

〈논 문〉

강도를 고려한 원통형 복합재료 구조물의 최적설계

김창완* · 황운봉* · 박현철* · 신대식** · 박의동**

(1994년 9월 30일 접수)

Optimal Design of Cylindrically Laminated Composite Shells for Strength

C.W. Kim, W. Hwang, H.C. Park, D.S. Shin and E.D. Park

Key Words : Optimal Design(최적설계), Stacking Sequence(적층순서), Design Sensitivity(설계 민감도), State Space Method(상태공간법), Failure Index(파단지수)

Abstract

An optimization procedure is proposed for the design of cylindrically laminated composite shell having midplane symmetry and subjected to axial force, torsion and internal pressure. Tsai-Wu and Tsai-Hill failure criteria are taken as objective functions. The stacking sequence represents the design variable. The optimal design formulation based on state space method is adopted and solution procedure is described with the emphasis on the method of calculations of the design sensitivities. A gradient projection algorithm is employed for the optimization process. Numerical results are presented for the several test problems.

1. 서 론

높은 비강도, 비강성 등의 우수한 기계적인 성질을 지닌 섬유강화 복합재료는 경량화가 요구되는 구조물에 대한 응용이 점차 확대되고 있는 추세이다. 최근에는 평판형태의 구조물 뿐만 아니라 항공기의 기체, 압력용기, 모터케이스, 파이프 등과 같은 쉘형태의 구조물에 대해서도 응용이 증가되고 있고 우주항공 구조물에까지 다양하게 이용되고 있다. 이러한 쉘형태의 섬유강화 복합재료 구조물은 경제성이나 안전성을 고려하는 공학적인 측면에서도 매우 효율적인 것으로 알려져 있다. 이에 따라 쉘형태 복합재료 구조물의 거동해석에 관한 연구는 많이 이루어져 왔고⁽¹⁻⁵⁾ 특히 제조면에서도 용이한 원통형 쉘형태의 압력용기에 대한 많은 실험이 수행되었다.⁽⁶⁻¹⁰⁾ 그러나 설계자의 요구에 합당한 특성을 갖추기 위한 복합재 구조물의 최적설

계에 대한 연구는 미비한 실정이다.

복합재료 구조물의 효과적인 사용을 위한 복합재료의 최적설계는 여러해 동안 연구의 대상이 되어 왔다. 하지만 복합재료에 대한 최적설계의 응용은 기하학적인 형태가 평판인 경우가 대다수이고 쉘 구조물에 대한 최적설계의 연구결과는 미비한 실정이다. 복합재 평판의 경우도 초기에는 중량을 목적함수로 하고 두께를 설계변수로 하여 최적화를 수행한 경우가 대부분이고^(11,12) 최근에는 변형에너지를 기준으로 하여 적층두께나 적층각도를 결정하고자 하는 연구가 시도되었다.⁽¹³⁻¹⁵⁾ 반면에 일반적인 설계 관점에서 강성(stiffness)과 더불어 강도(strength)는 반드시 고려되어야 할 특성⁽¹⁶⁾이나 강도를 고려한 복합재 최적설계 연구결과는 미비하다.⁽¹⁷⁻²²⁾ 복합재료 쉘구조의 경우 Chao 등⁽²³⁾은 대칭으로 적층된 원통형 쉘이 가장 강한 강도를 지니는 섬유 방향을 찾되 강도의 측면에서 최적화를 수행하였는데 모든 층을 고려하지 않고 바깥쪽 층만을 고려하였다. Tauchert⁽²⁴⁾는 원통형 압력용기의 변형에너지를 최소화하고자 섬유부피분율을 설계변수로

*회원, 포항공과대학교 기계공학과

**국방과학연구소

설정하였는데 섬유밀도를 각 층마다 다르게 분포시켜 제조하는 것은 매우 비현실적이다. 이들 대부분의 해석이 얇은 복합재료 셸에 대한 해석을 수행한 반면 Roy와 Tsai⁽¹⁾는 두꺼운 압력용기에 대해 탄성해를 구하고 파괴압력(burst pressure)이 가장 큰 적층각도를 구하였다. Hu와 Wang⁽²⁵⁾은 원통형 복합재료 셸이 원공을 지닌 경우와 없는 경우에 대해 각각 복합재료 셸의 좌굴하중을 최대로 하는 최적적층각도를 계산하였다. 그리고 원통형 셸형태인 필라멘트 와인딩 압력용기의 최적적층각도를 구하는데 널리 사용하는 방법으로는 netting analysis가 있는데 이는 모든 힘이 섬유에만 작용한다는 가정하에 얻어진 결과이고 기지의 역할을 무시함으로 인한 무리가 따른다.

한편 최적설계는 최적화 알고리즘의 우수성 뿐만 아니라 최적화를 위한 정보인 설계민감도의 해석 또한 중요하다.^(26~28) 등방성 재료의 최적설계 분야에서는 민감도 해석에 주안점을 둔 많은 연구가 진행되어 왔으나 아직 복합재료 최적화 연구에서는 미비한 실정이다

본 논문에서는 설계에 보다 유용한 데이터를 얻고자 최적설계 기준으로 강도를 이용하였고 적층각도를 설계변수로 두었다. 최적설계 문제 수식은 상태공간법(state space method)을 이용하였으며 보조변수법(adjoint variable method)을 통해 설계민감도를 계산함으로써 최적화 과정에서 정확한 설계민감도 계산에 주안점을 두었다. 최적화 방법으로는 구배투영법을 이용하였다.⁽²⁷⁾

2. 원통형 복합재료 셸 해석

원통형 복합재료 셸은 일정한 두께를 가진 층이 대칭으로 적층되었다고 가정하였다. 고전적층판 이론(classical lamination theory)과 같은 가정을 이용하여 얇은 두께를 지닌 원통형 복합재료 셸에 대한 변형률과 응력을 계산하였다. Fig. 1은 원통형 셸의 기하학적인 형상과 단면을 나타내며 Fig. 2는 셸의 해석시에 사용한 원통좌표계(x, θ, z)를 나타낸다. 여기서, R은 반지름을 나타낸다. 첨자 'o'는 가운데 평면(mid-plane)에서의 거동을 나타낸다.

