

〈論 文〉

## 평면 탄성문제의 트래프츠 유한요소법과 캐비티요소의 구성

임장근\* · 송관섭\*\*

(1995년 7월 14일 접수)

### Trefftz Finite Element Method and Cavity Element Formulation for Plane Elasticity Problems

Jangkeun Lim and Kwansup Song

**Key Words :** Trefftz Finite Element(트래프츠 유한요소), Cavity Element(캐비티 요소), Trefftz Function(트래프츠 함수), Hybrid Variational Principle(혼합형 변분원리), Conformal Mapping(등각사상)

#### Abstract

For the effective analysis of two dimensional plane problems, Trefftz finite elements and cavity elements have been proposed. These element matrix equations were formulated on the basis of hybrid variational principle and Trefftz function sets derived consistently from the complex theory of plane elasticity. In order to suggest the accuracy characteristics of the proposed Trefftz elements, typical plane problems were analyzed and these results were compared with ones obtained by using the conventional displacement type elements. The accuracy of the proposed elements is less sensitive to the element size and shape than the conventional displacement type elements. These elements, being able to be formed with multi-nodes, give the convenient modeling of an analytic domain. The cavity elements give the comparatively exact values of stress concentration factors or stress intensity factors and can be effectively used for the analysis of mechanical structures containing various cavities.

#### 기 호 설 명

$E$  : 탄성계수

$i = \sqrt{-1}$

$K_I, K_{II}$  : 모드 I, II의 응력세기계수

$m$  : Trefftz 함수의 차수

$\{\bar{i}\} = [\bar{i}_x \ \bar{i}_y]^T$

$\{u\} = [u \ \nu]^T$

$z = x + iy$

$\Gamma_u$  : 변위경계

$\Gamma_t$  : 분포외력 경계

$\mu = E/2(1+\nu)$

$\nu$  : 푸아송비

$\{\sigma\} = [\sigma_x \ \sigma_y \ \tau_{xy}]^T$

$k = \begin{cases} (3-\nu)/(1+\nu) & \text{: 평면 응력상태} \\ (3-4\nu) & \text{: 평면 변형률상태} \end{cases}$

$\Omega$  : 해석영역

$\xi = \xi + i\eta$

#### 1. 서 론

Trefftz 유한요소법은 선형 탄성문제의 제차지배 미분방정식(homogeneous governing differential equation)을 정확히 만족하는 함수, 즉 Trefftz 함

\*회원, 한양대학교 기계설계학과

\*\*삼성전관 생산기술센터

수<sup>(1)</sup>를 유한요소법의 시험함수(trial function)로 택하여 정식화한다. 이와 같이 정식화하는 Trefftz 유한요소는 두가지의 큰 특징을 갖게 된다. 첫번째는 요소내의 변위와 응력이 Trefftz 함수에 의한 시험함수로서 가정되기 때문에 혼합법에 기초를 두게 되고 두번째는 요소의 경계만의 적분으로 요소방정식이 구성되기 때문에 경계적분법에 준한다. 그러나 유한요소법과 같이 해석영역을 요소로서 분할하여야 하고 기본해로서 특이함수가 사용되지 않는 면에서 경계요소법과는 다르다.

이와 같이 Trefftz 유한요소는 그 요소방정식이 경계적분만으로 구성되기 때문에 일반 유한요소와는 달리 요소의 절점수와 형상. 그리고 시험함수의 차수 등에 제한을 받지 않는 것이 특징이다. 따라서, 이 방법을 사용하면 다절점 초요소(super-element with multi-nodes)<sup>(2)</sup> 및 특정요소(special element)<sup>(3)</sup> 등을 쉽게 구성할 수 있다.

Trefftz 방법에 대해서는 1984년 Herrera<sup>(4)</sup>가 그 개념을 제안하고 Zielinski 등<sup>(5)</sup>과 Jin 등<sup>(6)</sup>이 경계요소법과 마찬가지로 해석영역의 경계적분만으로 해를 얻을 수 있음을 예시하였다. 특히 Jin 등은 직접법과 간점법의 정식화 방법을 제안하고 이에 대한 특성을 잘 설명하고 있다. 그러나 이들 방법은 경계조건을 근사시켜 해를 얻는 Trefftz 근사해법이지 영역을 요소로 분할하지 않기 때문에 유한요소법이라고 할 수 없다. 특히 해석영역이 복잡한 경우에 경계조건의 개수가 많아지고 이를 위한 Trefftz 시험함수의 차수가 높아지기 때문에 수치적인 안정성 문제가 따른다.

