

〈論 文〉

임의 형상의 단면을 갖는 박판보의 유한요소해석

양응필* · 신호철**

(1995년 1월 27일 접수)

Finite Element Analysis of the Thin-Walled Beam with Arbitrary Cross Section

Woong-Pill Yang and Hyo-Chol Sin

Key Words : Warping(워핑), Shear-Locking(전단강성과잉), Curvature(곡률), Curvature-Based Element(곡률기저요소), Shear Center(전단중심)

Abstract

In this paper, a new thin-walled beam finite element is developed to overcome the difficulties in the analysis of real structures by existing beam elements. The element is formulated by extending Benscoter's assumption and also by adopting the concept of the curvature-based element. It is applicable to the analysis of the beams with arbitrary cross-sectional shapes. The results obtained show that the element is locking-free and the accuracy of the finite element solutions is remarkably improved.

1. 서 론

박판보(thin-walled beam)의 굽힘이나 비틀림에 대한 역학적 해석은 그 역사가 길지 않으며, 단면이 변형 후에도 평면상태로 유지된다는 Navier의 가정 하에서 굽힘에 대한 해석이 시작되어, Jourawski는 1850년대에 전단응력을 계산하는 식을 발표하였다. 한편 비틀림에 대한 해석은 St. Venant 이론을 적용하여 1896년에 Bredt가 원통형보를 해석하였고, 1903년에 Prandtl의 막막상사이론(membrane analogy theory)이 개발됨으로써 본격적으로 실제적인 문제에 대한 응용이 가능하게 되었다. 여기에 1905년 Timoshenko는 불균일한 비틀림의 경우를 고려한 일반적인 비틀림이론을 정리하였다.⁽¹⁾ 굽힘과 비틀림이 복합된 경우에 대한 연구는 1921년 Maillart에 의해 수행되었는데,

여기서 그는 비틀림없이 굽힘만이 발생하도록 전단력이 가해져야 하는 점, 즉 전단중심(shear center)의 개념을 도입하였다.

이러한 복합하중의 경우를 해석하기 위한 일반적인 이론의 개발은 Goodier⁽²⁾나 Timoshenko⁽³⁾등에 의해서도 시도되었으나 개 단면 보에 대한 포괄적인 이론이 정립된 것은 Vlasov⁽⁴⁾에 의해서였다. 그러나 폐 단면의 경우는 Jourawski의 식에 의하여 더 이상 전단응력을 계산할 수 없게 되었다. 이를 극복하기 위하여 Benscoter⁽⁵⁾는 가상적인 전단 변형률을 도입하였으며, 이에 따라 일반론의 개발은 일단락되었다.

그러나 이상의 이론들은 공학적인 근사이론이므로 여러가지 가정들을 포함하고 있는데 첫째로는 전단지연(shear lag)을 포함하고 있지 않다는 점⁽⁶⁻⁹⁾과, 둘째로는 단면이 그 평면 내에서는 변형되지 않는다는 점이다. 특히 후자의 가정은 보의 길이와 두께가 작아질수록 그리고, 폐 단면일 경우에 오차가 커지는 것으로 알려져 있다.⁽¹⁾

*서울대학교 대학원 기계설계학과

**회원, 서울대학교 기계설계학과

근래에 이르러 이러한 이론들을 바탕으로 박판보를 유한요소화하려는 노력들이 많이 있었다.^(10~14) Gunlagsson과 Pedersen,⁽¹⁰⁾ 그리고 Mottershead⁽¹¹⁾가 비틀림만을 고려한 결과를 발표하였으며, Tralli⁽¹²⁾가 굽힘과 비틀림을 고려한 hybrid model을 개발하였으나 단면에서의 자유도가 너무 많았다. 한편, Chen과 Blandford⁽¹⁴⁾는 Timoshenko의 보이론과 Vlasov의 이론을 적용하여 전단지연을 포함한 유한요소를 개발하였으나, 응용범위가 개단면인 경우로 한정되었고 전단강성과잉(shear locking)⁽¹⁵⁾이 나타나는 미해결된 문제점들을 남겨두고 있다.

본 논문에서는, Bencoter의 전단응력에 대한 가정을 확장함으로써 모든 경우의 단면 형상에 대하여 적용할 수 있는 워핑함수를 유도하였으며, 이를 바탕으로 개 단면, 폐 단면의 여부에 관계없이 사용할 수 있는 포괄적인 유한요소를 개발하였다. 또한 강성과잉을 제거하기 위하여 새롭게 정식화된 곡률요소(curvature-based element)^(16,17)를 도입함으로써 계산상의 효율성과 정확성을 크게 향상시켰다. 이에 따라 박판보요소에 있어서의 대부분의 문제점들을 해결하였으나, 위에서 언급한 두번째, 즉 Timoshenko의 가정에 관하여는 많은 연구를 필요로 한다.

2. 변위, 변형 및 응력

2.1 기본 가정

본 논문에서 사용한 가정들은 다음과 같다.

(1) 보요소는 균일 단면의 자기둥(prismatic bar)형태로서, 그 단면은 박판의 단면들로 구성되어 있다.

(2) 박판 단면의 중심선방향(contour direction) 전단응력 τ_{sx} 는 두께방향으로 St. Venant 비틀림 이론에서와 같은 분포를 갖는다.

(3) 단면의 도심을 지나는 축에 수직한 평면으로의 사영은 변형되지 않는다. 즉 단면은 그 평면 내에서는 강체로 취급할 수 있다.

(4) 박판 단면의 중심선방향 응력 σ_s 는 축방향 응력 σ_x 에 비해 무시할 수 있다.

여기서, 가정(3)과 (4)는 각각 ϵ_s 와 σ_s 를 무시하게 된다는 점에서 서로 상반되는 가정이지만, 뒤에서 논의되는 바와 같이 가정(3)은 변위들을 유도할 때 필요하다. 다만 단면의 강성이 큰 상태로 유지되도

록 단면이 보강되어 있으면 가정(3)에 의해 ϵ_s 를 무시하게 되며, 이 경우에는 뒤의 식들에서 탄성계수를 응력-변형률 관계식들로부터 유도된 아래 식으로 변경해야 한다.^(1,18)

$$E^* = \frac{E}{1-\nu^2} \quad (1)$$

또한 가정(2)는 Vlasov의 가정을 포함하여, 박판의 중심선에 대하여 기술하였던 Bencoter의 가정⁽⁵⁾을 두께방향으로도 적용시킬 수 있도록 확장한 것이다.

2.2 정규화된 단위워핑

굽힘해석의 경우는 개 단면과 폐 단면의 경우가 단면 형상에 대한 상수의 변화만으로 해결되므로, 여기서는 비틀림 해석에 필요한 워핑을 모든 경우의 단면에 적용할 수 있도록 유도한다. Fig. 1과 같이 전단중심 S에서 직선거리 r만큼 떨어져 있는 박판 단면에 대한 균일한 비틀림상태를 고려하자. 이 단면이 S를 중심으로 각도 ϕ 만큼 회전한다면, O점의 단면 중심선방향인 s방향 변위는 가정(3)에 의해 다음 식과 같다.

$$u_s = r\phi \quad (2)$$

또한, O점으로부터 두께방향으로 n인 위치의 점 A의 s방향 변위는 S를 중심으로 회전한 변위로서, 회전후 단면이 r에 수직해야 하므로, 식(2)의 변위에 A'점이 O'을 중심으로 다시 ϕ 만큼 회전한 변위가 더해진다.

$$u_s = (r+n)\phi \quad (3)$$

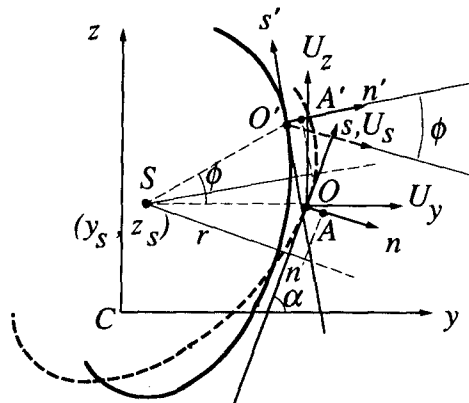


Fig. 1 Section geometry and displacements

St. Venant 전단응력을 τ^s 로 두면, 가정(2)로부터 다음과 같은 관계식을 얻는다.

$$\tau^s = G \frac{\partial u_x}{\partial s} + G \frac{\partial u_s}{\partial x} \quad (4)$$

여기서, x 에 대한 미분을 '으로 표시하면 축방향 변위는 단위워핑(unit warping)⁽⁴⁾에 의해 다음 식으로 주어진다.

$$u_x = -\omega \phi' \quad (5)$$

또한 τ^s 는 균일 비틀림하중의 경우에 대한 St. Venant 응력함수 Φ 를 사용하면 다음식과 같다.⁽¹⁹⁾

$$\tau^s = -G \frac{\partial \Phi}{\partial n} \phi' \quad (6)$$

한편, Φ 의 근사식은 다음과 같이 표현할 수 있으며,⁽¹⁸⁾

$$\Phi = \left(\frac{t^2}{4} - n^2 \right) + \frac{\Phi_h}{t} \left(\frac{t}{2} - n \right) \quad (7)$$

