ ,  $\delta y_i (i=1, \dots, n, j=1, \dots, m)$ 를 구할 수 있다. 개선된 추정치는

$$\begin{aligned} (x_{ij})_{\text{new}} &= (x_{ij})_{\text{old}} + \delta x_{ij} \\ (y_i)_{\text{new}} &= (y_i)_{\text{old}} + \delta y_i \end{aligned} \quad (19)$$

$$(a_j)_{\text{new}} = (a_j)_{\text{old}} + \delta a_j$$

로 된다. 위 과정을 수렴할 때까지 반복계산하면

최적의 추정치  $\delta a_j (j=1, \dots, m)$ 를 구할 수 있다.

## 4. 응용 예

### 4.1 Prony법예의 응용

실험모드해석법으로 널리 사용되고 있는 Prony 법에 TLS법을 적용시켜 잡음에 대한 추정방법의 강인성을 조사한다. Prony법은 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} h(t_0) & h(t_1) & \dots & h(t_{2n-1}) \\ h(t_1) & h(t_2) & \dots & h(t_{2n}) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ h(t_l) & h(t_{l+1}) & \dots & h(t_{2n+l-1}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{2n-1} \end{bmatrix} \approx - \begin{bmatrix} h(t_{2n}) \\ h(t_{2n+1}) \\ \vdots \\ h(t_{2n+l}) \end{bmatrix} \quad (20)$$

여기서,  $h(t_i)$ 는 단위 충격응답함수의 시각  $t=t_i$ 에서의 값을 의미한다.  $n$ 은 채택한 모드의 수이며  $l (l > n)$ 은 데이터 세트의 수를 의미한다. 식 (20)의 최소자승법의 해  $a_i (i=0, \dots, 2n-1)$ 가 구해지면  $r$ 차 모드감쇠비  $\sigma_r$ 와  $r$ 차 감쇠 고유진동수  $\omega_{ar}$ 은

$$e^{(-\sigma_r T \pm j\omega_{ar} T)} = R_r + jI_r$$

로부터 구해진다. 여기서  $R_r + jI_r$ 은 다항식

$$\sum_{i=0}^{2n} a_i x^i = 0$$

의 근이고  $T$ 는 샘플링 간격이다.

2자유도 모델과 보의 유한요소 모델에 대하여 가상데이터를 구성하고, 식 (20)의 해를 기존의 최소자승법과 본 연구에서 제안하는 TLS법으로 구하여, 추정된 모드매개변수의 잡음에 대한 강인성을 조사했다. Fig. 1 및 Table 1과 같은 2자유도 진동

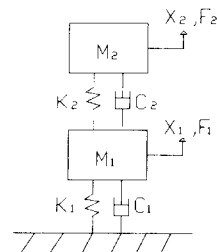


Fig. 1 2-DOF model

**Table 1** System parameters

Parameter	Values
$M_1$ (kg)	10
$M_2$ (kg)	5
$K_1$ (N/m)	$3 \times 10^3$
$K_2$ (N/m)	$1 \times 10^3$
$C_1$ (N · s/m)	15
$C_2$ (N · s/m)	5

모델(감쇠 고유진동수 1.79 Hz, 3.46 Hz)에 대해 단위 충격응답함수를 0.04초 간격으로 400개의 데이터를 얻었으며 그 중 100개의 데이터 세트를 이용했다. Fig. 2는 임펄스응답 신호에 잡음을 혼입

시킨 정도에 따른 모드매개변수들의 추정오차를 나타낸다. 여기서,  $\Delta$ 는 기존의 최소자승법을 이용한 경우이고,  $\square$ 는 TLS법을 이용한 경우이다. TLS법이 최소자승법보다 잡음에 훨씬 강인함을 알 수 있다. 사용된 잡음은 난수발생기로부터 평균이 0이고, 표준편차가 다음의 잡음수준

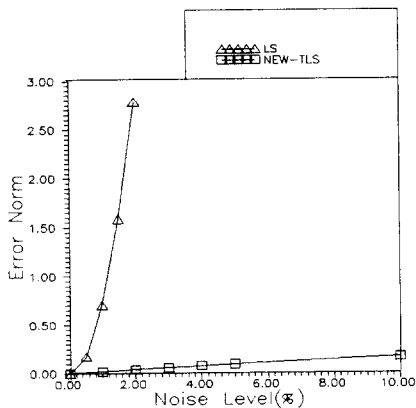
$$\text{잡음수준}(\%) = \frac{\text{잡음 표준편차}}{\text{신호 표준편차}}$$