영역을 유한요소와 같이 분할하는 Trefftz 유한요소에 대해서는 Jirousek 등이 1986년에 판공힘 문제,<sup>(7)</sup> 1992년 평면문제<sup>(8,9)</sup>에 대하여 응력집중이 발생하는 여러가지 문제에 이 Trefftz 유한요소가 유효함을 제안하였다. 그러나 이들은 요소의 시험함수로서 Trefftz 함수뿐만 아니라 특이해(particular solution)를 도입함으로써 해를 정확도는 향상시킬 수 있었으나 문제의 특성이 제한되고 수식화 과정이 복잡하여 응용하는데 어려움이 따른다. 본 논문은 이차원 평면문제에 대하여 Trefftz 함수를 사용한 Trefftz 요소의 일반 정식화 방안을 제안하고 그 해의 특성을 유한요소와 비교하여 검토하고자 한다. 또한, 특이치 또는 응력집중문제를 쉽게 해석할 수 있는 특이요소를 개발하고 이의 실용성을 규명하고자 한다.

## 2. Trefftz 함수

### 2.1 내부영역 문제

체력(body force)이 무시된 이차원 선형 탄성문제의 평형방정식과 경계조건 및 구성방정식은 다음과 같이 표현된다.<sup>(8)</sup>

$$[L]^T\{\sigma\}=0 \quad \text{in } \Omega \quad (1)$$

$$\{u\}=\{\bar{u}\} \quad \text{on } \Gamma_u \quad (2)$$

$$\{t\}=[N]\{\sigma\}=\{\bar{t}\} \quad \text{on } \Gamma_t$$

[L]는 미분행렬이고 [N]는 경계의 외향 수직방향의 방향여현행렬을 의미한다.

이와 같은 이차원 평면문제의 복소수해는 복소해석함수(complex analytic function)  $\phi(z)$ ,  $\psi(z)$ 를 도입하여 다음과 같이 얻어진다.<sup>(10)</sup>

$$2\mu(u+iv)=\kappa\phi(z)-z\overline{\phi'(z)}-\overline{\psi(z)} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \sigma_x+i\tau_{xy} &= \phi'(z)+\overline{\phi'(z)}-z\overline{\phi''(z)}-\overline{\psi'(z)} \\ \sigma_y-i\tau_{xy} &= \phi'(z)+\overline{\phi'(z)}+z\overline{\phi''(z)}+\overline{\psi'(z)} \end{aligned} \quad (4)$$

식 (2)를 만족하는 경계조건은

$$\begin{aligned} \kappa\phi(z)-z\overline{\phi'(z)}-\overline{\psi(z)} &= 2\mu(\bar{u}+i\bar{v}) \\ \phi(z)+z\overline{\phi'(z)}+\overline{\psi(z)} &= i\int_{\Gamma_t}(\bar{t}_x+i\bar{t}_y)ds \end{aligned} \quad (5)$$

로 표현된다. 식 (3), (4), (5)를 만족하는 복소해석함수  $\phi(z)$ ,  $\psi(z)$ 를 구하기 위하여 다음과 같이 다항식으로 가정한다.

$$\begin{aligned} \phi(z) &= \sum_{j=1}^m a_j z^j \\ \psi(z) &= \sum_{j=1}^m b_j z^j \end{aligned} \quad (6)$$

식 (6)에서  $a_j = a_j^r + ia_j^i$ ,  $b_j = b_j^r + ia_j^i$ 인 복소수 미정계수들이고  $a_j^r \sim a_j^i$ 는 실정수(real constant)들이다.

식 (6)을 식 (3), (4)에 대입하여 정리하면 변위  $u, v$ 와 응력성분을 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$2\mu(u+iv)=\sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^4 a_j^k d_{kj} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \text{Re} \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^4 a_j^k (s_{kj} - t_{kj}) \\ \sigma_y &= \text{Re} \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^4 a_j^k (s_{kj} + t_{kj}) \\ \tau_{xy} &= \text{Im} \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^4 a_j^k t_{kj} \end{aligned} \quad (8)$$