Φ_h 는 개 단면의 경우 0의 값을 갖고, 폐 단면의 경우는 공동 벽에서의 응력함수 값이 된다. 만일 공동의 폐 단면인 경우에 이 값은, 박판요소들의 중심선으로 둘러싸인 내부 면적의 두 배와 같은 다음 식으로 표현된다.

$$\Phi_h = 2A_h / \oint \frac{ds}{t} \quad (8a)$$

만일 여러개의 공동이 존재하는 경우에는 식 (8)은 각각의 공동에 대한 다음 식으로 대체된다.

$$\Phi_{hi} = 2A_{hi} / \oint_{s_i} \frac{ds}{t} \quad (8b)$$

식 (3)~(7)로부터

$$\omega = \int_0^s (\gamma + n) ds - \int_0^s \tau^* ds + Const. \quad (9a)$$

$$\tau^* = 2n + \frac{\Phi_h}{t} \quad (9b)$$

식 (9b)도 여러개의 공동이 존재하는 경우에는 아래식으로 바뀐다.

$$\tau_i^* = 2n + \frac{\Phi_{hi}}{t} \quad (9c)$$

식 (9a)의 적분상수는 단면에서 축방향 합력이 없으므로 다음 식을 만족하도록 결정한다.

$$\int_A \sigma_x dA = \int_A E \frac{\partial u_x}{\partial x} dA = 0 \quad (10)$$

식 (5), (10)으로부터,

$$\int_A \omega dA = 0 \quad (11)$$

이므로, 위의 상수를 계산하면 다음과 같다.

$$Const. = -\frac{1}{\oint t ds} \iint_0^s (r + n - \tau^*) ds t ds \quad (12)$$

식 (12)와 같이 상수가 결정되면 식 (9a)는 정규화된 단위워핑과 부호만 반대인 함수, 즉 $\omega = -\omega_n$ 가 되고, 이를 이용하면 식 (5)는 아래 식과 같이 된다.

$$u_x = \omega_n \phi' \quad (13)$$

2.3 변위

Fig. 1에서와 같이, 박판 단면의 중심선방향 접선이 y 축과 α 의 각도를 이루고 있다면, 가정(3)에 의해 다음과 같은 평면내의 변위들을 그림의 도식과 전단중심에 위치한 변위들로 표시할 수 있다.

$$u_y = U_{sy} - (z - z_s) \theta_x \quad (14a)$$

$$u_z = U_{sz} - (y - y_s) \theta_x \quad (14b)$$

$$u_x = U_{sx} \cos \alpha + U_{sz} \sin \alpha + (r + n) \theta_x \quad (14c)$$

한편, 사영된 단면의 x 축방향 변위는, Timoshenko 보이론에 의한 변위⁽²⁰⁾와, 2.2절에서 유도된 워핑변위인 식 (13)의 중첩으로 구할 수 있다.

$$u_x = U_{cx} + \theta_y z - \theta_z y + \omega_n \phi_x \quad (15)$$

이 식에서 ϕ_x 는 식 (13)의 ϕ' 이다. 식 (14), (15)를 살펴보면, 굽힘과 비틀림에서 이미 전단변형을 포함하고 있음을 알 수 있다. 즉, 다음의 관계식들이 성립하게 된다.

$$\theta_y \neq -\frac{dU_{sz}}{dx}; \theta_z \neq \frac{dU_{sy}}{dx}; \phi_x \neq \frac{d\theta_x}{dx} \quad (16)$$

2.4 변형 및 응력

가정(1)과 (4)에 의해 다음의 응력들은 모두 무시된다.

$$\sigma_s = \sigma_n = \tau_{xn} = \tau_{sn} = 0 \quad (17)$$

따라서 구해야 할 변형률은 ϵ_x 와 γ_{xs} 이다. 한편, 단면의 기하학적인 조건으로부터 다음의 관계식이 성립한다.

$$\frac{dy}{ds} = \cos \alpha ; \frac{dz}{ds} = \sin \alpha \quad (18)$$

우선 ϵ_x 는 식 (15)으로부터,

$$\epsilon_x = \frac{\partial u_x}{\partial x} = U'_{Cx} + \theta'_{y,z} - \theta'_z + \omega_n \phi'_x \quad (19)$$

γ_{xs} 는 식 (9), (14), (15), (18)로부터,

$$\begin{aligned} \gamma_{xs} &= \frac{\partial u_x}{\partial s} + \frac{\partial u_s}{\partial s} \\ &= (U'_{sy} - \theta_z) \cos \alpha + (U'_{sz} + \theta_y) \sin \alpha \\ &\quad + (r+n)(\theta'_x - \phi_x) + \tau^* \phi_x \end{aligned} \quad (20)$$

이 전단변형률을 각각 z 방향, y 방향의 굽힘과 x 방향의 비틀림에 의한 변형률로 분해하면 다음과 같다.

$$\gamma_{xs}^{bz} = (U'_{sy} - \theta_z) \cos \alpha \quad (21a)$$

$$\gamma_{xs}^{by} = (U'_{sz} + \theta_y) \sin \alpha \quad (21b)$$

$$\gamma_{xs}^t = (r+n)(\theta'_x - \phi_x) + \tau^* \phi_x \quad (21c)$$

상기 식 (21)은 각 하중의 경우에 대한 변형이 서로 독립임을 보여준다. 식 (19)로부터 x 방향 응력은 다음과 같다.

$$\sigma_x = E(U'_{Cx} + \theta'_{y,z} - \theta'_z + \omega_n \phi'_x) \quad (22)$$

전단응력은, 아래 식 (23)과 같이 굽힘과 비틀림 응력들을 정의하면, 식 (24)로 표현된다.

$$\tau_{xs}^{bz} = G\gamma_{xs}^{bz} = \tau_{xs}^{bz}; G\gamma_{xs}^{by}; \tau_{xs}^t = G\gamma_{xs}^t \quad (23)$$

$$\tau_{xs} = \tau_{xs}^{bz} + \tau_{xs}^{by} + \tau_{xs}^t \quad (24)$$

3. 단면 합력 및 가상일 정리

3.1 단면 합력

Fig. 2는 단면에서의 합력들을 나타낸다. 보의 축방향 힘은 C 가 단면중심인 사실과 워핑함수가 정규화된 단위워핑임을 감안하면 단면적에 대하여 다음과 같다.

$$N_{Cx} = \int_A \sigma_x dA = EA U'_{Cx} \quad (25)$$

중첩원리에 따라, y 방향의 전단력은 z 방향의 굽힘에 의해 발생하는 해당 전단응력만으로 결정된다.

$$V_{Sy} = \int_A \tau_{xs}^{bz} \cos \alpha dA = GA_{Sy}(U'_{Sy} - \theta_z) \quad (26)$$

마찬가지로, z 방향의 전단력은 다음과 같다.

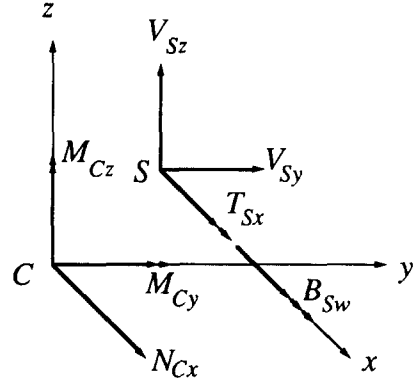


Fig. 2 Section resultant forces

$$V_{Sz} = \int_A \tau_{xs}^{by} \sin \alpha dA = GA_{Sz}(U'_{Sz} - \theta_y) \quad (27)$$

식 (26), (27)에서 전단면적 (shear area) 들은 다음 식과 같다.

$$A_{Sy} = \int_A \cos^2 \alpha dA ; A_{Sz} = \int_A \sin^2 \alpha dA \quad (28)$$

y, z 방향의 굽힘모멘트들은 좌표계가 주축과 일치함을 감안하면 각각 다음과 같다.

$$M_{Cy} = \int_A \sigma_x z dA = EI_{Cy} \theta'_y \quad (29)$$

$$M_{Cz} = - \int_A \sigma_x y dA = EI_{Cz} \theta'_z \quad (30)$$

여기서, y 축 및 z 축에 대한 관성모멘트들은 다음과 같다.

$$I_{Cy} = \int_A z^2 dA ; I_{Cz} = \int_A y^2 dA \quad (31)$$

x 방향의 비틀림모멘트도 비틀림 전단응력에 의해 서만 발생되므로 다음과 같이 표시된다.

$$\begin{aligned} T_{Sx} &= \int_A \tau_{xs}^t (r+n) dA \\ &= G \int_A (r+n)^2 dA (\theta'_x - \phi_x) \\ &\quad + G \int_A (r+n) \tau^* dA \phi_x \end{aligned} \quad (32)$$

식 (32) 우변 두번째 항의 계수는 전단응력에 전단중심으로부터의 거리를 곱하여 적분하였을 때의 계수인 비틀림강성 GJ 와 같으며, J 는 다음 식으로 표현된다.

$$\begin{aligned} J &= J_o + J_c \\ &= \frac{1}{3} \int t^3 ds + \sum_i \phi_{ni} (2A_{ni} + \int_i t ds) \end{aligned} \quad (33)$$

여기서, 식 (33) 우변의 첫째 항, 둘째 항을 나타내는 J_0 와 J_c 는 각각 개 단면, 폐 단면에 있어서의 강성에 대한 기어량이 된다. 즉, 개 단면의 경우는 J_c 가 0으로 되어 J_0 만이 사용되나, 폐 단면의 경우는 둘 다 강성을 구성하는 요소가 되는 것이다. 그 외 식 중의 합산은 여러개의 공동이 존재하는 경우를 포함하기 때문이다.