임의의 방향으로 적층된 복합재료 적층판의 경우 Fig. 3과 같은 적층판 축을 기준으로 한 해석과정은 다음과 같다. 해석과정은 3장에서 민감도 해석을 위해 수식화 할 상태방정식(state equation)으

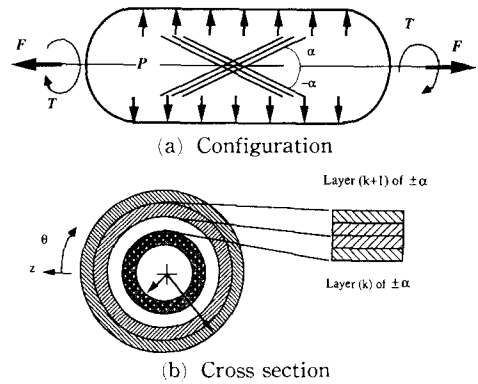


Fig. 1 Configuration of cylindrical composite shell and cross section

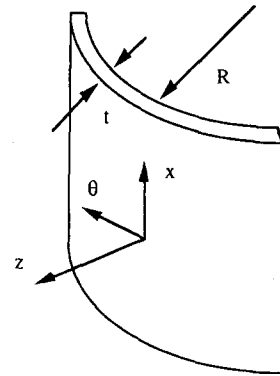


Fig. 2 Cylindrical coordinate

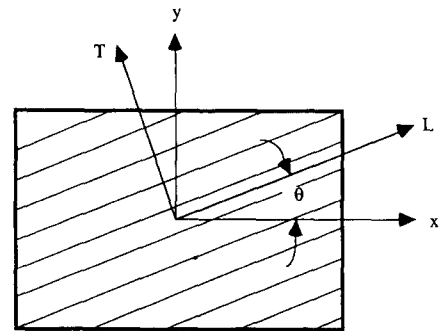


Fig. 3 Principal material axes oriented at angle θ with reference coordinated axes

로 또한 이용된다. 변환하기 전의 좌표축과 변환된 후의 좌표축이 이루는 방향코사인을 이용하여 변환된 강성(transformed stiffness matrix) \bar{Q} 를 다음 식과 같이 나타낼 수 있다

$$\bar{Q} = Q_{11}\cos^4\theta + Q_{22}\sin^4\theta + 2(Q_{12} + 2Q_{66})\sin^2\theta\cos^2\theta$$

$$\begin{aligned}
 \bar{Q}_{22} &= Q_{11}\sin^4\theta + Q_{22}\cos^4\theta \\
 &\quad + 2(Q_{12} + 2Q_{66})\sin^2\theta\cos^2\theta \\
 \bar{Q}_{12} &= (Q_{11} + Q_{22} - 4Q_{66})\sin^2\theta\cos^2\theta \\
 &\quad + Q_{12}(\cos^4\theta + \sin^4\theta) \\
 \bar{Q}_{16} &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66})\cos^3\theta\sin\theta \\
 &\quad - (Q_{22} - Q_{12} - 2Q_{66})\cos\theta\sin^3\theta \\
 \bar{Q}_{26} &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66})\cos\theta\sin^3\theta \\
 &\quad - (Q_{22} - Q_{12} - 2Q_{66})\cos^3\theta\sin\theta \\
 \bar{Q}_{66} &= (Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12} - 2Q_{66})\sin^2\theta\cos^2\theta \\
 &\quad + Q_{66}(\cos^4\theta + \sin^4\theta)
 \end{aligned} \tag{1}$$

식 (1)을 구성방정식인 후크의 법칙(Hooke's law)에 적용함으로써 다음과 같이 평면 응력하에서 임의의 (k) 층에 대한 응력을 구할 수 있다.

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_\theta \\ \tau_{x\theta} \end{bmatrix}^{(k)} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}^{(k)} \begin{bmatrix} \varepsilon_x^o + z\chi_x \\ \varepsilon_\theta^o + z\chi_\theta \\ \gamma_{x\theta}^o + z\chi_{x\theta} \end{bmatrix} \tag{2}$$

식 (2)에 합력(resultant force)의 정의를 이용함으로써 다음과 같이 구성방정식을 표현할 수 있다.

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_\theta \\ N_{x\theta} \\ M_x \\ M_\theta \\ M_{x\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} & B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{66} \\ B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} & D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} & D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x^o \\ \varepsilon_\theta^o \\ \gamma_{x\theta}^o \\ \chi_x \\ \chi_\theta \\ \chi_{x\theta} \end{bmatrix} \tag{3}$$

여기서, 인장강성(extensional stiffness) A , 커플링 강성(coupling stiffness) B , 굽힘강성(bending stiffness) D 는 다음과 같이 정의된다. t 는 적층판의 두께이다. 본 논문에서는 대칭으로 적층된 복합재료 적층판을 고려하였으므로 B 는 영(zero)이 된다.

$$\begin{aligned}
 A_{ij} &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \bar{Q}_{ij}^{(k)} dz \\
 B_{ij} &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \bar{Q}_{ij}^{(k)} z dz \\
 D_{ij} &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \bar{Q}_{ij}^{(k)} z^2 dz
 \end{aligned} \tag{4}$$

작용하는 합력 $N_x, N_{x\theta}$ 는 일정하다고 가정하고 곡률을 무시할 경우⁽³⁾ 구성방정식인 식 (3)은 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\begin{bmatrix} \varepsilon^o \\ M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^* & B^* \\ B^{*T} & D^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N \\ \chi \end{bmatrix} \tag{5}$$

여기서, A^*, B^* 및 D^* 는 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
 A^* &= A^{-1} \\
 B^* &= -A^{-1}B \\
 D^* &= D - BA^{-1}B
 \end{aligned} \tag{6}$$

내압 p 와 축력 F 에 의해 발생하는 합력은 다음과 같다.

$$N_x = \frac{pR}{2} - \frac{F}{2\pi R} \tag{7}$$

$$N_\theta = pR \tag{8}$$

힘의 평형관계를 이용해 비틀림모멘트를 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned}
 T &= 2\pi R(RN_{x\theta} + M_{x\theta}) \\
 &= 2\pi R(RN_{x\theta} - B_{16}^*N_x - B_{26}^*Rp)
 \end{aligned} \tag{9}$$

또는

$$N_{x\theta} = K_1N_x + K_2Rp + K_3T \tag{10}$$

여기서,

$$\begin{aligned}
 K_1 &= \frac{B_{16}^*}{R} \\
 K_2 &= \frac{B_{26}^*}{R} \\
 K_3 &= \frac{1}{2\pi R^2}
 \end{aligned} \tag{11}$$

식 (7)과 식 (10)을 변형된 구성방정식 (5)에 대입하면 다음과 같은 변형률의 관계를 얻을 수 있다. 본 논문에서는 B 행렬이 영이 되므로 K_1 과 K_2 도 영이 된다.

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_x^o &= (A_{11}^* + A_{16}^*K_1)N_x + (A_{12}^* + A_{16}^*K_2)Rp \\
 &\quad + A_{16}^*K_3T \\
 \varepsilon_\theta^o &= (A_{12}^* + A_{26}^*K_1)N_x + (A_{22}^* + A_{26}^*K_2)Rp \\
 &\quad + A_{26}^*K_3T \\
 \gamma_{x\theta}^o &= (A_{16}^* + A_{66}^*K_1)N_x + (A_{26}^*A_{66}^*K_2)Rp \\
 &\quad + A_{66}^*K_3T
 \end{aligned} \tag{12}$$

식 (12)의 변형률을 Hooke의 법칙에 적용하면 다음과 같이 임의의 (k) 번째 층에 대한 응력을 계산할 수 있다.