단,

$$\begin{aligned} d_{1j} &= \kappa \cdot z^j - j \cdot z \cdot \bar{z}^{j-1} \\ d_{2j} &= i(\kappa \cdot z^j + j \cdot z \cdot \bar{z}^{j-1}) \\ d_{3j} &= -\bar{z}^j \\ d_{4j} &= i\bar{z}^j \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} s_{1j} &= j \cdot (z^{j-1} + \bar{z}^{j-1}) \\ s_{2j} &= i(z^{j-1} - \bar{z}^{j-1}) \cdot j \\ s_{3j} &= 0 \\ s_{4j} &= 0 \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} t_{1j} &= j \cdot (j-1) \cdot \bar{z} \cdot z^{j-2} \\ t_{2j} &= i[j \cdot (j-1) \cdot \bar{z} \cdot z^{j-2}] \\ t_{3j} &= j \cdot z^{j-1} \\ t_{4j} &= i \cdot j \cdot z^{j-1} \end{aligned} \quad (11)$$

이다. 식 (7), (8)의 실정수  $a_j^k$ 에 해당되는 함수들은 이차원 평면문제의 자배미분방정식인 중조화 함수(biharmonic function)를 만족하기 때문에 모두 Trefftz 함수가 된다.

### 2.2 캐비티 문제

이차원 평면에 원공이나 균열 또는 임의 형상의 캐비티(cavity)가 존재하는 문제의 응력집중계수

또한 응력세기계수 및 등가강성을 평가할 경우에 Trefftz 함수는 다음과 같은 등각사상(conformal mapping)에 의하여 구할 수 있다.<sup>(10)</sup>

$$z = f(\zeta) = C_1 \left( \zeta + \frac{C_2}{\zeta} \right) \quad (12)$$

단,  $C_1 = (a+b)/2$ ,  $C_2 = (a-b)/(a+b)$ 이고  $a$ ,  $b$ 는 Fig. 1과 같은 타원의 반경들이다.

식 (12)의 등각사상 식은 타원의 외부영역을 단위원(unit circle)의 외부영역으로 표현하고, 이 식의 역변환은

$$\zeta = \frac{1}{2C_1} [z \pm \sqrt{z^2 - 4C_1^2 C_2}] \quad (13)$$

로 된다. 식 (13)의 부호는  $|\zeta| \geq 1$ 의 조건을 만족하도록 선정된다. 식 (12)를 식 (3), (4), (5)에 대입하면 변위  $u, v$ 와 응력성분들을  $\zeta$ 의 함수로 표현할 수 있고 복소해석함수  $\phi(\zeta)$ 는 Laurent 급수로 다음과 같이 가정한다.

$$\phi(\zeta) = \sum_{j=1}^m [a_j \zeta^j + b_j \zeta^{-j}] \quad (14)$$

캐비티문제에 대해서는 단위원의 원주에서 분포 외력(traction), 즉  $\bar{t}_x=0$ ,  $\bar{t}_y=0$  이므로 식 (12)와 (5)에서

$$\psi(\zeta) = -\bar{\phi} - \bar{f} \frac{\phi}{f} \quad (15)$$

가 성립한다. 단, 문자 위의  $\cdot$ 는  $\zeta$ 에 관한 미분을 의미하고 식 (12), (14), (15)를 이용하여  $\psi(\zeta)$ 는 다음과 같이 얻을 수 있다.

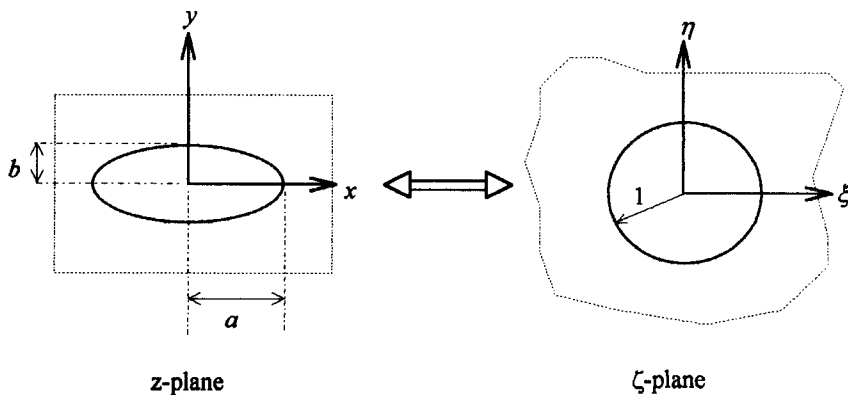


Fig. 1 Conformal mapping an ellipse onto the unit circle

$$\psi(\zeta) = - \sum_{j=1}^m [(\bar{a}_j - b_j \cdot j \cdot g) \zeta^{-j} + (\bar{b}_j + a_j \cdot j \cdot g) \zeta^j] \quad (16)$$