한편, 식 (32) 우변의 첫째 항에서 적분부분은 아래 식과 같고, 특히 I_{sr} 은 전단중심에 대한 관성 모멘트임을 유의해야 한다.

$$\int_A (r+n)^2 dA = \int_A r^2 dA + \int_A n^2 dA = I_{sr} + J_0 \quad (34)$$

$$I_{sr} = \int_A r^2 dA \quad (34a)$$

식 (33), (34)를 식 (32)에 대입하면, 비틀림모멘트는 다음 식과 같다.

$$T_{sx} = G(I_{sr} + J_0)(\theta'_x - \phi_x) + GJ\phi_x \quad (35)$$

이 모멘트는 단면에 대한 전체 모멘트로서 St. Venant 비틀림모멘트와 워핑 비틀림모멘트의 합이므로, 아래 식과 같이 이러한 모멘트들을 구할 수 있다. 즉, St. Venant 비틀림모멘트는,

$$T_{sx}^s = GJ\theta'_x \quad (36)$$

이므로, 식 (35), (36)으로부터 워핑 비틀림모멘트는

$$T_{sx}^w = T_{sx} - T_{sx}^s = G(I_{sr} - J_c)(\theta'_x - \phi_x) \quad (37)$$

이며, bimoment는 축방향응력에 워핑을 곱한 결과의 적분이므로 다음과 같다.

$$B_{sw} = \int_A \sigma_x \omega_n dA = EI_{sw} \phi'_x \quad (38)$$

여기서, $I_{sw} = \int_A \omega_n^2 dA$ 이다.

3.2 가상일 정리에 의한 평형방정식의 유도

체적 Ω , 길이 l 인 보요소를 고려하자. 여기에, 체적력 f_x, f_y, f_z , 분포하중 P_{cx}, P_{sy}, P_{sz} , 분포모멘트 C_{sx}, C_{cy}, C_{cz} 들이 작용하며, 보의 양단에 집중하중 P_{cx}, P_{sy}, P_{sz} , 집중모멘트 C_{sx}, C_{cy}, C_{cz} 등이 작용하는 경우, 가상일의 정리⁽¹⁹⁾로부터 다음 식이 유도된다.

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} (\bar{\epsilon}_x \sigma_x + \bar{\gamma}_{xs} \tau_{xs}) d\Omega \\ &= \int_{\Omega} (\bar{u}_x f_x + \bar{u}_y f_y) d\Omega + \int_l (\bar{U}_{cx} p_{cx} + \bar{U}_{sz} p_{sz} \\ & \quad + \bar{\theta}_x c_{sx} + \bar{\theta}_y c_{cy} + \bar{\theta}_z c_{cz}) dx + [\bar{U}_{cx} P_{cx} \\ & \quad + \bar{U}_{sy} P_{sy} + \bar{U}_{sz} P_{sz} + \bar{\theta}_x C_{sx} + \bar{\theta}_y C_{cy} + \bar{\theta}_z C_{cz}]_0^l \end{aligned} \quad (39)$$

여기서, $\bar{\epsilon}$ 는 가상변위와 가상변형률을 나타낸다.

식 (39) 좌변은 3.1 절에서 구한 바 있는 단면 합력들을 이용하여 아래와 같이 표현할 수 있다. 즉, 축방향응력에 의한 가상일은 식 (25), (29), (30), (38)으로부터,

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \bar{\epsilon}_x \sigma_x d\Omega \\ &= \int_l \int_A (\bar{U}'_{cx} + \bar{\theta}'_y z - \bar{\theta}'_z y + \bar{\phi}'_x \omega_n) \sigma_x dA dx \\ &= \int_l (\bar{U}_{cx} N_{cx} + \bar{\theta}'_y M_{cy} + \bar{\theta}'_z M_{cz} + \bar{\phi}'_x B_{sw}) dx \end{aligned} \quad (40)$$

이고, 전단응력에 의한 가상일은 식 (26), (27), (36), (37)로부터,

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \bar{\gamma}_{xs} \tau_{xs} d\Omega \\ &= \int_l \int_A (\bar{\gamma}_{xs}^{bz} + \bar{\gamma}_{xs}^{by} + \bar{\gamma}'_{xs}) \tau_{xs} dA dx \\ &= \int_l [(\bar{U}'_{sx} - \bar{\theta}_z) V_{sy} + (\bar{U}'_{sz} + \bar{\theta}_y) V_{sz} \\ & \quad + (\bar{\theta}_x - \bar{\phi}_x) T_{sx}^w + \bar{\theta}'_x T_{sx}^s] dx \end{aligned} \quad (41)$$

가 된다. 한편, 식 (39)의 우변중 체적력에 의한 일은, 식 (14)의 변위를 대입하여 전개하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} (\bar{u}_x f_x + \bar{u}_y f_y + \bar{u}_z f_z) d\Omega \\ &= \int_l \int_A \{[\bar{U}_{cx} + \bar{\theta}_y z - \bar{\theta}_z y + \bar{\phi}_x \omega_n] f_x \\ & \quad + [\bar{U}_{sy} - (z - z_s) \bar{\theta}_x] f_y \\ & \quad + [\bar{U}_{sz} + (y - y_s) \bar{\theta}_x] f_z\} dA dx \end{aligned} \quad (42)$$

이 식과 식 (39)의 외력에 의한 일의 항들을 합하여 정리하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} & \int_l (\bar{U}_{cx} n_{cx} + \bar{U}_{sy} v_{sy} + \bar{U}_{sz} v_{sz} + \bar{\theta}_x t_{sx} + \bar{\theta}_y m_{cy} \\ & \quad + \bar{\theta}_z m_{cz} + \bar{\theta}_z m_{cz} + \bar{\phi}_x b_{sw}) dx \\ & + [\bar{U}_{cx} P_{cx} + \bar{U}_{sy} P_{sy} + \bar{U}_{sz} P_{sz} + \bar{\theta}_x C_{sx} \\ & \quad + \bar{\theta}_y C_{cy} + \bar{\theta}_z C_{cz}]_0^l \end{aligned} \quad (43)$$

식 (43)에 새로이 도입된 하중들은 아래와 같이 정의된다.

$$n_{Cx} = p_{Cx} + \int_A f_x dA \quad (44a)$$

$$\nu_{Sy} = p_{Sy} + \int_A f_y dA \quad (44b)$$

$$\nu_{Sz} = p_{Sz} + \int_A f_z dA \quad (44c)$$

$$t_{Sx} = c_{Sx} + \int_A [(y - y_s) f_z - (z - z_s) f_y] dA \quad (44d)$$

$$m_{Cy} = c_{Cy} + \int_A z f_x dA \quad (44e)$$

$$m_{Cz} = c_{Cz} - \int_A y f_x dA \quad (44f)$$

$$b_{Sw} = \int_A \omega n f_x dA \quad (44g)$$

식 (39)에 식 (40), (41), (43)들을 대입하고, 각각의 단면 합력들을 3.1 절에서 구한 식들로 대체하면 식 (45)과 같은 최종적인 결과식을 얻게 된다.

$$\begin{aligned} & \int_l [\bar{U}_{Cx} E A U'_{Cx} + \bar{\theta}'_y E I_{Cy} \theta'_y \\ & + [\bar{U}'_{Sz} + \bar{\theta}_y] G A_{Sz} (U'_{Sz} + \theta_y) + \bar{\theta}'_z E I_{Cz} \theta'_z \\ & + [\bar{U}'_{Sy} + \bar{\theta}_z] G A_{Sy} (U'_{Sy} + \theta_z) + \bar{\phi}'_x E I_{Sw} \phi'_x \\ & + (\bar{\theta}'_x - \bar{\phi}_x) G (I_{Sr} - J_c) (\theta'_x - \phi_x) + \bar{\theta}_x G J \theta'_x] dx \\ & = \int_l (\bar{U}_{Cx} n_{Cx} + \bar{U}_{Sy} \nu_{Sy} + \bar{U}_{Sz} \nu_{Sz} + \bar{\theta}_x t_{Sx} \\ & + \bar{\theta}_y m_{Cy} + \bar{\theta}_z m_{Cz} + \bar{\phi}_x b_{Sw}) dx \\ & + [\bar{U}_{Cx} P_{Cx} + \bar{U}_{Sy} P_{Sy} + \bar{U}_{Sz} P_{Sz} \\ & + \bar{\theta}_x C_{Sx} + \bar{\theta}_y C_{Cy} + \bar{\theta}_z C_{Cz}] \delta \end{aligned} \quad (45)$$