이 되는 정규분포를 갖도록 만들어졌다. 규명된 모드매개변수의 추정오차는

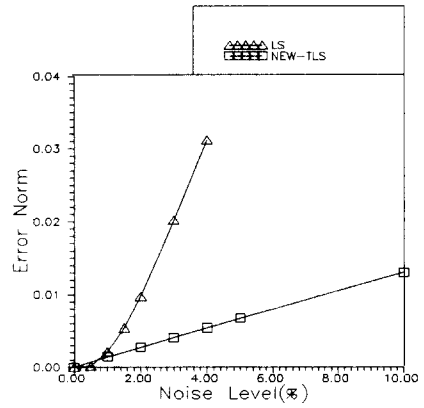
$$\text{추정오차}(\%) = \frac{\text{추정값} - \text{참값}}{\text{참값}}$$

로 정의하였다.

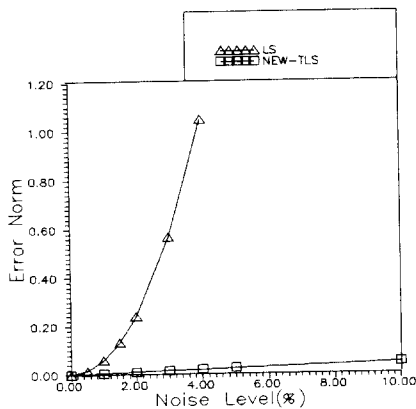
외팔보에 대한 FEM의 모델링과 입력값들은 Fig. 3과 Table 2에 표시되어 있다. FEM에 의한 외팔보의 해석결과로부터 응답점(1-20)의 주파수응



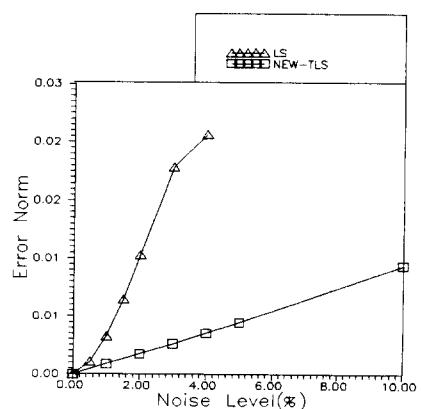
(a) Error norm of  $\sigma_1$



(c) Error norm of  $\omega_{d1}$



(b) Error norm of  $\sigma_2$



(d) Error norm of  $\omega_{d2}$

**Fig. 2** Comparison of robustness of identified modal parameters of 2-DOF model with respect to the noise level

답함수를 구하여 그것을 각각 역 Fourier 변환하여 충격응답함수를  $0.4886 \times 10^{-3}$  초 간격으로 2048개의 데이터를 얻어 400개의 데이터 세트를 이용한다. Fig. 4는 잡음을 혼입시켰을 때 대표적인 모드형태

Table 2 Beam parameters

Input parameter	Value
Element numbers	20
Total Length(m)	0.4
Height (m)	$0.4 \times 10^{-2}$
Width (m)	$0.4 \times 10^{-1}$
Young's Modulus(Pa)	$9.0 \times 10^{10}$
Density(kg/m <sup>3</sup> )	7143
Exciting point	Node 20
Response point	Node(1-20)
Boundary condition	Clamped-free