$$g = \frac{(1 + C_2 \zeta^2)}{\zeta^2 - C_2} \quad (17)$$

단  $\bar{a}_j$ ,  $\bar{b}_j$ 는 각각  $a_j$ ,  $b_j$ 의 공액 복소상수들이다. 식 (14), (16)에 의하여 식 (9), (10), (11)의 Trefftz 함수는 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} d_{1j} &= \kappa \cdot \zeta^j + \bar{\zeta}^{-j} + \bar{g} \cdot j \cdot \bar{\zeta}^j - \frac{f}{f} \cdot j \cdot \bar{\zeta}^{j-1} \\ d_{2j} &= i \left( \kappa \cdot \zeta^j + \bar{\zeta}^{-j} - \bar{g} \cdot j \cdot \bar{\zeta}^j + \frac{f}{f} \cdot j \cdot \bar{\zeta}^{j-1} \right) \\ d_{3j} &= \kappa \cdot \zeta^{-j} + \bar{\zeta}^j - \bar{g} \cdot j \cdot \bar{\zeta}^{-j} + \frac{f}{f} \cdot j \cdot \bar{\zeta}^{-j-1} \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} s_{1j} &= \frac{1}{f} \cdot j \cdot \bar{\zeta}^{j-1} + \frac{1}{f} \cdot j \cdot \zeta^{j-1} \\ s_{2j} &= i \left( -\frac{1}{f} \cdot j \cdot \bar{\zeta}^{j-1} + \frac{1}{f} \cdot j \cdot \zeta^{j-1} \right) \\ s_{3j} &= -\frac{1}{f} \cdot j \cdot \bar{\zeta}^{-j-1} - \frac{1}{f} \cdot j \cdot \zeta^{-j-1} \\ s_{4j} &= i \left( \frac{1}{f} \cdot j \cdot \bar{\zeta}^{-j-1} - \frac{1}{f} \cdot j \cdot \zeta^{-j-1} \right) \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} t_{1j} &= \frac{\bar{f}}{f^2} \cdot j \cdot (j-1) \cdot \zeta^{j-2} - \left( \frac{g}{f} \cdot j + \frac{\bar{f}}{f^3} \cdot \bar{f} \right) \cdot j \cdot \zeta^{j-1} \\ &\quad - \frac{1}{f} \cdot j \cdot \bar{g} \cdot \zeta^j + \frac{1}{f} \cdot j \cdot \zeta^{-j-1} \\ t_{2j} &= i \left( \frac{\bar{f}}{f^2} \cdot j \cdot (j-1) \cdot \zeta^{j-2} - \left( \frac{g}{f} \cdot j + \frac{\bar{f}}{f^3} \cdot \bar{f} \right) \cdot j \cdot \zeta^{j-1} \right. \\ &\quad \left. + \zeta^{j-1} + \frac{1}{f} \cdot j \cdot \bar{g} \cdot \zeta - \frac{1}{f} \cdot j \cdot \zeta^{-j-1} \right) \\ t_{3j} &= \frac{\bar{f}}{f^2} \cdot j \cdot (j+1) \cdot \zeta^{-j-2} + \left( \frac{\bar{f}}{f^3} \cdot \bar{f} - \frac{g}{f} \cdot j \right) \cdot j \cdot \zeta^{-j-1} \\ &\quad + \frac{1}{f} \cdot j \cdot \bar{g} \cdot \zeta^{-j} - \frac{1}{f} \cdot j \cdot \zeta^{j-1} \\ t_{4j} &= i \left( \frac{\bar{f}}{f^2} \cdot j \cdot (j+1) \cdot \zeta^{-j-2} + \left( \frac{\bar{f}}{f^3} \cdot \bar{f} - \frac{g}{f} \cdot j \right) \cdot j \cdot \zeta^{-j-1} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{f} \cdot j \cdot \bar{g} \cdot \zeta^{-j} + \frac{1}{f} \cdot j \cdot \zeta^{j-1} \right) \end{aligned} \quad (20)$$

### 3. Trefftz 유한요소법

이차원 평면문제에 대하여 앞에서 유도한 변위  $u$ ,  $v$ 와 응력성분  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\tau_{xy}$ 는 영역내에서 제차미

분방정식을 정확하게 만족하는 Trefftz 함수로 표시한 일반해와 같다.