4. 강성과잉의 제거와 유한요소 방정식의 유도

4.1 강성과잉의 제거

구조요소인 보요소나 평판요소 등에서 가상적인 전단에너지(spurious shear energy)가 포함됨으로 인해, 길이에 대한 두께의 비율이 작아짐에 따라 강성이 너무 크게 평가되어 결국 변위가 작게 계산되는 이 현상은 지금까지의 박판보에 대한 유한요소화 과정에서도 중요한 문제로 남아 있었다. 이를 해결하기 위하여 기존의 논문들에서는 혼합법(hybrid method)⁽²¹⁾ 또는 선택/감차적분법(selective/reduced integration)⁽²²⁾ 등을 사용하였으나, 본 논문에서는 새롭게 정식화된 곡률요소를 이용하여 이 문제를 극복하였다. 이 방법은, 유도된 범함수식의 변위미분치 중에서 최고차(굽힘변형의 경우

는 곡률이 된다.)에 대한 형상함수로부터 적분해 나가면서 차 상위 변위미분치에 대한 형상함수를 만들어 나가는 이론으로서, 그 과정에 평형식을 매개시킴으로써 전단에너지를 정확히 평가하게 된다.⁽¹⁶⁾

1차원 굽힘의 경우를 예로 들어 보면, 곡률은 다음 식으로 표현된다.

$$\kappa = \frac{d\theta}{dx} \quad (46)$$

따라서 회전각은 이의 부정적분 형태인 아래 식으로 된다.

$$\theta = \int \kappa dx \quad (47)$$

한편, 굽힘의 평형식으로부터

$$\frac{dM_b}{dx} + V = 0 \quad (48)$$

이며, 굽힘모멘트 M_b 와 전단력 V 에 대한 변위와의 관계식은 아래와 같다.

$$M_b = E I \kappa \quad (49)$$

$$V = G A k \left(\frac{dw}{dx} - \theta \right) \quad (50)$$

여기서, k 는 Timoshenko 가정에 따른 단면의 전단보정계수(shear correction factor)이다. 식 (48) ~ (50)으로부터 횡방향변위는 다음 식과 같다.

$$w = \int \theta dx - \lambda \int \frac{d\kappa}{dx} dx \quad (51a)$$

$$\lambda = \frac{E I}{G A k} \quad (51b)$$

이상으로부터, 식 (46)의 곡률에 대한 보간함수를 선택하면 식 (47), (51)에 의해 나머지 변위들에 대한 형상함수가 결정된다. 물론 이 과정중에 절점의 미지수가 곡률로부터 일반 변위들로 바뀌는 현상이 있게되며, 그 결과 외견상으로는 유한요소 방정식이 기존의 변위를 기초로 한 식 (15)와 다를 바 없게 된다.

박판보의 경우는 두 개의 굽힘전단응력과 비틀림전단응력을 포함한 3개의 강성과잉이 나타나게 되므로, 이 부분에 적용이 가능하였다. 형상함수의 유도과정에서, 박판보에서 평형이 성립되어야 하는 아래의 기본적인 세개 식을 사용하였다.

$$\frac{dM_{Cy}}{dx} - V_{Sz} = 0 \quad (52a)$$

$$\frac{dM_{Cz}}{dx} + V_{Sy} = 0 \quad (52b)$$

Table 1 Parameters defined in various loading modes corresponding to those in one-dimensional bending case

| | λ | κ | θ | w | V | M_b |
|----------------|----------------------------------|------------------------|------------|------------|------------|----------|
| y-axis bending | $\frac{E I_{Cy}}{G A_{Sz}}$ | $\frac{d\theta_y}{dx}$ | θ_y | $-U_{Sz}$ | $-V_{Sz}$ | M_{Cy} |
| z-axis bending | $\frac{E I_{Cz}}{G A_{Sy}}$ | $\frac{d\theta_z}{dx}$ | θ_z | U_{Sy} | V_{Sy} | M_{Cz} |
| x-axis torsion | $\frac{E I_{Sw}}{G(I_{Sr}-J_c)}$ | $\frac{d\phi_x}{dx}$ | ϕ_x | θ_x | T_{Sx}^w | B_{Sw} |

$$\frac{dB_{Sw}}{dx} + T_{Sx}^w = 0 \quad (52c)$$

또한 식 (46) ~ (51)에서 Table 1과 같이 변수들을 정의하면, 상수만 달라질 뿐 형상함수의 형태는 세 가지의 하중상태에 대하여 동일하다. 그 외에 축방향 인장에 대해서는 식 (48)과 같은 평형식이 존재하지 않으므로, 이를 제외하고 나머지의 과정을 수행하면 유사한 형상함수를 얻게 되며, 1차 보간요소의 경우에는 Hermite 계열의 형상함수⁽²²⁾와 동일한 결과를 얻는다.

4.2 유한요소 방정식

본 논문에서는 m 개의 절점을 가진 유한요소를 가정하여 식을 유도해 보기로 한다.^(16,17) 특히 주의할 점은, 4.1 절에서 논의된 곡률요소를 이용하게 되면 각 절점에서의 자유도가 모두 동일하지 않은 경우도 있다는 사실이다. 예를 들어 2차의 곡률 보간함수를 사용하게 되면 중간 절점에서의 자유도는 U_{Cx} , U_{Sy} , U_{Sz} , θ_x 들만 존재하게 된다. 그러나, 부분적인 자유도의 감소를 제외한 전체적인 계산방법은 큰 차이가 없으므로, 모든 절점에서의 자유도가 동일하다고 가정하고 정리해 보기로 한다.

먼저 x 축 인장에 대하여,

$$U^x = [U_{Cx1} \ U'_{Cx1} \ \cdots \ U_{Cx_m} \ U'_{Cx_m}]^T \quad (53)$$

$$U_{Cx} = S_w^x U^x \quad (54)$$

$$U'_{Cx} = B_w^x U^x \quad (55)$$

y 축 굽힘에 대해서는,

$$U^{by} = [-U_{Sz1} \ \theta_{y1} \ \cdots \ -U_{Sz_m} \ \theta_{y_m}]^T \quad (56)$$

$$U_{Sz} = -S_w^{by} U^{by} \quad (57)$$

$$\theta_y = S_\theta^{by} U^{by} \quad (58)$$

$$U'_{Sz} + \theta_y = \frac{E I_{Cy}}{G A_{Sz}} B_k^{by} U^{by} \quad (59)$$

$$\theta'_y = S_k^{by} U^{by} \quad (60)$$

z 축 굽힘에 대해서는,

$$U^{bz} = [U_{Sy} \ \theta_{z1} \ \cdots \ U_{Sy_m} \ \theta_{z_m}]^T \quad (61)$$

$$U_{Sy} = S_w^{bz} U^{bz} \quad (62)$$

$$\theta_z = S_\theta^{bz} U^{bz} \quad (63)$$

$$U'_{Sy} + \theta_z = -\frac{E I_{Cz}}{G A_{Sy}} B_k^{bz} U^{bz} \quad (64)$$

$$\theta'_z = S_k^{bz} U^{bz} \quad (65)$$

x 축 비틀림의 경우는,

$$U^t = [\theta_{x1} \ \phi_{x1} \ \cdots \ \theta_{x_m} \ \phi_{x_m}]^T \quad (66)$$

$$\theta_x = S_w^t U^t \quad (67)$$

$$\theta'_x = B_t^t U^t \quad (68)$$

$$\phi_x = S_\phi^t U^t \quad (69)$$

$$\theta'_x + \phi_x = -\frac{E I_{Sw}}{G(I_{Sr}-J_c)} B_k^t U^t \quad (70)$$

$$\phi'_x = S_k^t U^t \quad (71)$$

이상의 식 (53) ~ (71)들에 의해 식 (45)을 정리하면, 개개의 요소들의 합인 다음 식과 같다.

