

〈論 文〉

## 체결력에 따른 볼트결합부의 동적 파라미터 해석

백성남\* · 지태한\*\* · 박영필\*\*\*

(1995년 1월 5일 접수)

### Dynamic Parameter Analysis of Bolted Joint

Sung-Nam Baek, Tae-Han Jee and Young-Pil Park

**Key Words** : Sensitivity Analysis(감도해석), Mode Energy Analysis(모드에너지 해석), Bolted Joint(볼트결합부), Joint Stiffness(결합부 강성)

#### Abstract

The dynamic characteristics of mechanical structure are strongly affected by the properties of joint parameters. In this study, the test structures are constructed with two beams which are clamped by bolts, and a bolted joint which is modelled as a lumped stiffness element. To identify the dynamic joint parameters with variance of clamping torque of bolts, the sensitivity analysis and the mode energy analysis methods are investigated experimentally. As a result of these two methods, stiffnesses of bolted joint are experimentally found to increase as the clamping torque increases. These stiffnesses identified from the sensitivity analysis and the mode energy analysis method have some difference.

#### 1. 서 론

기계구조물의 동특성을 해석하기 위하여 유한요소법에 의한 수치해석방법과 실험적 해석방법이 개발되고 널리 사용되고 있다. 일반적으로 기계구조물의 경우에 있어서 결합부의 동적 파라미터는 계 전체에 많은 영향을 미치게 되고, 여러 부분구조(분계)들과 부품들로 이루어져 있는 계의 정확한 결합부 파라미터를 규명하는 것은 쉽지 않으며, 또한 계의 감쇠행렬을 이론적으로 해석하는 것도 매우 곤란하다. 따라서 유한요소해석에서 결합부의 존재는 유한요소 모델의 오차를 크게 하며, 이 같은 결합부의 정확하고 유용한 유한요소 모델의 규명은 유한요소해석의 정확도를 높이는데 필요하다.

결합부의 동적 파라미터를 규명하기 위하여 Yoshimura<sup>(1,2)</sup>에 의해 여러가지 결합부에 대한 반복적인 방법이 제시되었으나, 이 방법은 반복계산의 과정을 사용하므로 많은 계산시간이 소모되었다. 또 Yuan 등<sup>(3)</sup>은 DDS(dynamic data system)와 유한요소법을 결합한 방법으로 기계구조물 결합부의 특성을 파악하는 방법을 제시하였다. 그러나 기계구조물의 수학적 모델을 구성하는 질량, 강성 및 감쇠행렬을 필요로 하므로 먼저 계의 특성을 가정해야 하는 곤란한 점이 있다. 한편, Tsai 등<sup>(4)</sup>은 기계구조물을 부분구조로 나누고 부분구조와 전체구조의 주파수응답함수를 이용하여 결합부 파라미터를 찾아내는 방법을 연구하였다. Wang 등<sup>(5)</sup>은 잡음이 혼입된 신호들로 이루어진 주파수 응답함수만으로 결합부의 파라미터를 찾아 동정하는 방법을 제시하였다. 그러나 이 방법은 크기 차이가 큰 강성행렬과 감쇠행렬을 하나의 복소수 행렬에 포함시킨 전달함수 데이터를 사용하므로, 계산상의 오차

\*현대자동차 마북리연구소

\*\*회원, 연세대학교 대학원 기계공학과

\*\*\*회원, 연세대학교 기계공학과

를 수반하게 될 가능성이 있다. 또 孫國<sup>(6,7)</sup> 등은 감도해석법을 이용하여 비감쇠계인 구조물의 유한요소해석에서 얻은 모드특성과 실험에서 얻은 결과를 비교하여 기존의 유한요소 모델을 수정하는 방법을 시도하였다. 이 방법은 설계변수의 변경이 유한요소해석의 모드특성 결과에 미치는 영향을 예측하여 설계변수를 비교적 짧은 계산시간 내에 찾아낼 수 있는 장점을 갖고 있다.