이 해석해를 유한요소법에 적용하기 위하여 이들 응력과 변위성분이 요소내에서 성립한다고 가정하면, 다음과 같은 혼합형 변분원리 (hybrid variational principle)가 요소경계에 대하여 성립한다.<sup>(11)</sup>

$$\begin{aligned} \Pi = \int_r \left\{ -\frac{1}{2} ([N]\{\sigma\})^T \{u\} + ([N]\{\sigma\})^T \{\bar{u}\} \right\} ds \\ - \int_{r_t} \{\bar{u}\}^T \{\bar{t}\} ds \end{aligned} \quad (21)$$

$\Gamma = \Gamma_u + \Gamma_t$ 로서 요소의 경계를 의미하고 식 (21)의 Euler 방정식은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \{u\} &= \{\bar{u}\} \\ [N]\{\sigma\} &= \{0\} \quad \text{ever } \Gamma \end{aligned} \quad (22)$$

$$[N]\{\sigma\} = \{\bar{t}\} \quad \text{on } \Gamma_t \quad (23)$$

식 (7), (8)을 행렬형으로 표현하면

$$\{u\} = [\Phi]\{a\} \quad (24)$$

$$\{t\} = [N]\{\sigma\} = [N][\Psi]\{a\} = [\Theta]\{a\} \quad (25)$$

로 되고 식 (22)의 경계조건을 만족시키기 위한 요소경계에서의 변위는 절점변위  $\{q\}$ 로서 다음과 같이 보간하여 얻는다.

$$\{\bar{u}\} = [S]\{q\} \quad (26)$$

단,  $[S]$ 는 선형 보간인 경우에

$$[S] = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(1-\xi) & 0 & \frac{1}{2}(1+\xi) & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}(1-\xi) & 0 & \frac{1}{2}(1+\xi) \end{bmatrix} \quad (27)$$

가 되고 이차보간(quadratic interpolation)인 경우에는 다음과 같이 표현된다.

$$[S] = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}\xi(1-\xi) & 0 & 1-\xi^2 & 0 & \frac{1}{2}\xi(1+\xi) & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}\xi(1-\xi) & 0 & 1-\xi^2 & 0 & \frac{1}{2}\xi(1+\xi) \end{bmatrix} \quad (28)$$

단,  $\xi = (2s-l)/l$ 로서  $|\xi| \leq 1$ 이 되도록 선정한 무차원 좌표계이고,  $s$ 는  $0 \leq s \leq l$ 인 요소의 변에 대하여 취한 선좌표계,  $l$ 는 변의 길이이다.

이들 관계식을 식 (21)에 대입하면

$$\Pi = -\frac{1}{2} \{a\}^T [H]\{a\} + \{a\}^T [G]\{q\} - \{q\}^T \{F\} \quad (29)$$

로 표현된다. 단,

$$[H] = \frac{1}{2} \int_r ([\Theta]^T [\Phi] + [\Phi]^T [\Theta]) ds \quad (30)$$

$$[G] = \int_r [\Theta]^T [S] ds \quad (31)$$

$$[F] = \int_r [S]^T \{\bar{t}\} ds \quad (32)$$

이다. 식 (29)를 Trefftz 함수의 미정계수  $\{a\}$ 에 관하여 최소화시키면  $\{a\}$ 와 절점변위  $\{q\}$  사이에 다음 관계식이 성립한다.

$$\{a\} = [H]^{-1} [G] \{q\} \quad (33)$$

식 (33)을 식 (29)에 대입하고 절점변위  $\{q\}$ 에 관하여 최소화시키면 다음과 같이 요소의 행렬방정식을 얻을 수 있다.

$$[K] \{q\} = \{F\} \quad (34)$$

단,

$$[K] = [G]^T [H]^{-1} [G] \quad (35)$$

이고  $[K]$ 는 Trefftz 요소의 강성행렬로서 대칭이고 정치(positive definite)행렬이 된다.

한편 임의의 Trefftz 요소내에 생기는 변위와 응력성분의 계산은 요소경계에서의 절점변위가 계산되면 식 (33)과 식 (24), (25)를 이용하여 다음과 같이 계산할 수 있다.

$$\{u\} = [\Phi] \{a\} = [\Phi] [H]^{-1} [G] \{q\} \quad (36)$$

$$\{\sigma\} = [\Psi] \{a\} = [\Psi] [H]^{-1} [G] \{q\} \quad (37)$$

#### 4. 수치계산 및 검토

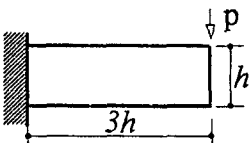

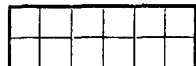

Trefftz 유한요소 및 캐비티오소의 정확도와 특성을 평가하기 위하여 전형적인 평면문제들에 대하여 해석하고 그 결과를 일반 변위형 유한요소법에 의한 해석결과와 비교 검토하였다.