$$\begin{aligned} & \sum_i \int_{l_i} [(\overline{U^x})^T (\overline{B_w^x})^T E A \overline{B_w^x} \overline{U^x} \\ & + (\overline{U^{by}})^T (\overline{S_k^{by}})^T E I_{Cy} \overline{S_k^{by}} \overline{U^{by}} \\ & + (\overline{U^{by}})^T (\overline{B_k^{by}})^T \frac{E^2 I_{Cy}^2}{G A_{Sz}} \overline{B_k^{by}} \overline{U^{by}} \\ & + (\overline{U^{bz}})^T (\overline{S_k^{bz}})^T E I_{Cz} \overline{S_k^{bz}} \overline{U^{bz}} \\ & + (\overline{U^{bz}})^T (\overline{B_k^{bz}})^T \frac{E^2 I_{Cz}^2}{G A_{Sy}} \overline{B_k^{bz}} \overline{U^{bz}} \\ & + (\overline{U^t})^T (\overline{S_k^t})^T E I_{Sw} \overline{S_k^t} \overline{U^t} \\ & + (\overline{U^t})^T (\overline{B_k^t})^T \frac{E^2 I_{Sw}^2}{G(I_{Sr}-J_c)} \overline{B_k^t} \overline{U^t} \\ & + (\overline{U^t})^T (\overline{B_w^t})^T G J \overline{B_w^t} \overline{U^t}] dx \\ & = \sum_i \int_{l_i} [(\overline{U^x})^T (\overline{S_w^x})^T n_{Cx} \\ & + (\overline{U^{bz}})^T (\overline{S_w^{bz}})^T V_{Sy} + (\overline{U^{bz}})^T (\overline{S_\theta^{bz}})^T m_{Cz} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + (\overline{\mathbf{U}}^{by})^T (\overline{\mathbf{S}}_w^{by})^T \nu_{sz} + (\overline{\mathbf{U}}^{by})^T (\overline{\mathbf{S}}_o^{by})^T m_{cy} \\
 & + (\overline{\mathbf{U}}^t)^T (\overline{\mathbf{S}}_w^t)^T t_{sx} + (\overline{\mathbf{U}}^t)^T (\overline{\mathbf{S}}_o^t)^T t_{b\ sw}] dx \\
 & + \sum_l [\overline{\mathbf{U}}^x]^T (\overline{\mathbf{S}}_w^x)^T P_{cx} \\
 & + (\overline{\mathbf{U}}^{bz})^T (\overline{\mathbf{S}}_w^{bz})^T P_{sy} + (\overline{\mathbf{U}}^{bz})^T (\overline{\mathbf{S}}_o^{bz})^T P_{cz} \\
 & + (\overline{\mathbf{U}}^{by})^T (\overline{\mathbf{S}}_w^{by})^T P_{sz} + (\overline{\mathbf{U}}^{by})^T (\overline{\mathbf{S}}_o^{by})^T P_{cy} \\
 & + (\overline{\mathbf{U}}^t)^T (\overline{\mathbf{S}}_w^t)^T C_{sx}]_l' \quad (72)
 \end{aligned}$$

이제 유한요소의 변위벡터를 아래와 같이 두면,

$$\mathbf{U}_i = [\mathbf{U}_{cx1} \ \mathbf{U}_{sy1} \ \mathbf{U}_{sz1} \ \theta_{x1} \ \theta_{y1} \ \theta_{z1} \ \phi_{x1} \ \mathbf{U}'_{cx1} \ \dots \ \mathbf{U}_{cxm} \ \mathbf{U}_{sym} \ \mathbf{U}_{szm} \ \theta_{xm} \ \theta_{ym} \ \theta_{zm} \ \phi_{xm} \ \mathbf{U}'_{cxm}]^T \quad (73)$$

식 (72) 으로부터 i 번째 요소에 대한 강성행렬과 하중벡터는 식 (74), (75) 으로 표현할 수 있다.

$$\mathbf{K}_i = \mathbf{K}_i^x + \mathbf{K}_i^{by} + \mathbf{K}_i^{bz} + \mathbf{K}_i^t \quad (74a)$$

$$\mathbf{K}_i^x = \int_{l_i} (\tilde{\mathbf{B}}_w^x)^T \mathbf{E} \mathbf{A} \tilde{\mathbf{B}}_w^x dx \quad (74b)$$

$$\mathbf{K}_i^{by} = \int_{l_i} [(\tilde{\mathbf{S}}_k^{by})^T \mathbf{E} \ I_{cy} \tilde{\mathbf{S}}_k^{by} + (\tilde{\mathbf{B}}_k^{by})^T \frac{\mathbf{E}^2 I_{cy}^2}{G A_{sz}} \tilde{\mathbf{B}}_k^{by}] dx \quad (74c)$$

$$\mathbf{K}_i^{bz} = \int_{l_i} [(\tilde{\mathbf{S}}_k^{bz})^T \mathbf{E} \ I_{cz} \tilde{\mathbf{S}}_k^{bz} + (\tilde{\mathbf{B}}_k^{bz})^T \frac{\mathbf{E}^2 I_{cy}^2}{G A_{sy}} \tilde{\mathbf{B}}_k^{bz}] dx \quad (74d)$$

$$\mathbf{K}_i^t = \int_{l_i} [(\tilde{\mathbf{S}}_k^t)^T \mathbf{E} \ I_{sw} \tilde{\mathbf{S}}_k^t + (\tilde{\mathbf{B}}_k^t)^T \frac{\mathbf{E}^2 I_{sw}^2}{G (I_{sr} - J_c)} \tilde{\mathbf{B}}_k^t + (\tilde{\mathbf{B}}_w^t)^T G J \tilde{\mathbf{B}}_w^t] dx \quad (74e)$$

$$\mathbf{R}_i = \mathbf{R}_i^x + \mathbf{R}_i^{by} + \mathbf{R}_i^{bz} + \mathbf{R}_i^t \quad (75a)$$

$$\mathbf{R}_i^x = \int_{l_i} (\tilde{\mathbf{S}}_w^x)^T n_{cx} dx + [(\tilde{\mathbf{S}}_w^x)^T P_{cx}]_l' \quad (75b)$$

$$\mathbf{R}_i^{by} = \int_{l_i} [(\tilde{\mathbf{S}}_w^{by})^T \nu_{sz} + (\tilde{\mathbf{S}}_o^{by})^T m_{cy}] dx + [(\tilde{\mathbf{S}}_w^{by})^T P_{sz} + (\tilde{\mathbf{S}}_o^{by})^T C_{cy}]_l' \quad (75c)$$

$$\mathbf{R}_i^{bz} = \int_{l_i} [(\tilde{\mathbf{S}}_w^{bz})^T \nu_{sy} + (\tilde{\mathbf{S}}_o^{bz})^T m_{cz}] dx + [(\tilde{\mathbf{S}}_w^{bz})^T P_{sy} + (\tilde{\mathbf{S}}_o^{bz})^T C_{cz}]_l' \quad (75d)$$

$$\mathbf{R}_i^t = \int_{l_i} [(\tilde{\mathbf{S}}_w^t)^T t_{sx} + (\tilde{\mathbf{S}}_o^t)^T t_{b\ sw}] dx + [(\tilde{\mathbf{S}}_w^t)^T C_{sx}]_l' \quad (75e)$$

식 (74a) ~ (74d) 및 (75a) ~ (75d) 들에서 ~은, 변위벡터가 식 (73) 으로 바뀔에 따라 관계없는 자유도들에 대한 형상함수들을 0으로 추가함으로써 형성되는, 확장된 형상함수 벡터들을 의미한다. 이에 따라 식 (72) 은 다음과 같은 유한요소 방정식으로 변환된다.

$$\sum_l \mathbf{K}_l \mathbf{U}_l = \sum_l \mathbf{R}_l \quad (76)$$

5. 수치해석 결과

해석에 사용된 요소는 세 가지로서 곡률을 1차, 2차, 3차의 함수로 보간하였다. 특히 2차 함수로 보간한 요소의 경우는 중간 절점에서 θ_y , θ_z , ϕ_x , \mathbf{U}'_{cx} 들의 자유도가 존재하지 않음을 유의하여야 한다. 또한 3차 함수로 보간한 요소의 경우는 여러 개의 절점을 가진 요소도 가능할 수 있으나, 효율성의 측면에서 동일한 자유도를 갖는 3절점 요소를 사용하였다. 그 외 물성치는 계산의 편의상 다음과 같이 가정하였다.

$$E/G = 2.6 \quad (77)$$

이상을 이용하여 개 단면으로는 C형 보에 대하여, 그리고 폐 단면으로는 두개의 공동을 가진 사각 보에 대하여 해석을 수행하였다. 또한 개발된 요소의 정확성과 효율성을 검증하기 위하여, 여러 가지의 경계조건 및 하중조건하에서 해석하여 그 결과를 타 논문 및 이론해 등과 비교하였다.

기본적으로 하중은 세 개의 분포력 (P_{cx} , P_{sy} , P_{sz}) 과 분포된 비틀림모멘트 (C_{sx}) 가 동일한 형태의 함수를 가지도록 가정하였으며, 해석결과 중에서 전단변형비율 (percent shear deformation) 이란, 순수 전단에 의한 변위를 전단효과가 포함되지 않은 경우의 변위로 나눈 백분율을 의미한다.

5.1 개 단면 C형 보의 해석

Fig. 3은 보의 단면 형상을 보여주며 단면의 계수들은 다음과 같다. ⁽¹⁴⁾

$$A = \delta(2b + h) ; A_{sy} = 2bt ; A_{sz} = ht$$

$$I_{cy} = \left(\frac{h^3}{12} + \frac{bh^2}{2} \right) t$$

$$I_{cz} = \left[2 \left\{ \frac{b^3}{12} + b \left(\frac{b}{2} - f \right) \right\} + hf^2 \right] t$$

$$f = \frac{b^2}{2b + h} ; e = \frac{3b^2}{6b + h}$$

$$I_{sr} = \left\{ \frac{bh^2(6b + h)^2 + 18b^4h}{2(6b + h)^2} \right\} t$$

$$I_{sw} = \left(\frac{b^3h^2t}{12} \right) \left(\frac{3b + 2h}{6b + h} \right)$$

$$J = J_o = \frac{1}{3} (2b + h) t^3$$

해석과정에서 특별한 언급이 없는 한, 각 치수들의 상대적인 비율은 아래와 같이 규정한다.