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_\theta \\ \tau_{x\theta} \end{bmatrix}^{(k)} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}^{(k)} \begin{bmatrix} \varepsilon_x^o \\ \varepsilon_\theta^o \\ \gamma_{x\theta}^o \end{bmatrix} \tag{13}$$

3. 최적설계 문제 구성

3.1 설계민감도

최적화 과정은 매 계산마다 목적함수 및 구속조

견식의 미분값인 설계민감도의 계산을 반드시 필요로 한다. 다음 단계에서 사용될 탐색방향의 민감도 해석은 해의 정확성 및 효율성에도 중요한 영향을 미친다. 민감도해석은 해석적인 방법으로 정확한 값을 얻을 수 있으나 대부분의 실제 공학문제에서 간단히 구하기 어려우므로 이용이 간편한 유한차분법을 많이 사용하고 있다. 하지만 유한차분법은 계산량이 극도로 많으며 절단오차(truncation error)와 끝처리오차(round off error)를 발생시킨다. 따라서 본 연구에서는 유한차분법대신 상태공간법을 이용하여 최적설계 문제를 수식화한 후 정의한 상태방정식과 보조변수법을 이용하여 설계민감도를 구하였다.⁽²⁷⁾ 상태공간법에서는 변수를 설계변수 b 와 상태변수 z 로 구분하여 정의하는데, 설계변수는 설계자에 의해 결정되어지며 상태변수는 설계시스템의 지배방정식으로부터 결정되고 시스템의 거동을 나타내며 설계변수의 함수이다.

본 연구에서는 2절에서 유도한 원통형 복합재료 쉘의 응력을 구하는 일련의 과정인 식 (1), 식 (4), 식 (6), 식 (12) 및 식 (13)을 상태방정식으로 설정하였고 그때 구해지는 각각의 변수들을 상태변수로 두었다. 즉 변환된 강성(transformed stiffness matrix) \bar{Q} , 인장강성(extensional stiffness matrix) A , 역인장강성(inverted extensional stiffness matrix) A^{-1} , 변형률 ϵ , 응력 σ 가 상태변수가 되며 적층각도 θ 는 설계변수이다. 아래에 상태방정식을 정리하였고, 이는 설계민감도 계산에 이용된다.

$$\begin{aligned} h_1 &= \{\bar{Q}\} - f(\theta) = 0 \\ h_2 &= \{A\} - f(\bar{Q}) = 0 \\ h_3 &= \{A^{-1}\} - f(A) = 0 \\ h_4 &= \{\epsilon^o\} - f(A^{-1}) = 0 \\ h_5 &= \{\sigma\} - f(\bar{Q}, \epsilon^o) = 0 \end{aligned} \quad (14)$$

일반적으로 임의의 함수 $\Psi_i (i=0, 1, \dots, \beta)$ 의 설계민감도는 식 (15)의 l^i 이며 상태방정식 식 (14)와 식 (16)의 보조변수 λ^i 를 정의하여 식 (17)과 같이 표현할 수 있다.⁽²⁷⁾

$$\delta \Psi_i = l^{iT} \delta b \quad (15)$$

$$J^T \lambda^i = \frac{\partial \Psi_i^T}{\partial z} \quad (16)$$

여기서, J 는 자코비안 행렬을 나타내고 $J = \frac{\partial h}{\partial z}$ [z^o, b^o]로 정의된다. 계산된 설계민감도 벡터 l^i 는 (z^o, b^o)에서 다음과 같다.

$$l^i = \frac{\partial \Psi_i^T}{\partial b} - \frac{\partial h^T}{\partial b} \lambda^i \quad (17)$$

3.2 최적설계 문제 구성

원통형 복합재료 쉘 형태의 구조물이 내압이나 인장 또는 비틀림하중을 받을 때 최대의 강도를 가질 수 있도록 최적섬유의 방향을 결정하고자 최적화 문제를 수식화하였다. 즉, 파단 판정식의 파괴지수를 최소화하고자 설계변수로는 적층각도를 택하였다.⁽³²⁾ 그 밖에 환경변수를 찾는 문제를 구속조건에 포함시켰다. 일반적으로 환경변수를 찾는 문제가 어려운 문제임에도 불구하고 본 문제에서 목적함수로 설정한 파괴지수의 최대치는 Fig. 4와 같이 적층판의 각 층간에서 응력의 불연속 분포와 함께 파괴지수 또한 불연속으로 발생하므로 최대 파괴지수인 환경변수를 쉽게 결정할 수 있다. 환경변수를 결정하고자 Min-Max 문제로 수식할 수 있으며 이를 일반적으로 나타내면 다음과 같다.⁽²⁷⁾

Minimize Maximum $F(\sigma_1, \sigma_2, \tau_{12})$

$$t_{min} < \alpha < t_{max}$$

with the state equation $h(z, b, \alpha) = 0$ (18)

위 식을 인위변수 $b(j+1)$ 을 도입하여 다음과 같이 문제를 수식화할 수 있다.

Minimize $\Psi_0 = b(j+1)$

subject to $\Psi_1 = \text{Maximum } F(\sigma_1, \sigma_2, \tau_{12}) - b(j+1) < 0$

with the state equation $h(z, b, \alpha) = 0$ (19)

여기서, $F(\sigma_1, \sigma_2, \tau_{12})$ 는 파단판정식이며 앞에서 기술한바와 같이 Tsai-Hill이론⁽²⁹⁾과 Tsai-Wu 이론⁽³⁰⁾을 이용하였다.

$$F = \frac{\sigma_1^2}{X^2} - \frac{\sigma_1 \sigma_2}{X^2} + \frac{\sigma_2^2}{Y^2} + \frac{\tau_{12}^2}{S^2} \quad (20a)$$

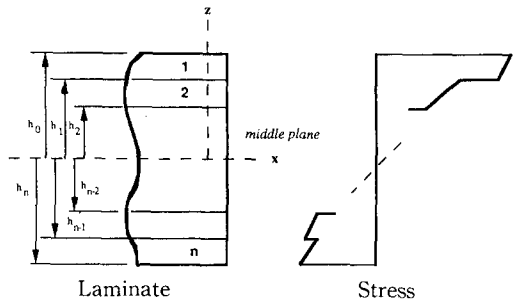


Fig. 4 Environmental parameter

$$F = \left(\frac{1}{X} - \frac{1}{X'}\right)\sigma_1 + \left(\frac{1}{Y} - \frac{1}{Y'}\right)\sigma_2 + \frac{\sigma_1^2}{XX'} + \frac{\sigma_2^2}{YY'} + \frac{\tau_{12}^2}{S^2} - \frac{\sigma_1\sigma_2}{2\sqrt{XX'YY'}} \quad (20b)$$