##### 4.1 Trefftz 유한요소

Table 1은 Trefftz 유한요소의 수렴특성을 보인다. 요소경계에서 변위를 선형보간한 일차요소와 이차보간한 이차요소에 대하여 Trefftz 요소와 변위법에 기초한 일반 유한요소로 해석한 결과를 보인다. Trefftz 유한요소는 일반 변위형 유한요소보다 요소크기가 해의 정확도에 미치는 영향이 적음을 알 수 있다. 이 사실은 일차요소와 이차요소 모두 동일한 특성을 보인다.

Table 2는 요소의 찌그러짐이 해의 정확도에 미치는 영향을 보인다. Trefftz 요소의 해는 일반 변위형 유한요소보다 요소의 찌그러짐의 영향을 덜 받게 됨을 알 수 있다. 일반 변위형 유한요소에서는 요소가 찌그러짐에 따라서 자코비안 값이 불안정해 지지만 Trefftz 요소에서는 그 값이 변의 길

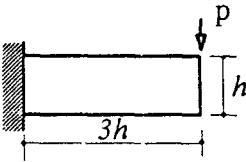




Table 1 Comparison on the solution convergency

	Linear element		Quadratic element	
	Trefftz method	Conventional method	Trefftz method	Conventional method
	0.8078	0.6548	0.9666	0.9390
	0.9151	0.8540	0.9696	0.9653
	0.9540	0.9370	-	-

**Table 2** Element distortion effects on the solution

b/a	Trefftz element	Conventional element
0	1.0	1.0
0.25	0.9910	0.9700
0.5	0.9614	0.8895
0.75	0.9053	0.7824

**Table 3** Solution characteristics due to elemental nodes

No. of element nodes		Normalized maximum displacement
4		0.9151
5		0.8664
6		0.9546
8		0.9601

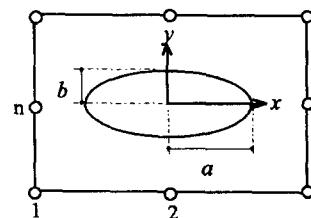
이를 표현하기 때문에 비교적 안정된 값을 갖기 때문인 것으로 사료 된다.

Table 3은 요소의 절점수에 따른 Trefftz 유한요소의 해의 특성을 보인다. 전체의 절점개수를 동일하게 하고 요소의 절점수를 4개, 5개, 6개, 8개로 요소를 구성하여 해석한 결과이다. 요소의 절점수가 많아질 수록 해의 정확도는 향상됨을 알 수 있다. 요소의 절점수가 많아지면 절점에 의한 변위분포와 요소내부의 Trefftz 함수에 의한 변위분포 사이에 변상에서 비적합성(incompatibility)을 줄일 수 있기 때문으로 사료된다. 요소의 절점수가 5인 경우에 해의 정확도가 떨어지는 이유는 요소형상이 찌그러져 이에 의한 영향이 누적되었기 때문인 것

으로 생각된다.

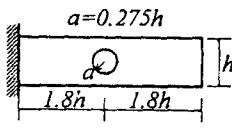
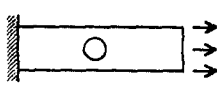
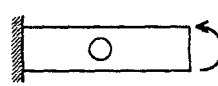
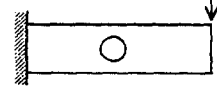
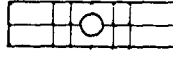