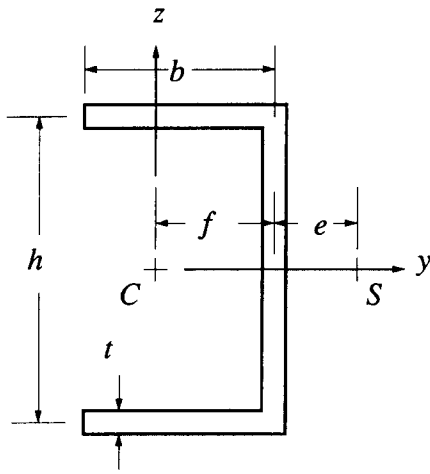
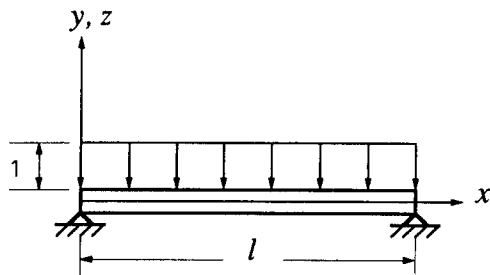
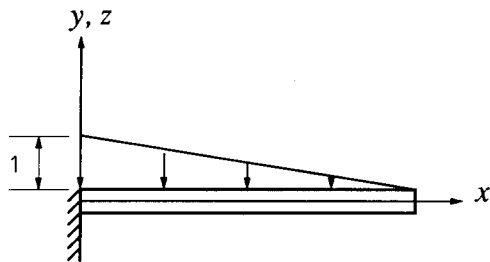


Fig. 3 Section geometry of a C-type channel



(a) Simply supported, $P_{Cx}=P_{Sy}=P_{Sz}=C_{Sx}=1-x$



(b) One end fixed and the other free, $P_{Cx}=P_{Sy}=P_{Sz}=C_{Sx}=1-x$

Fig. 4 Loading and boundary conditions for the C-type open section beam

$$l/h=7 ; b/h=3/8 ; t/h=0.1 \quad (78)$$

또한 Fig. 4는 해석에 사용한 두 가지의 경계조건과 하중조건을 보여주고 있다.

5.1.1 단순지지 경계조건과 균일하중이 가해지는 경우

Fig. 4의 (a)와 같은 경우에 대한 해석결과가

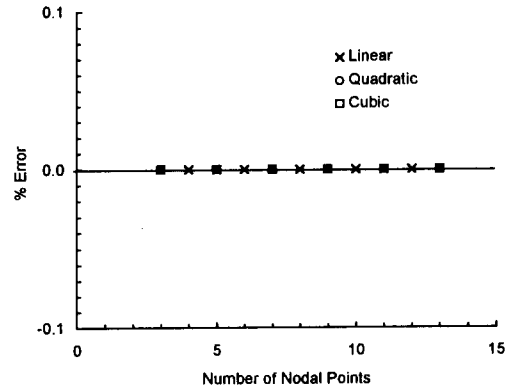


Fig. 5 Extension displacement errors versus mesh refinement for U_{cx} at $x=1/2$

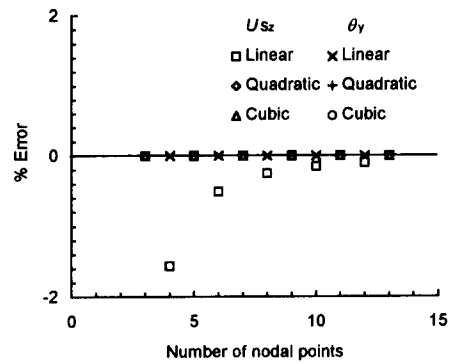


Fig. 6 Y-axis bending displacement errors versus mesh refinement for U_{sz} at $x=1/2$ and θ_y at $x=0$

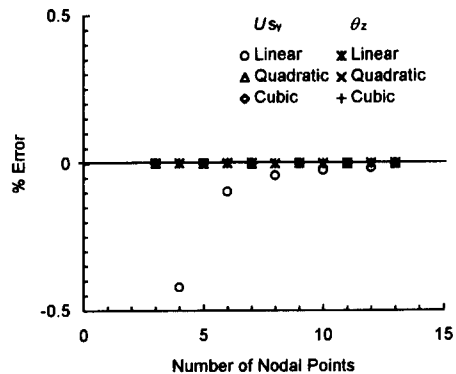


Fig. 7 Z-axis bending displacement errors versus mesh refinement for U_{sy} at $x=1/2$ and θ_z at $x=0$

Figs. 5~8에 도시되어 있다. 각각의 변위들은 크기가 가장 최대가 되는 점들에서 이론해와 비교되

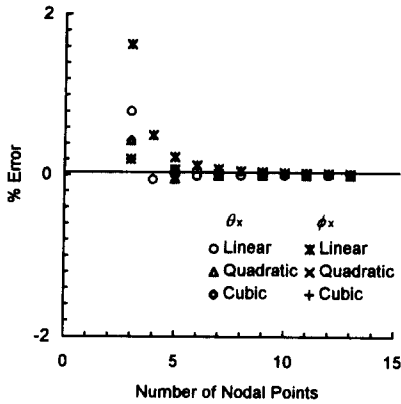


Fig. 8 Warping torsion displacement errors versus mesh refinement for θ_x at $x=0$ and ϕ_x at $x=0$

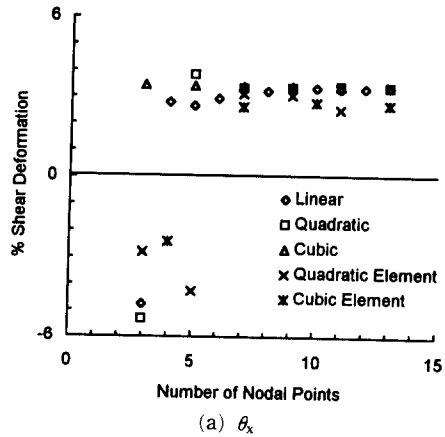
었으며, 비틀림변위의 경우는 이론해를 범함수로부터 유도된 미분방정식⁽²⁰⁾으로부터 얻을 수 있었다. 이는 본 논문에서의 범함수가 개 단면의 경우, 이미 발표된 논문에서와 같음으로 가능하였다.

결과들을 살펴보면, Fig. 5에서 Fig. 7까지의 인장이나 굽힘에 대한 변위들은 단 두 개의 1차 보간요소만을 사용해도 그 정확도가 매우 높은 것을 알 수 있다. 그 중에서 1차 보간요소의 해가 비안정적인 이유는, 변위를 평가하려는 점이 요소의 중간에 위치함으로 인해 절점의 변위들로 보간될 때 오차가 발생하기 때문이다. 이는 오차가 주기적으로 변화되는 형태에서도 알 수 있다. 또한 변위의 미분치들에 대한 오차도 요소의 수를 증가시키기에 따라 급속히 감소하며, 고차의 보간함수를 사용할 경우 그 오차가 거의 없음을 알 수 있다. 이와 같은 현상들은 절점의 수가 적은 경우를 제외하고는 Fig. 8의 비틀림에 관계된 변위들에서도 거의 같은 경향을 보이고 있다.

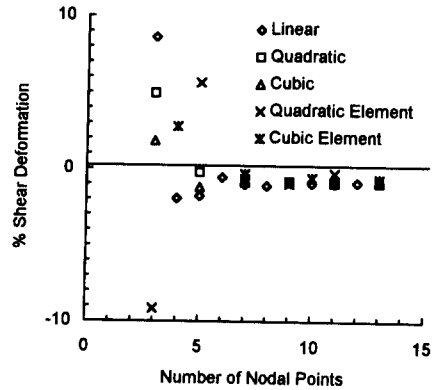
이상의 결과로부터 적용된 곡률요소가 아주 우수한 정확성과 효율성을 지니고 있음을 확인할 수 있다.

5.1.2 고정단 경계조건과 일차 선형하중이 가해지는 경우

Chen과 Blandford⁽¹⁴⁾의 결과와 본 논문에 의한 해석결과를 비교하기 위하여, Fig. 4의 (b)와 같은 문제를 해석하였으며, Table 2에 굽힘 및 비틀림에 대한 전단변형비율을 정리하였다. 표에서 나타난 바와 같이 굽힘하중의 경우에는 거의 비슷한 전



(a) θ_x



(b) ϕ_x

Fig. 9 Warping torsion shear deformations versus mesh refinement

단변형비율을 보여 주지만, 비틀림의 경우는 약간 상이한 결과를 얻을 수 있었다. Chen과 Blandford의 경우, 단면 높이에 대한 두께의 비율을 명시하지 않았으므로, 비틀림변형에 대해서는 정확한 비교가 되지 않을 수도 있다. 그러나 본 논문의 결과는, 정리된 바와 같이 범함수로부터 산출된 결과와 잘 일치하고 있다.