3.3 Tsai-Wu 이론의 문제점⁽³³⁾

Fig. 5는 angle ply laminate의 적층각도의 변화에 따른 섬유방향 및 섬유직각방향의 응력을 나타내고 있으며 Fig. 6은 계산된 응력을 바탕으로 한 파괴지수 값을 보여준다. 이때 파괴지수의 값이 음의 값이 발생하는 것을 볼 수 있고 이러한 값의 존재범위는 하중상태에 따라 다르다. Tsai-Wu 이론을 적용했을 때 이처럼 물리적인 의미를 부여할 수 없는 파괴지수 값이 (음의 값) 나타나는 경우가 발생한다.^(20,33) 이는 특히 단순 인장하중이나 전단하중이 작용할때 angle ply laminate에서 쉽게 고찰

할 수 있다. 식 (20b)를 살펴보면 대부분 항의 값은 양의 값이다. 그러나 두번째 항에서 일반적인 대다수의 재료가 $Y < Y'$ 이므로 $F_2 = (1/Y - 1/Y')$ 는 항상 양이지만 횡방향의 응력성분이 음의 값이 발생할 경우에 이 전체 항은 음의 값이 되며, 이는 전체 파괴지수 값의 부호가 음의 값이 되게 하는데 결정적인 영향을 미치는 항이 된다. 예를 들어 angle ply laminate에 대해 $N_x = 100$ MN/mm인 하중상태에 대한 최적설계를 수행하면 가장 작은 파괴지수 값이 나오는 각도는 20.080°이다. 이때의 파괴지수는 음의 값이고 수학적으로는 최적각도이다. 하지만 물리적인 의미에서 단순 인장시에는 0°가 가장 강도가 큰 방향이므로 Tsai-Wu 이론에 대한 새로운 개선이 필요하다. 본 논문에서는 파괴지수 값이 음의 값이 나오는 것을 피하고자 섬유직각 방향의 인장 및 압축강도 값을 동일하게 두고서 ($Y = Y' = 40$ MPa) 계산을 수행하였다.

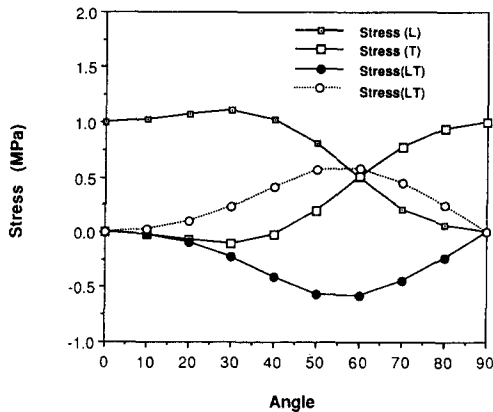


Fig. 5 Stresses of angle ply laminated plate with increasing angle. $[+\theta/-\theta]_s$ laminate, $N_x = 0.5$ MN/mm

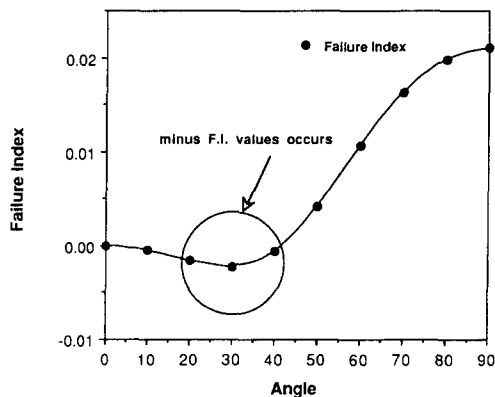


Fig. 6 Failure index of Tsai-Wu failure criterion ($Y \neq Y'$). $[+\theta/-\theta]_s$ laminate, $N_x = 0.5$ MN/mm

4. 최적설계 결과 및 검토

4.1 설계민감도 해석

수치해석에 사용한 재료는 Table 1과 같은 물성치를 지닌 CFRP T300/5208이다. 그리고 안쪽 반지름(R_i)은 100 mm이다. 식 (19)에서 목적함수로 설정한 인위변수인 $(j+1)$ 번째 설계변수에 대해서

Table 1 Material property (T300/5208)

CFRP T300/N5208	
Elastic moduli (GPa)	
E_L	181.0
E_T	10.30
E_{LT}	7.17
Poisson's ratio (ν_{LT})	0.28
Layer thickness	0.125 mm
Strength (MPa)	
X	1500
X'	1500
Y	40
Y'	246
S	68

Table 2 Accuracy of design sensitivity ($\|\delta b\|=0.001^\circ$, $[45/-45]_{2S}$, $p=10$ MPa)

i	b_i	l_i^*	$\tau_i^{(f)}$	$\tau_i^{(b)}$	$\tau_i^{(c)}$
1	45	-70.2377	-70.2375	-70.2380	-70.2377
2	-45	55.5797	55.5794	55.5800	55.5797
3	45	-44.8316	-44.8324	-44.8307	-44.8316
4	-45	55.5797	55.5794	55.5800	55.5797
5		-1.0000	-1.0000	-1.0000	-1.0000

$\tau_i^{(f)}$: Forward finite difference scheme

$\tau_i^{(c)}$: Central finite difference scheme

$\tau_i^{(b)}$: Backward finite difference scheme

l_i^* : Adjoint variable method

Table 3 Variation of design sensitivity with finite difference scheme and step size

D(i=1)	l_i^*	$\tau_i^{(f)}$	$\tau_i^{(b)}$	$\tau_i^{(c)}$
10^{-1}		-70.21047	-70.26358	-70.23703
10^{-2}		-70.23512	-70.24043	-70.23777
10^{-3}		-70.23752	-70.23805	-70.23778
10^{-4}		-70.23776	-70.23781	-70.23778
10^{-5}	-70.23778	-70.23778	-70.23778	-70.23778
10^{-6}		-70.23781	-70.23781	-70.23781
10^{-7}		-70.23775	-70.23775	-70.23775
10^{-8}		-70.23888	-70.23890	-70.23889
10^{-9}		-70.24456	-70.24476	-70.24466
10^{-10}		-70.47295	-70.47498	-70.47397