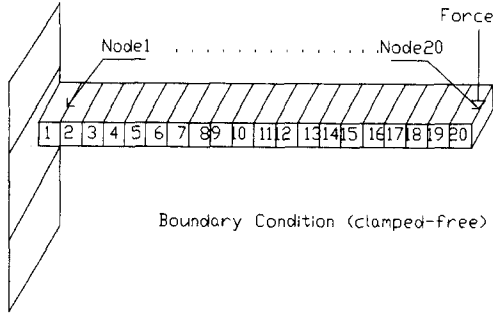


Fig. 3 Finite element model of beam

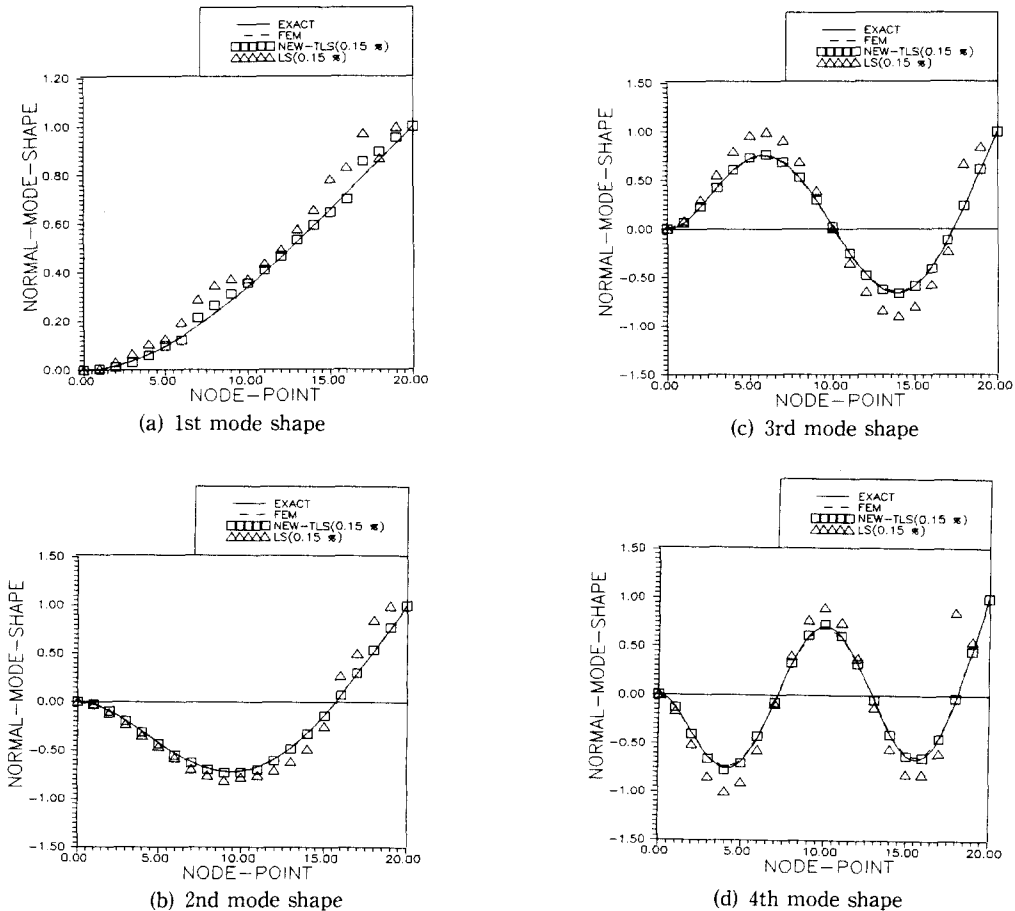


Fig. 4 Comparison of robustness of identified mode shape of cantilever beam with 0.15% noise level

를 서로 비교한 것이다. TLS법을 이용한 경우가 기존의 최소자승법보다 노이즈에 강인함을 알 수 있다.

4.2 Circle Fit법에의 응용

Circle Fit법은 주파수응답함수의 Nyquist 선도가 원으로 표현됨을 이용하여 실험데이터를 가장 잘 표현하는 원의 방정식  $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ 의 계수  $a, b, c$ 를 구하는 방법이다. Circle Fit에서 계수  $a, b, c$ 의 계산식은

$$\begin{bmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n & y_n & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a \\ b \\ c \end{Bmatrix} \approx - \begin{Bmatrix} x_1^2 + y_1^2 \\ x_2^2 + y_2^2 \\ \vdots \\ x_n^2 + y_n^2 \end{Bmatrix} \quad (21)$$

이다. 여기서  $x_i, y_i$ 는 주파수응답함수의 진동수  $\omega_i$ 에서의 실수부와 허수부이며,  $n$ 은 관심주파수의 수이다. 위에서 구해진  $a, b, c$ 는 모드매개변수를 직접 구하는데 사용되므로 정확한 추정이 필요하다. 따라서 식 (21)의 해를 기존의 최소자승법, Yoshimura의 고유벡터이용 TLS법, 제안하는 TLS법으로 해를 구하고 모드매개변수를 규명하여 잡음에 대한 강인성을 조사한다.