4.2 캐비티요소

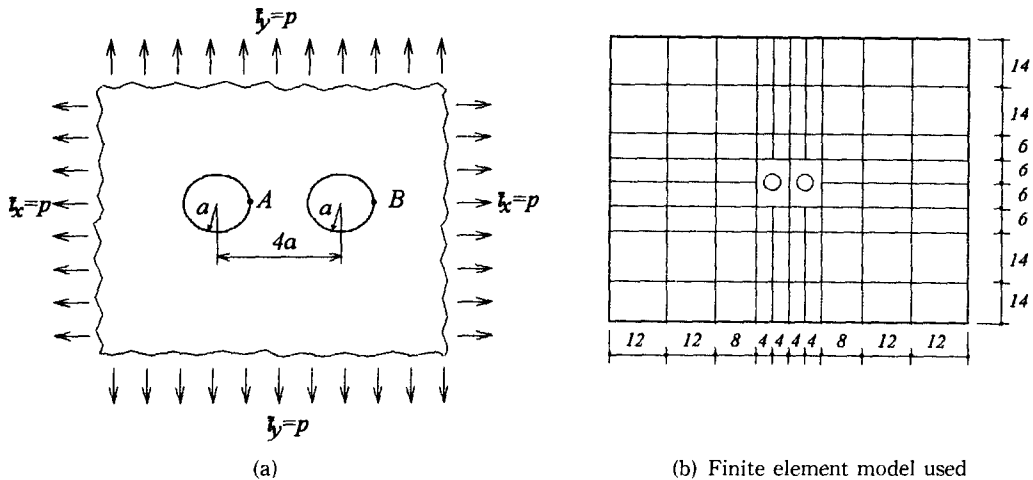
이차원 평면에 캐비티가 존재하는 문제의 응력집



**Fig. 2** Typical form of a cavity element

**Table 4** Stress concentration factors of the plate with a hole

	Stress concentration factor, $K = \frac{\sigma_{max}}{\sigma_{nom}}$		
			
	1.95	0.89	0.89
	2.03	0.99	0.95
	2.09	1.03	0.97
Very fine mesh <sup>(2)</sup>	2.11	1.04	0.98



**Fig. 3** Infinite plate containing two circular holes

중계수나 응력세기계수를 쉽게 결정하기 위하여 Fig. 2와 같이 캐비티를 포함하는 하나의 요소를 만들 수 있다.

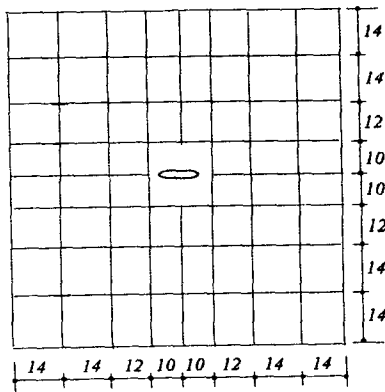
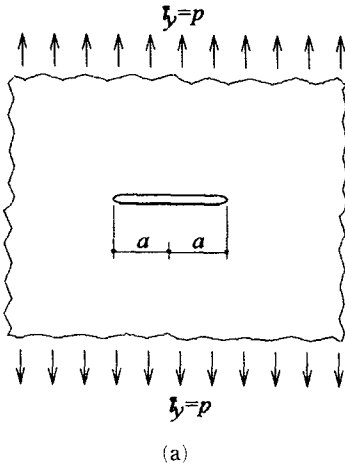
Fig. 2에서  $a=b$ 인 경우에는 원공이 되고  $b \approx 0$ 인 경우에는 크랙문제가 된다. 식 (12)로 표현된 등각사상을 이용하여 Trefftz 함수는 식(18),

(19), (20)이 되기 때문에 식 (7), (8)을 써서 일반 Trefftz 유한요소와 동일하게 구성할 수 있다.

Table 4는 원공판이 여러가지 하중을 받는 경우에 요소분할방법에 따른 응력집중계수의 변화를 보인다. 응력집중계수는 원공이 있는 부분에서 최대 응력( $\sigma_{max}$ )과 이부분의 유효 단면에 대한 공칭응력

**Table 5** Stress results of the plate with two holes for the points A and B

Stress	Exact (3)	Trefftz hole element
$\sigma_y$ at A	2.411	2.398
$\sigma_y$ at A	2.158	2.143



**Fig. 4** Infinite plate with an internal crack

( $\sigma_{nom}$ )의 비로 정의하였다. 일반 변위형 유한요소법으로 5712개의 자유도로서 해석한 결과<sup>(2)</sup>와 그 값을 비교하였다. 한개의 원공요소(hole element)를 포함한 104개의 자유도로서 해석한 결과는 약 1% 정도의 오차를 보이고 요소분할방법에 따른 오차도 비교적 작음을 알 수 있다.

Fig. 3은 두개의 원공을 갖는 무한평판의 응력 집중계수를 구하는 문제이다.

Table 5는  $E=1, \nu=0.3, p=1, a=2$ 인 경우에 원공주변 A, B(Fig. 3 참조)에서의  $\sigma_y$ 를 보인다. 비교적 간단한 원공요소로서 계산한 결과이지만 엄밀해<sup>(3)</sup>와 큰 차이가 없음을 알 수 있다.

Fig. 4는 내부크랙이 있는 무한판에서 크랙팁의 응력세기계수를 계산하는 문제이다.