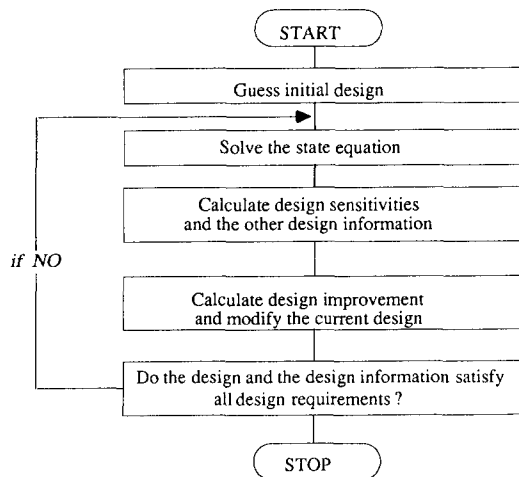


Fig. 7 Flow chart of optimization process

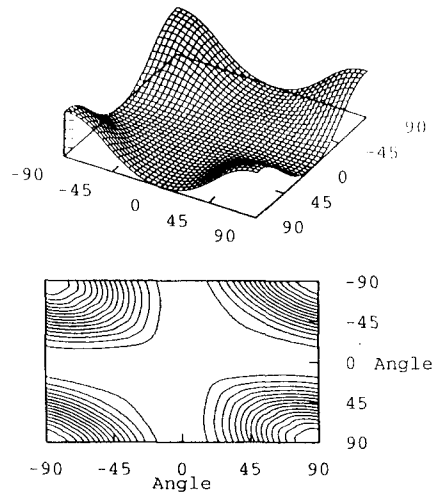


Fig. 8 Surface and contours of cost function tension (N_x) only

는 설계민감도는 1이고, 다른 설계변수에 대해서는 항상 영이 된다. 환경변수를 설정하기 위한 구속조건도 ($j+1$)번째 설계변수에 대해서는 항상 -1의 값을 갖으며 나머지 설계변수에 대한 설계민감도의 계산은 식 (14)에서 정의한 상태방정식과 상태변수, 그리고 식 (16)의 보조방정식을 이용하여 설계민감도를 구할 수 있다. 설계민감도의 계산결과를 검증하고자 유한차분법을 이용하여 $[-45/45]_{2s}$ 인 적층판이 내압($p=10$ MPa)을 받고 있을 때 가장 바깥층 가운데 부분에서의 각 설계변수에 대한 구속조건의 설계민감도를 Table 2에 나타내었고 보조변수법을 이용해 구한 결과와 비교하였다. 이때 Tsai-Hill 이론을 목적함수로 이용하였고 유한차분법의 증가크기 $\|\delta b\|$ 는 0.001이다. Table 2의 결과를 통해 정확하게 민감도가 해석되었음을 알 수 있다. Table 3에서는 유한차분법의 증가크기(step size)를 다양하게 하여 계산함으로써 설계민감도 값의 변화와 설계민감도 해석에 대한 신뢰를 고찰하였다. 세가지 방법의 유한차분법 모두 폭 넓은 범위에서 믿을만한 설계민감도를 구하였지만 문제의 비선형성, 수치오차 등으로 어떤 증가범위 구간

에서는 아주 큰 수치오차가 발생하기도 하였다. 그리고 세가지 방법중에서 중앙 유한차분법(central finite difference method)이 훨씬 넓은 범위의 증가크기에서 정확한 값을 제시하여 오차를 훨씬 줄일 수 있었다.

4.2 최적설계 결과

Tsai-Wu 이론과 Tsai-Hill 이론을 각각 목적함수로 이용하여 다양한 하중조건하에 최적 적층 각도를 구하였다. 상태방정식을 통한 정확한 설계민감도의 계산 후 최적화 기법을 통한 최적화 과정을 Fig. 7에 나타내었다.

다음은 섬유 직각방향의 인장 및 압축강도를 동일하게 두고서 Tsai-Wu 이론을 이용하였을때 계산을 수행한 결과에 대해 나타내었다. 이때 n개의 적층판일 경우 하나의 층에 대해 양 끝단을 모두 고려하여 2n개의 파괴지수를 고려하고, 이들을 비교하여 최대 파괴지수를 설정한 후 목적함수로 취하였다.

-Tsai-Wu 이론을 이용하는 경우($Y=Y'$)

(가) 단순 인장하중

Fig. 8에서는 단순인장을 받는 $[0/-\theta]_s$ 인 대칭 적층 쉘의 경우에 모든 적층 가능각도에 대한 목적함수를 나타내었다. 이 경우에 대해 최적화를 수행한 결과 파괴지수가 가장 작게 발생하는 적층각도는 $[0]_{2s}$ 로 구하여졌고 이는 Fig. 8의 해석결과 뿐만 아니라 물리적인 관점에서도 타당함을 알 수 있다.

Table 4 Optimal angles under torsion ($T=10$ MN-mm, $Y=Y'=40$ MPa)

R_o/R_i	Tsai-Wu failure criterion	Tsai-Hill failure criterion
1.005	44.691 44.691/42.973	44.700 44.691/42.973
1.01	44.691 44.691/42.972	44.693 44.691/42.972
1.05	44.691 44.691/42.972	44.691 44.691/42.972
1.10	44.691 44.691/42.972	44.691 44.691/42.972
1.15	44.691 44.691/42.972	44.691 44.691/42.972
1.20	44.691 44.691/42.972	44.691/42.972
1.30	44.691 44.691/42.972	44.691 44.691/42.972

* Optimal angle [outside to inside]_s

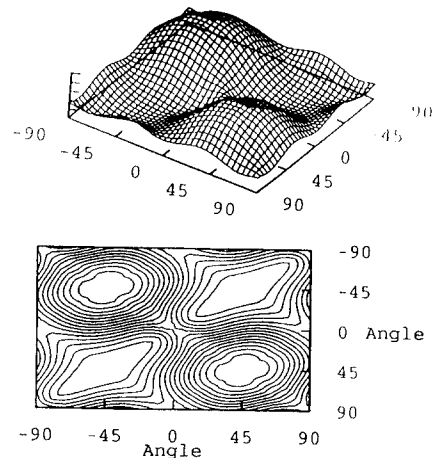


Fig. 9 Surface and contours of cost function torque (T) only

(나) 비틀림하중

본 논문에서 쉘은 적층판이 angle ply laminate 인 경우이며 비틀림하중이 작용할 때 미소요소의 응력상태는 평판에서 전단하중이 작용하는 경우와 동일하다. 이때 적층판은 $[\pm 44.691]_s$ 일 때가 파괴지수가 가장 작은 경우이며 층의 수를 증가함에 따라 안쪽층의 각도가 점차 감소하는 것을 Table 4를 통해 볼 수 있다. 또한, 비틀림하중 상태에서 다양한 반지름비에 대한 최적화 결과를 구하였고 이를 Fig. 9의 해석적인 목적함수를 통해 쉽게 검

증할 수 있다.