또한 Fig. 9에서는 비틀림변위에 대한 전단변형비율의 추이를 절점수의 증가에 따라 살펴 보았다. 그림 중에서 quadratic element와 cubic element로 표시된 자료는, 기존의 변위를 기초로 하여 개발된 유한요소를 이용한 해석결과를 나타낸다. 그림에서 알 수 있는 바와 같이, 기존의 유한요소가 나타내고 있는 해의 불안정성이 없이 점근적으로 수렴하고 있으며, 그 변화도 보간의 차수에 관계없이 7개의 절점 이상으로 분할되는 상태에서는 거의 무시할 수 있음을 보여준다.

Table 2 Comparison of the percent shear deformations for the C-type channel

| | b/h | Type | x/l | | | |
|-----------------|-----|-------------------------|--------|--------|--------|-------|
| | | | 1/4 | 1/2 | 3/4 | 1 |
| U _{Sz} | 3/8 | linear ^a | 34.098 | 16.424 | 10.285 | 7.185 |
| | | Quadratic ^a | 34.098 | 16.424 | 10.285 | 7.185 |
| | | Cubic ^a | 34.098 | 16.424 | 10.285 | 7.185 |
| | | Blandford ^b | 34.10 | 16.42 | 10.28 | 7.186 |
| U _{Sz} | 1/2 | linear | 41.967 | 20.214 | 12.658 | 8.844 |
| | | Quadratic | 41.967 | 20.214 | 12.658 | 8.844 |
| | | Cubic | 41.967 | 20.214 | 12.658 | 8.844 |
| | | Blandford | 41.97 | 20.21 | 12.66 | 8.844 |
| θ _x | 3/8 | linear | 4.768 | 2.126 | 1.482 | 1.246 |
| | | Quadratic | 4.792 | 2.149 | 1.504 | 1.269 |
| | | Cubic | 4.797 | 2.151 | 1.506 | 1.270 |
| | | Functional ^c | 4.796 | 2.151 | 1.506 | 1.270 |
| | 1/2 | Blandford | 3.968 | 1.845 | 1.154 | 0.792 |
| | | linear | 6.800 | 3.103 | 2.042 | 1.550 |
| | | Quadratic | 6.815 | 3.118 | 2.057 | 1.566 |
| | | Cubic | 6.817 | 3.119 | 2.058 | 1.567 |
| | | Functional | 6.816 | 3.119 | 2.058 | 1.567 |
| | | Blandford | 5.497 | 2.568 | 1.562 | 1.023 |

a : 12 elements for linear and 4 elements for quadratic and cubic interpolations used

b : Displacement-based 4 cubic elements used

c : Analytical solution obtained from the functional

5.2 폐 단면 사각보의 해석

Fig. 10은 두 개의 사각공동을 가진 보의 단면 형상을 보여주며 단면 계수들은 다음과 같다.

$$A=7at ; A_{sy}=4at ; A_{sz}=3at$$

$$I_{cy}=\frac{5}{4}a^3t ; I_{cz}=\frac{10}{3}a^3 ; I_{sr}=3a^3t$$

$$J=\frac{7}{3}at^3+\frac{8}{3}a^3t ; J_c=\frac{8}{3}a^3t ; I_{sw}=\frac{1}{18}a^5t$$

해석과정에서 특별한 언급이 없는 한, 각 치수들의 상대적인 비율은 아래와 같이 규정한다.

$$l/a=20 ; t/a=0.1 \quad (79)$$

Fig. 11은 해석에 사용한 두 가지의 경계조건과 하중조건이다.

5.2.1 단순지지 경계조건과 2차 함수의 하중이 가해지는 경우

여기서는 좀 더 고차의 분포하중을 부가하여 그 오차를 살펴보기로 한다. Figs. 12~15는 Fig. 11의 (a)와 같은 경우에 대한 해석결과를 나타낸다. 각각의 변위들은 크기가 가장 최대가 되는 점들에서 이론해와 비교되었으며, 비틀림변위의 경우는 Benscoter의 이론해⁽⁶⁾와 비교하기 위하여, 본 논문의 상수중에서 J_0 를 무시하였다. 또한, 이 상수는 두께가 작아질수록 0에 가까워지므로, 그러한 경우

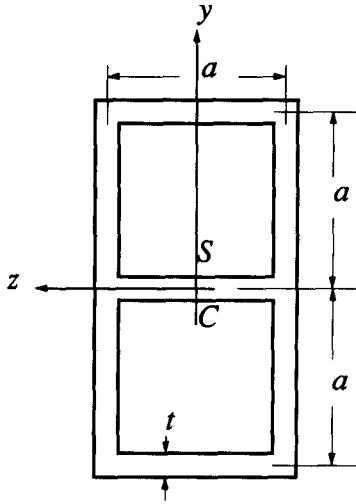
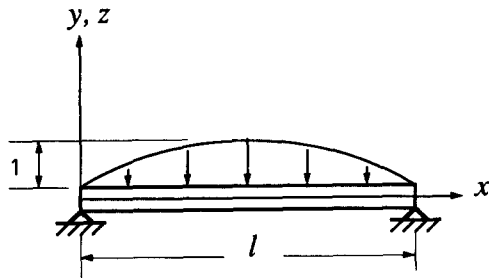
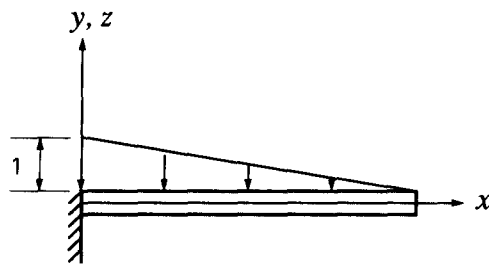


Fig. 10 Section geometry of a twin-box beam



(a) Simply supported, $P_{cx} = P_{sy} = P_{sz} = C_{sx} = 4x(1-x)$



(b) One end fixed and the other free, $P_{cx} = P_{sy} = P_{sz} = C_{sx} = 1-x$

Fig. 11 Loading and boundary conditions for the twin-box beam

에도 무시할 수 있다. 즉,

$$J = J_c \quad (80)$$

로 두었으며, 이는 실제로 Bencotter가 이론을 전개할 때 사용한 비틀림상수의 정의와 일치하며, 이

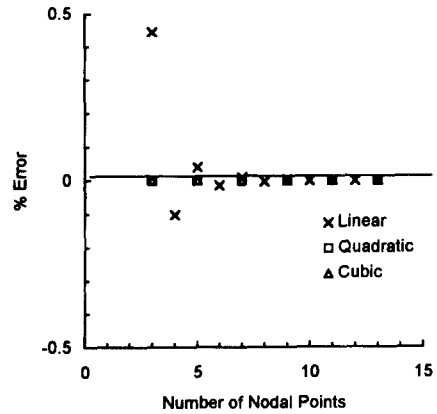


Fig. 12 Extension displacement errors versus mesh refinement for U_{cx} at $x=1/2$

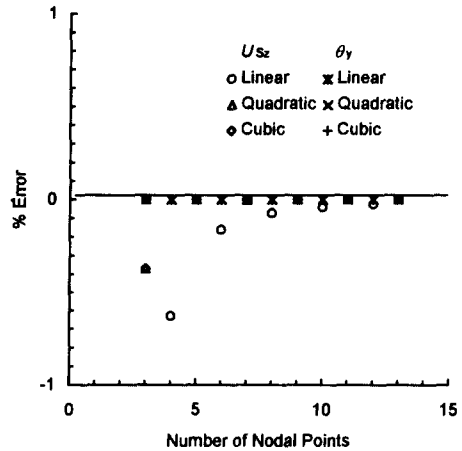


Fig. 13 Y-axis bending displacement errors versus mesh refinement for U_{sz} at $x=1/2$ and θ_y at $x=0$

경우 본 논문의 범함수로부터 유도되는 미분방정식은 그의 식과 일치한다.

결과들을 살펴보면, Fig. 12에서 Fig. 14까지의 인장이나 굽힘에 대한 변위들은 5.1.1 절 개 단면의 경우와 유사한 결과를 보인다. Fig. 15의 비틀림에 관계된 변위들도 거의 같은 경향을 보이고 있으며, ϕ_x 에서는 조금 증가된 오차가 나타나기도 하지만 무시할 만하다.

이상의 결과로부터, 본 논문에서 개발된 유한요소법이 폐 단면에 대해서도 훌륭히 적용될 수 있음을 확인하였다.