크랙팁에서의 응력세기계수는 다음과 같이 표현된다.<sup>(3)</sup>

$$K_1 - iK_2 = \left[ \frac{a}{\sqrt{2}} \phi(\zeta) \right]_{\zeta=\pm 1} \quad (38)$$

본 논문에서는 식 (14)와  $\zeta=1$ 을 고려하여 다음 식으로 응력세기계수를 계산하였다.

$$K_1 - iK_2 = \frac{a}{\sqrt{2}} \sum_{j=1}^m j [(a_1^j - a_3^j) + i(a_2^j - a_4^j)] \quad (39)$$

크랙의 반길이  $a=2, p=1$ 인 경우에  $K_1=1.412, K_2=0$ 가 되고 이들 값은 엄밀해<sup>(3)</sup>  $K_1=1.414, K_2=0$ 와 비교할 때 매우 잘 일치함을 알 수 있다.

### 5. 결론

평면탄성문제의 Trefftz 유한요소와 이를 이용한 캐비티요소의 수식화과정을 일반화 하였다. 이들요소가 해의 정확도에 미치는 특성을 평가하기 위하여 여러가지 전형적인 평면탄성문제를 해석하고 그 결과를 검토한 결과 다음과 같은 결론을 얻었다.

(1) Trefftz 유한요소는 일반 변위형 유한요소에 비하여 요소의 크기와 형상에 의한 오차가 작아지기 때문에 비교적 안정된 해석결과를 얻을 수 있다.

(2) Trefftz 유한요소는 요소의 형상과 절점수에 제한을 받지않기 때문에 요소분할이 편리하고 절점수가 많아지면 해의 수렴성이 향상된다.

(3) 캐비티요소는 응력집중계수와 응력세기계수를 정확하게 구하는데 매우 편리하고 캐비티가 많



이 존재하는 기계구조물을 해석하는데 효과적으로 이용될 수 있다.

## 후 기

본 논문은 1994년도 교내 연구비 지원으로 수행 되었으며, 이에 깊이 감사드립니다.

## 참고문헌

- (1) Zielinski, A. P. and Zienkiewicz, O. C., 1985, "Generalized Finite Element Analysis with T-Complete Boundary Solution Functions," *Int. J. for Numer. Methods in Engineering*, Vol.21, pp. 509~528.
- (2) Jirousek, J. and Teodorescu, P., 1982, "Large Finite Elements Method for the Solution of Problems in the Theory of Elasticity," *Computers & Structures*, Vol.15, No.5, pp. 575~587.
- (3) Piltner, R., 1985, "Special Finite Elements with Holes and Internal Cracks," *Int. J. for Numer. Methods in Engineering*, Vol.21, pp. 1471~1485.
- (4) Herrera, I., 1984, "Trefftz Method," *Topics in Boundary Element Research*, C.A. Brebbia ed., Springer-Verlag, Berlin, pp. 225-253.
- (5) Zielinski, A.P. and Herrera, I., 1987, "Trefftz Method: Fitting Boundary Conditions," *Int. J. for Numer. Methods in Engineering*, Vol.24, pp. 871~891.
- (6) Jin, W. G., Cheung, Y.K. and Zienkiewicz, O.C., 1990, "Application of the Trefftz Method in Plane Elasticity Problems," *Int. J. for Numer. Methods in Engineering*, Vol.30, pp.1147~1161.
- (7) Jirousek, J. and Guex, L., 1986, "The Hybrid-Trefftz Finite Element Model and Its Application to Plate Bending," *Int. J. for Numer. Methods in Engineering*, Vol.23, pp. 651~693.
- (8) Jirousek, J. and Venkatesh, A., 1992, "Hybrid Trefftz Plane Elasticity Elements with P-Method Capabilities," *Int. J. for Numer. Methods in Engineering*, Vol.35, pp. 1443~1472.
- (9) Jirousek, J. and Zielinski, A. P., 1993, "Dual Hybrid-Trefftz Element Formulation Based on Independent Boundary Traction Frame," *Int. J. for Numer. Methods in Engineering*, Vol.36, pp. 2955~2980.
- (10) Muskhelishvili, N. I., 1975, *Some Basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity*, 4th edn., Translation by J. R. M. Radok, Noordhoff, Leyden, The Netherlands.
- (11) Lin, K. Y. and Tong, P., 1980, "Singular Finite Elements for the Fracture Analysis of V-Notched Plate," *Int. J. for Numer. Methods in Engineering*, Vol.15, pp. 1343~1354.