(다) 내압

여러 반지름 비(R_o/R_i)에 대해 원통형 복합재료 쉘이 10 MPa의 내압을 받고 있을때 최적각도를 구하였다. Table 5에서 제시한 최적설계 결과를 고찰해 보면 층의 수를 증가시킴에 따라 파괴지수가 크게 감소하는 것을 볼 수 있었다. 이때 층이 하나일 때는 반지름비에 상관없이 적층각도가 일정하고 Fig. 10에서 나타난 바와 같이 처음 한장에서 두장으로 증가시켰을 때 최적 적층각도의 변화와

Table 5 Optimal winding angles(cost function used is Tsai-Wu failure criterion, $Y=Y'=40$ MPa)

R_o/R_i	No. of layers	Optimal angle [outside to inside] _s	Max. failure index	Percent change in F.I.
1.005	1	53.737	14.1521	-
	2	53.789/53.684	14.1345	0.124
	3	53.807/53.737/53.667	14.1287	0.047
1.01	1	53.737	3.5733	-
	2	53.841/53.632	3.5645	0.246
	3	53.876/53.737/53.597	3.5615	0.084
	4	53.893/53.789/53.684/53.579	3.5600	0.042
1.05	1	53.737	0.1544	-
	2	54.239/53.230	0.1526	1.166
	3	54.407/53.736/53.059	0.1520	0.393
	4	54.486/53.984/53.478/52.969	0.1517	0.197
1.10	1	53.737	4.238×10^{-2}	-
	2	54.698/52.760	4.144×10^{-2}	2.218
	3	55.019/53.734/52.425	4.113×10^{-2}	0.748
	4	55.182/54.221/53.246/52.257	4.097×10^{-2}	0.389
1.20	1	53.737	1.261×10^{-2}	-
	2	55.506/51.923	1.211×10^{-2}	3.965
	3	56.104/53.732/51.273	1.194×10^{-2}	1.403
	4	56.399/54.629/52.815/50.948	1.186×10^{-2}	0.670
1.30	1	53.737	6.578×10^{-3}	-
	2	56.194/51.168	6.223×10^{-3}	5.396
	3	57.010/53.716/50.252	6.104×10^{-3}	1.912
	4	57.462/54.992/52.440/49.778	6.045×10^{-3}	0.966

더불어 파괴지수가 급격하게 감소하였고, 그 이후의 층의 증가에 대해서는 파괴지수의 감소량이 그다지 크지 않았다.

본 연구에서의 목적함수는 Tsai-Wu 이론($Y=Y'$)을 이용하는 경우인데, 식 (20b)에서 보듯이 이 이론에서는 두 방향의 응력 상호작용항인 강도계수 F_{12} 의 결정이 중요하며 이에 대해 아직 많은 연구결과가 제시되고 있다. 논문에서는 Tsai-Hahn⁽³¹⁾이 제안한 식을 이용한다. 그리고 이 강도계수가 최적화 결과에 미치는 영향을 살펴보고자 무차원화 시킨 F_{12}^* 의 값을 -1에서 1범위까지 변화시키면서 다양한 목적함수에 대하여 최적화를 수행하고 그 결과를 Fig. 11에 나타내었다.

계산한 결과에 대한 정확도를 확인하고자 Fig.

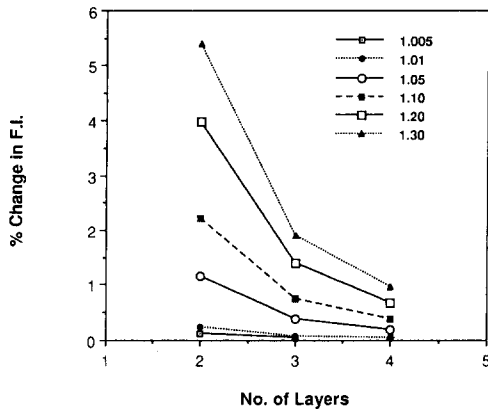


Fig. 10 Percent change in failure index from Table 5

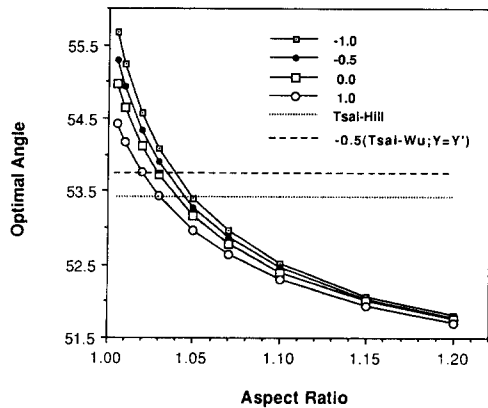


Fig. 11 Variation of optimal angles given aspect ration with F_{12} change cost function used is Tsai-Wu failure criterion ($Y \neq Y'$)

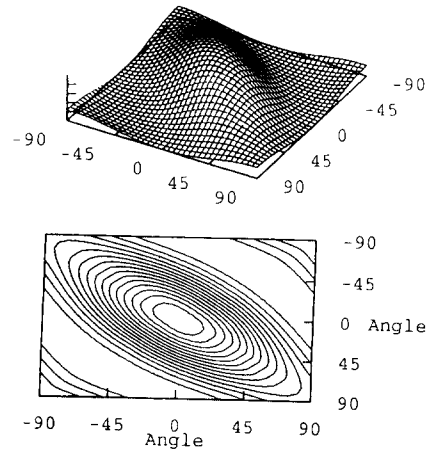


Fig. 12 Surface and contours of cost function. $N_\theta : N_x = 2 : 1$

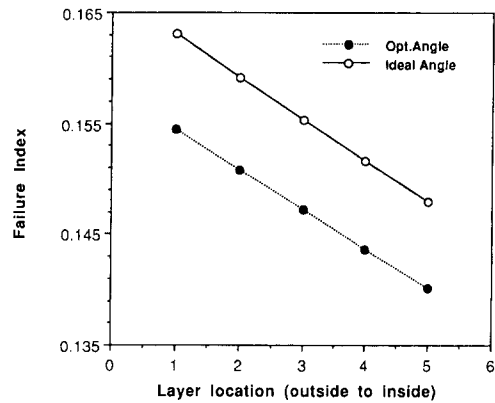


Fig. 13 Failure index of optimal angle vs. failure index of ideal angle 54.735° ($R_o/R_i=1.05, p=10\text{MPa}$)

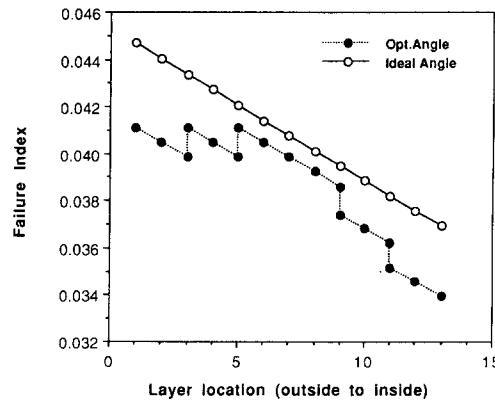


Fig. 14 Failure index of optimal angle vs. failure index of ideal angle 54.735° . ($R_o/R_i=1.10, p=10\text{MPa}$)

Table 6 Optimum winding angle of the filaments for different load cases ($Y = Y' = 40$ MPa)

R_o/R_i	Resultant force ratio (Hoop-to-axial)	Optimum winding angle [degree] _s
1.005	1 : 0	90.0 90.0/90.0
	1 : 1	45.000 54.667/35.286
	1 : 2	36.263 36.215/36.300
	2 : 1	53.737 53.789/53.684
	2 : 1	53.737 53.789/53.684
	4 : 1	62.580 62.653/62.522
	1 : 4	27.419 27.386/27.439
	0 : 1	0.0 0.0/0.0
1.05	1 : 0	90.0 90.0/90.0
	1 : 1	45.0 59.013/30.516
	1 : 2	36.263 35.806/36.614
	2 : 1	53.737 54.239/53.230
	4 : 1	62.580 63.279/62.018
	1 : 4	27.419 27.100/27.613
	0 : 1	0.0 0.0/0.0