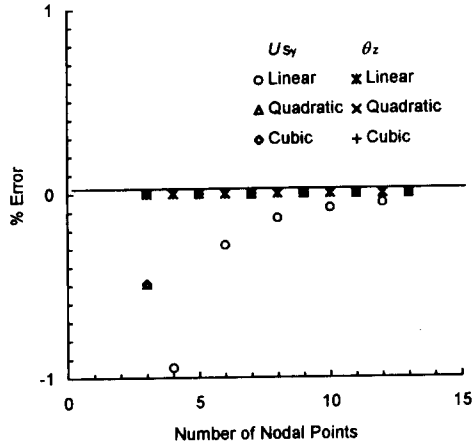


Fig. 14 Z-axis bending displacement errors versus mesh refinement for U_{Sy} at $x=1/2$ and θ_z at $x=0$

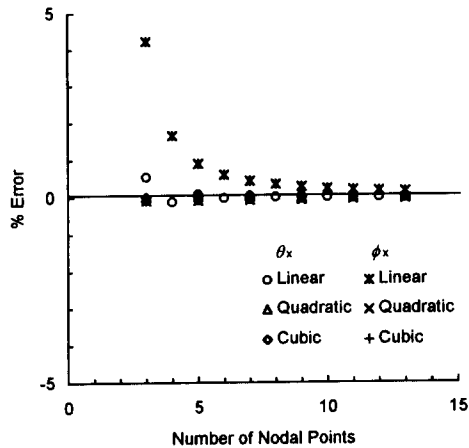


Fig. 15 Warping torsion displacement errors versus mesh refinement for θ_x at $x=0$ and ϕ_x at $x=0$

5.2.2 고정단 경계조건과 일차 선형하중이 가해지는 경우

경계조건 및 하중조건이 Fig. 11의 (b)와 같은 경우, 단면 높이에 대한 길이의 비율을 증가시키면서 전단변형비율의 추이를 살펴 보았다. 그 결과가 Fig. 16에 도시되어 있으며, (a)의 굽힘에 의한 결과는 보간함수에 따른 차이가 없는 것을 알 수 있다. 비틀림각도에 대한 비율은 (b)에 나타난 바와 같이, 1, 2차 보간요소의 경우에는 보의 길이가 길어질수록 오차가 다소 커진다. 이는 곡률로부터 유도된 비틀림각도에 대한 표현이 다른 변수들에 비

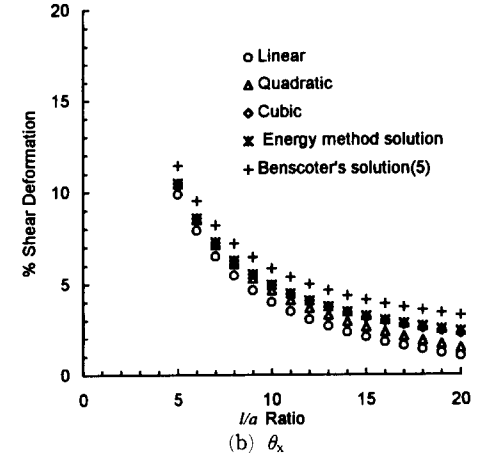
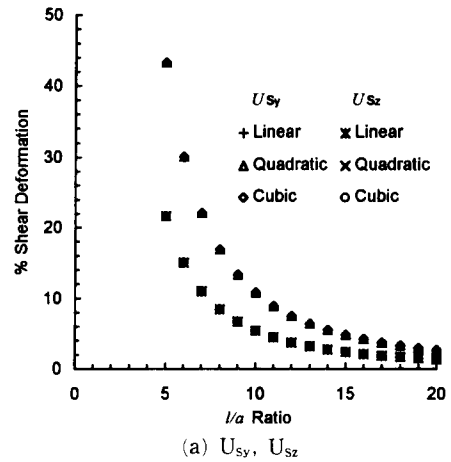


Fig. 16 Transition of shear deformation at $x=1$

해 다소 부정확함을 의미한다. 그러나 3차 보간 요소의 경우는 범함수로부터 유도된 이론해에 의하여 계산된 변형비율과 근소한 오차밖에 나타나지 않고 있으므로, 대형구조물의 해석시에 효율적으로 사용될 수 있을 것이다. 특히 주목할 점은, 이 문제의 해석에서는 J_0 를 무시하지 않은 관계로 Benscoter의 이론 해와 약 2%정도의 차이를 보이고 있으며, 이는 기존의 비틀림변위가 너무 크게 계산되었음을 감안하면 좀 더 실제에 접근한 결과로 판단된다.

6. 결 론

박판보의 단면 형상에 관계없이 적용할 수 있는 새로운 워핑함수를 유도하였으며, 이를 바탕으로 유한요소해석에 이용될 범함수를 도출하였다. 여기

에 새로 개발된 곡률요소를 사용하여 유한요소 방정식을 정립하고 해석프로그램을 작성, 운용하여 봄으로써 다음과 같은 결론을 얻었다.

(1) 개발된 유한요소는 단면 형상에 대한 제약을 극복할 수 있었으며, 기존의 개 단면과 폐 단면에 대한 이론들을 포괄하고 있다.

(2) 전에 사용되었던 유한요소의 문제점인 강성 과잉을 제거하였다.

(3) 해석상의 정확도가 현저히 향상되었으며, 기존의 3차 요소 4개 정도를 필요로 하는 해석의 경우를 2차나 3차 보간요소 3개로서도 충분히 표현할 수 있는 등 효율성이 양호함을 확인하였다.

후 기

본 연구는 1994년도 교육부 학술연구조성비(기계공학 : ME94-C-05)에 의해 연구되었으며, 이에 관계자 여러분께 감사드립니다.

참고문헌

(1) Gjelsvik, A., 1981, *The Theory of Thin Walled Beams*, John Wiley & Sons, New York.
 (2) Goodier, J. N., 1941, "The Buckling of Compressed Bars by Torsion and Flexure," Cornell University Engineering Station, Bulletin 27.
 (3) Timoshenko, S. P., 1945, "Theory of Bending Torsion and Buckling of Thin Walled Members of Open Cross Section," *J. Franklin Institute*, Vol. 239, Nos. 3, 4 and 5.
 (4) Vlasov, V. Z., 1961, "Thin-Walled Elastic Beams," Israel Program for Scientific Translations.
 (5) Bencoter, S. U., 1954 "A Theory of Torsion Bending for Multicell Beams," *J. Appl. Mech., March*, pp. 25~34.
 (6) Von Karman, Th. and Chien, W. Z., 1946, "Torsion with Variable Twist," *J. Aeronautical Sciences*, Vol. 13, pp. 503~510.
 (7) Reissner, E., 1979, "Some Considerations on the Problem of Torsion and Flexure of Prismatic Beams," *Int. J. Solids and Struct.*, Vol. 15, pp. 41~53.
 (8) Massonnet, C. E., 1983, "A New Approach

(Including Shear Lag) to Elementary Mechanics of Material," *Int. J. Solids and Struct.*, Vol. 19, pp. 33~54.
 (9) Hughes, T. J. R., Taylor, R. L. and Kanoknu-kuichai, W., 1977, "A Simple and Effective Element for Plate Bending," *Int. J. Numer. Methods Eng.*, Vol. 11, pp. 1529~1543.
 (10) Gunnlagsson, G. A. and Pedersen, P. T., 1982, "A Finite Element Formulation for Beams with Thin-Walled Cross-Section," *Comp. Struct.*, Vol. 5, pp. 691~699.
 (11) Mottershead, J. E., 1988, "Warping Torsion in Thin-Walled Open Section Beams Using the Semiloof Beam Element," *Int. J. Numer. Methods Eng.*, Vol. 26, pp. 231~243.
 (12) Tralli, A., "A Simple Hybrid Model for Torsion and Flexure of Thin-Walled Beams," *Comp. Struct.*, Vol. 22, pp. 649~658.
 (13) Lee, S. W. and Kim, Y. H., 1987, "A New Approach to the Finite Element Modelling of Beams with Warping Effect," *Int. J. Numer. Methods Eng.*, Vol. 24, pp. 2327~2341.
 (14) Chen, H. and Blandford, G. E., 1989, "A C⁰ Finite Element Formulation for Thin-walled Beams," *Int. J. Numer. Methods Eng.*, Vol. 28, pp. 2239~2255.
 (15) Bathe, K. J., 1982, *Finite Element Procedures in Engineering Analysis*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J.
 (16) Lee, Pal-Gap and Sin, Hyo-Chol, 1993, "Locking-Free Straight Beam Element Based on Curvature," *Communications in Numer. Methods Eng.*, Vol. 9, pp. 1005~1011.
 (17) 양승용, 이재관, 김식연, 신호철, 1993, "곡률 보요소에 의한 Timoshenko 보의 고유치문제 해석," 대한기계학회논문집, 제17권, 제11호, pp. 2694~2703.
 (18) Malvern, L. E., 1969, *Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J.
 (19) Sokolnikoff, I. S., 1956, *Mathematical Theory of Elasticity*, McGraw-Hill, New York.
 (20) Dym, C. L. and Shames, I. H., 1973, *Solid Mechanics : A Variational Approach*, McGraw

- Hill, New York.
- (21) Saleeb, A. F., Chang, T. Y. and Yingyeungong, S., 1988, "A Mixed Formulation of C^0 -Linear Triangular Plate/Shell Element-the Role of Edge Shear Constraints", *Int. J. Numer. Methods Eng.*, Vol. 26, pp. 1101~1128.
- (22) Prathap, G. and Bhashyam, G. R., 1982, "Reduced Integration and the Shear-flexible Beam Element," *Int. J. Numer. Methods Eng.*, Vol. 18, pp. 195~210.
- (23) Dhatt, G. and Touzot, G., 1984, *The Finite Element Method Displayed*, John Wiley & Sons, New York.