질량  $m_1=10$  kg, 감쇠  $c_2=15$  N · s/m, 강성  $k_1=3000$  N/m 인 Fig. 5과 같은 1자유도계의 Compliance(변위/힘)를 0 Hz부터 5 Hz까지 0.1 Hz 간격으로 총 51개의 시뮬레이션 데이터를 만들었다. 그리고 정규분포하는 가상의 잡음을 주파수응답함수의 실수부와 허수부에 독립되게 혼입시켰다. 사용된 잡음수준은

$$\text{잡음수준}(\%) = \frac{\text{잡음 표준편차}}{\text{Compliance}} \text{ 평균크기}$$

로 정의하였다. 추정결과를 Fig. 6에 나타낸다. 최소자승법과 고유벡터이용 TLS법에 의하여 규명된 모드특성치가 잡음수준의 증가에 대해 비슷한 정도로 불안정함을 보여준다. 이것은 식 (21)의 좌우변의 데이터의 크기의 비가 다름에도 불구하고 고유벡터 이용 TLS법은 좌, 우변의 노이즈의 분산정도가 1:1로 고정되어 있기 때문이다. 그러나 제안하는 TLS법은 좌, 우변의 잡음의 분산정도를 데이터의 크기에 비례하게 이용하기 때문에 최소자승법과 고유벡터이용 TLS법보다 잡음에 강인한 결과를 보여준다.

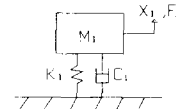
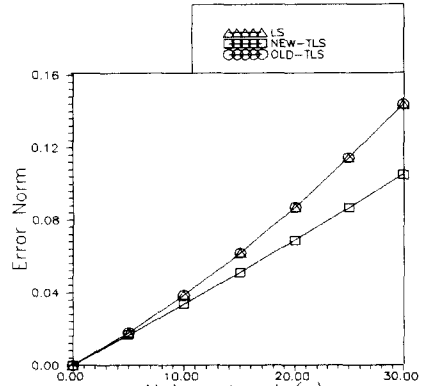
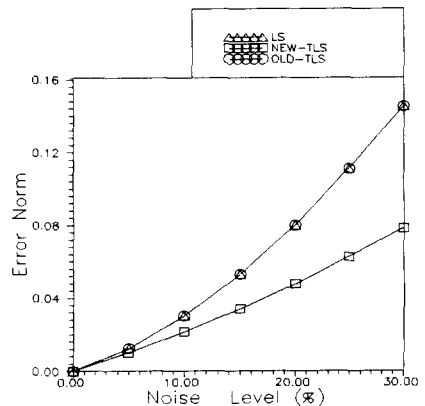


Fig. 5 1-DOF model



(a) Damping ratio,  $\zeta$



(b) Residue

Fig. 6 Comparison of robustness of identified modal parameters with respect to noise level

5. 결 론

- (1) 모드매개변수를 규명하기 위하여 최소자승법을 이용시 잡음에 대한 문제점을 제시하였다.
- (2) 모드매개변수 규명법에 전최소자승법을 이용하는 방안을 제시하였다.
- (3) 시뮬레이션으로 시간영역법인 Prony법과 주파수영역법인 Circle Fit법에 적용한 결과, 제안하는 방법이 기존의 방법보다 노이즈에 강인하였다.

참고문헌

- (1) 長松昭男, 1985, 모드解析, 培風館.
- (2) Ewins D. J., 1986, *Modal Testing : Theory and Practice*, B & K Ltd.
- (3) Jeong W. B. and Nagamatsu A., 1992, "A New Method for Poly-reference Identification of Modal Parameters in Modal Testing," *Proc. 10th IMAC*, pp. 153~158.
- (4) 中川徹, 小柳義夫, 1986, 最小二乘法による實  
驗データ解析, 東京大學出版會.
- (5) 吉村卓也, 1988, "モード解析による動特性の同定," 博士學位論文 東京工業大學.
- (6) Golub G. H. and Van Loan C. F., 1980, "An Analysis of the Total Least Square Problem," *SIAM J.*, Vol. 17, No. 6, pp. 883~893.
- (7) Vold H., Kundrat J., Rocklin G. T. and Russel R., 1982, "A Multi-Input Modal Estimation Algorithm for Mini-Computers," *SAE Paper, No. 820194*.
- (8) 栗屋隆, 1985, データ解析, 學會出版センター.