* Axial force[MN/mm]
Pressure[MPa]
Torque[MN-mm]

12에 모든 적층각도에 대한 목적함수를 해석적으로 나타내었으며 이를 통해 최적설계 계산결과가 정확하다는 것을 확인할 수 있었다. 또 구한 결과가 강도측면에서 우수함을 보이므로 netting analysis 결과인 54.735° 와 비교하였다. Fig. 13에서 보듯이 반지름 비가 1.05인 경우 netting analysis 결과보다 최적화율 통해 구한 결과가 약 6% 정도의 파괴지수 감소효과를 가져왔고, 반지름 비가 1.10인 경우도 netting analysis 결과보다 높은 강도를 예측할 수 있음을 Fig. 14에서 알 수 있다. 그래서 기존의 설계방식보다 최적설계 결과의 우수성을 입증할 수 있다.

(라) 내압 및 인장하중

Hoop-to-axial 방향으로 2 : 1의 하중비를 가지는 내압을 받는 경우나 단순하중을 받는 경우는 직관적으로 물리적인 의미를 통해 해를 살펴볼 수 있었으나 나머지의 다양한 이축 하중상태에서는 이러한 기대가 곤란하다. 따라서 일반적인 다양한 하중 조건에서의 최적 적층각도를 구해 보았다. Table 6에서 나타난 바와 같이 hoop-to-axial 방향으로의 합력비가 (1 : 0), (1 : 1), (1 : 2), (2 : 1), (4 : 1), (1 : 4), (0 : 1)이 되게 하중을 주어 각각에 대해 계산을 수행하였다. 이는 실제적으로도 셸이 구조물의 일부로 사용될 때 가능한 하중상태이다. Fig. 15는 하중비가 (1 : 2)인 경우의 목적함수를 해석적으로 나타내어서 최적설계 계산결과와 비교하여 해

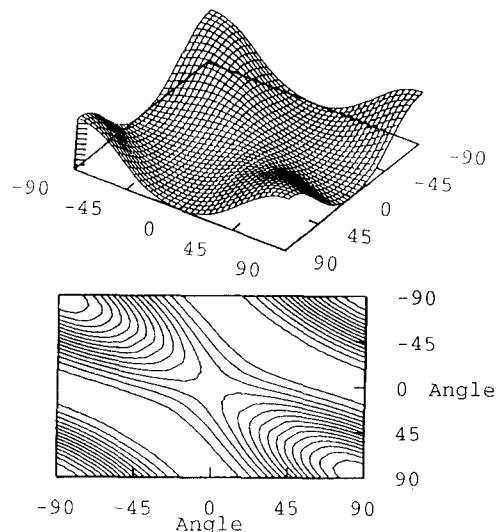


Fig. 15 Surface and contours of cost function. $N_o : N_x = 1 : 2$

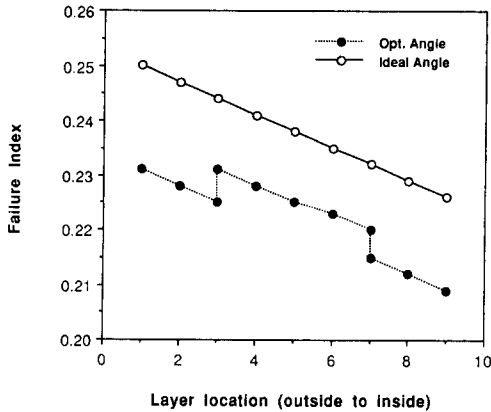


Fig. 16 Failure index of optimal angle vs. failure index of ideal angle 54.735° (cost function used is Tsai-Hill failure criterion). $R_o/R_i=1.05$, $p=10\text{MPa}$

의 정확도를 검증하였다. 나머지 하중조건들도 목적함수를 해석적으로 구하여 최적설계 결과와 비교함으로써 최적설계 계산결과가 정확함을 알 수 있었다.

이밖에 구조물의 강성을 어느정도 일정하게 유지하고자 안쪽의 층을 미리 결정한 $[\pm\theta/\pm 45]$ 와 $[\pm\theta/(0/90)]$ 로 적층한 쉘구조물이 내압을 받는 경우에 대해 최적화를 수행해 보았다. 최적각도 ($R_o/R_i=1.05$)는 각각 63.35°, 69.46°로 각도를 미리 결정한 층이 존재하지 않는 경우보다 최적적층각도가 훨씬 큰 것을 알 수 있었다.

-Tsai-Hill 이론을 이용하는 경우

Tsai-Wu 이론을 이용하는 경우 ($Y=Y'$)와 마찬가지로 단순인장시에는 모든 층이 0°로 일치하는 것을 볼 수 있었고, 전단하중을 받을 시에도 44.691°의 결과를 얻어 목적함수로써 Tsai-Wu 이론을 이용하는 경우와 동일한 결과를 구하였다. 이를 Table 4에 나타내었다.

내압을 받는 경우 ($p=10\text{ MPa}$)에 대해서도 다양한 반지름비에 대해 최적 적층각도를 구하였다.⁽³⁴⁾ Netting analysis와 비교한 결과 Fig. 16에 나타난 바와 같이 반지름비가 1.05일때는 약 8% 정도 작은 파괴지수를 최적설계를 통해 얻을 수 있었다.

5. 결 론

다양한 하중을 받는 원통형 복합재료 쉘구조가

최대의 강도를 갖도록 파단판정식의 파괴지수를 최소화 하였으며, 보조변수법을 이용한 설계민감도의 계산과 구배투영법을 이용하여 각 층의 적층각도를 결정하였다. 본 연구를 통하여 다음과 같은 몇가지 결론을 얻었다.

(1) 목적함수를 파단판정식인 Tsai-Wu 이론, Tsai-Hill 이론으로 선택함으로써 강도를 고려하여 적층 각도를 효율적으로 설계변수로 정의할 수 있었다. 목적함수로 설정한 Tsai-Wu 이론의 파괴지수 값이 음이 나오는 경우가 발생하였고, 이를 해결하고자 적층판의 인장강도와 압축강도를 동일하게 가정하였다.

(2) 상태공간법을 이용하여 최적설계 문제를 수식화하였다. 이때에 해석하는 일련의 해석과정들을 상태방정식으로 정의하고 보조변수법을 사용하여 정확한 설계민감도를 구하였다.

(3) 각층에서 발생하는 파괴지수 중에서 최대 파괴지수를 환경변수로 정의하고 Min-Max 문제로 수식화할 수 있었다.

(4) 내압을 받는 경우 최적설계 결과를 통해 netting analysis 결과보다 낮은 파괴지수를 얻을 수 있었으며 다양한 하중을 받는 복합재료 쉘구조물에 대해 최적화를 수행한 결과 각 층들이 훨씬 작은 파괴지수를 얻을 수 있는 적층각도를 구하였다. 동시에 각 층들의 파괴지수가 거의 비슷해지므로써 안정적이며 효율적인 설계가 이루어졌다.

참고문헌

- (1) Tsai, S. W., 1988, *Composites Design* (4ed.), Think Composites, Dayton.
- (2) Dong, S. B., Pister, K.S. and Taylor, R.L., 1962, "On the Theory of Laminated Anisotropic Shells and Plates," *Journal of the Aerospace Science*, Aug.
- (3) Whitney, J. M. and Halpin, J.C., 1968, "Analysis of Laminated Anisotropic Tubes Under Combined Loading," *Journal of Composite Materials*, Vol. 2, pp. 360~367.
- (4) Lekhnitskii, S.G., 1981, *Theory of Elasticity of an Anisotropic Body*, MIR.
- (5) Lekhnitskii, S.G., 1968, *Anisotropic Plates*, Gordon and Breach.
- (6) Spencer, B. and Hull, D., 1978, "Effect of

- Winding Angle on the Failure of Filament Wound Pipe," *Composites*, Vol. 9, pp. 17~24.
- (7) Uemura, M. and Fukunaga, H., 1982, "Probabilistic Burst Strength of Filament-Wound Cylinders Under Internal Pressure," *Journal of Composite Materials*, Vol. 16, pp. 462~480.
- (8) Eckold, G.C., Leadbetter, D., Soden, P.D. and Griggs, P.R., 1978, "Lamination Theory in the Prediction of Failure Envelopes for Filament Wound Materials Subjected to Biaxial Loading," *Composites*, Vol. 9, pp. 263~271.
- (9) Hull, D., 1981, *An Introduction to Composite Materials*, Cambridge Univ. Press.
- (10) Mistry, J., 1992, "Theoretical Investigation Into the Effect of the Winding Angle of the Fibers on the Strength of Filament Wound FRP Pipes Subjected to Combined External Pressure and Axial Compression," *Composite Structure*, Vol. 20, pp. 17~24.
- (11) Schmit, L.A. Jr. and Farshi, B., 1977, "Optimum Laminated Design for Strength and Stiffness," *Int. J. for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 7, pp. 519~536.
- (12) Schmit, L.A., Jr. and Farshi, B., 1977, "Optimum Design of Laminated Fiber Composite Plates," *Int. J. for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 11, pp. 623~640.
- (13) Tauchert, T.R. and Adibhatla, S., 1984, "Design of Laminated Plates for Maximum Stiffness," *Journal of Composite Materials*, Vol. 18, pp. 58~69.
- (14) Kam, T.Y. and Snyman, J.A., 1991, "Optimal Design of Laminated Composite Plates Using A Global Optimization Technique," *Composite Structure*, Vol. 19, pp. 351~370.
- (15) Kam, T.Y. and Chang, R.R., 1992, "Optimum Layup of Thick Laminated Composite Plates for Maximum Stiffness," *Engineering Optimization*, Vol. 19, pp. 237~249.
- (16) Ganesh, V.K. and Naik, N. K., 1993, "Some Strength Studies on FRP Laminates," *Composite Structure*, Vol. 24, pp. 51~58.
- (17) Park, W.J., 1982, "An Optimal Design of Simple Symmetric Laminates Under the First Ply Failure Criterion," *Journal of Composite Materials*, Vol. 16, pp. 341~355.
- (18) Massard, T.N., 1984, "Computer Sizing of Composite Laminate for Strength," *Journal of Reinforced Plastics and Composites*, Vol. 3, pp. 301~327.
- (19) Chao, C.C., Koh, S.L. and Sun, C.T., 1975, "Optimization of Buckling and Yield Strengths of Laminated Composites," *AIAA Journal*, Vol. 13, pp. 1131~1132.
- (20) Kim, C. W., Hwang, W, Park, H.C. and Han, K.S., 1993, "An Optimal Stacking Sequence Design of Laminated Composite Cylinders," *9th International Conference on Composite Materials (ICCM/9)*, Madrid, Spain.
- (21) Naik, N.K. and Ganesh, V.K., 1993, "Optimum Design Studies on FRP Beams with Holes," *Composite Structure*, Vol. 24, pp. 59~60.
- (22) Kumar, N. and Tauchert, T.R., 1992, "Multiobjective Design of Symmetrically Laminated Plates," *Journal of Mechanical Design, Transactions of the ASME*, Vol. 114, pp. 620~625.
- (23) Chao, C.C., Sun, C.T. and Koh, S.L., 1975, "Strength Optimization for Cylindrical shells of Laminated Composites," *Journal of Composite Materials*, Vol. 9, pp. 53~66
- (24) Tauchert, T.R., 1981, "Optimum Design of a Reinforced Cylindrical Pressure Vessel," *Journal of Composite Materials*, Vol. 15, pp. 390~402.
- (25) Hu, H. and Wang, S.S., 1992, "Optimization for Buckling Resistance of Fiber Composite Laminate Shells with and without Cutouts," *Composite Structure*, Vol. 22, pp. 3~13.
- (26) Haug, E.J., Choi, K.K. and Komkov, V., 1984, *Design Sensitivity Analysis of Structural Systems*, Academic Press, Dec.
- (27) Haug, E.J. and Arora, J.S., 1979, *Applied Optimal Design*, John Wiley, New York.
- (28) Cheng K., 1986, "Sensitivity Analysis and A Mixed Approach to the Optimization of Symmetric Layered Composite Plates," *Engineering Optimization*, Vol. 9, pp. 233~248.

- (29) Rowlands, R.E., 1985, "Strength (Failure) Theories and their Experimental Correlation," *Failure Mechanics of Composites*, G.C. Sih and A. M. Sudra, eds., Elsevier Sci. Publ.
- (30) Tsai, S.W. and Wu, E.M., 1971, "A General Theory of Strength for Anisotropic Materials," *Journal of Composite Materials*, Vol. 5, pp. 58~80.
- (31) Tsai, S.W. and Hahn, H.T., 1980, *Introduction to Composite Materials*, Technomic.
- (32) Soden, P.D, Kitching, P.C. , Tse, P.C. and Tsavalas, Y., 1993, "Influence of Winding Angle on the Strength and Deformation of Filament-Wound Composite Tubes Subjected to Uniaxial and Biaxial Loads," *Composite Science and Technology*, Vol. 46, pp. 363~378.
- (33) Kim, C.W., Song, S.R., Hwang, W., Park, H.C. and Han, K.S., 1994, "On the Failure Indices of Quadratic Failure Criteria for Optimal Stacking Sequence Design of Laminated Plate," *Applied Composite Materials*, Vol. 1, pp. 81~85.
- (34) 김창완, 1993, "강도를 고려한 복합재료 판 및 셸 구조물의 최적설계," 석사학위논문, 포항 공과대학교.