한편 大熊政明 등<sup>(8)</sup>은 대상구조물을 몇 개의 부분구조로 분할하고 통상의 진동실험으로부터 얻은 전달함수를 이용하여, 저차의 공진주파수 부근에서 대상구조물 내부의 파워흐름을 이용하여 각 부분구조의 내부 손실계수를 구하는 방법인 모드에너지 해석법을 제시하였다.

따라서 본 연구에서는 자체 제작한 모델 대상으로 체결력에 따른 강성의 변화를 살펴 봄으로써 체결력과 강성과의 관계를 밝히고, 이를 실제 구조물에 응용할 수 있는 기초를 제시하고자 한다. 이를 위하여 결합부의 위치가 다른 5개의 보구조물을 제작하였으며, 볼트결합부를 선형스프링과 회전스프링으로 단순화하여 모델링하고, 그 강성값을 감도해석으로 구하였다. 따라서 실험과 유한요소 해석을 병행하여 감도해석을 통한 강성값 획득의 타당성을 확인하였고, 결합부의 위치가 변하더라도 체결력에 따른 강성값은 일정함을 보였다. 또 감도해석법과 모드에너지 해석법에서 구한 강성값을 비교하여 두 방법의 정확성을 비교하여 보았다.

## 2. 이론해석

### 2.1 감도해석법

일반적으로 비감쇠계에 대한 고유치문제는 다음과 같이 표시된다.

$$\{\lambda_r[M] - [K]\}\{\phi_r\} = \{0\} \quad (1)$$

여기서,  $[M]$ ,  $[K]$ 는  $N \times N$ 의 질량, 강성행렬이고,  $\lambda_r$ 과  $\{\phi_r\}$ 는 각각  $r$ 번째의 고유치와 고유벡터이다. 설계변수  $\gamma$ 가  $\gamma_0$ 에서 미소량  $\varepsilon$ 만큼 변화됨에 따라서 변화되는 질량행렬과 강성행렬을 테일러 급수로 전개하면  $[M]$ ,  $[K]$ 는 초기값  $[M_0]$ ,  $[K_0]$ 에서 다음과 같이 바뀌게 된다.

$$\begin{aligned} [M] &= [M_0] + [M']\varepsilon + [M'']\varepsilon^2 + \dots \\ [K] &= [K_0] + [K']\varepsilon + [K'']\varepsilon^2 + \dots \end{aligned} \quad (2)$$

$$\text{여기서, } [M'] = \frac{\partial[M]}{\partial\gamma}, [M''] = \frac{\partial^2[M]}{2\partial\gamma^2} \dots$$

$$[K'] = \frac{\partial[K]}{\partial\gamma}, [K''] = \frac{\partial^2[K]}{2\partial\gamma^2} \dots$$

위의 식에서  $\varepsilon^2$  이상의 고차항을 무시하여 1차 감도로 표시한다. 또 설계변수의 변화에 따라서 고유치가  $\lambda_{or}$ 에서  $\lambda_r$ 로, 고유벡터가  $\{\phi_{or}\}$ 에서  $\{\phi_r\}$ 로 변할때 마찬가지로 고차항을 무시하고 1차 감도만 고려하면 다음과 같이 표시된다.

$$\lambda_r = \lambda_{or} + \left(\frac{\partial\lambda_r}{\partial\gamma}\right)\varepsilon = \lambda_{or} + \lambda'_r\varepsilon \quad (3)$$

$$\{\phi_r\} = \{\phi_{or}\} + \left(\frac{\partial\{\phi_r\}}{\partial\gamma}\right)\varepsilon = \{\phi_{or}\} + \{\phi'_r\}\varepsilon \quad (4)$$

여기서,  $\lambda_r = \Omega_r^2$ 이므로 고유진동수의 1차 감도는 다음과 같이 근사화된다.

$$\Omega'_r = \frac{\partial\Omega_r}{\partial\gamma} = \frac{\lambda'_r}{2\Omega_{or}} \quad (5)$$

식 (1)에 (2), (3) 및 (4)식을 대입하여  $\varepsilon^2$  이상의 고차항을 무시하면 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned} (\lambda_{or}[M_0] - [K_0])\{\phi'_r\} + (\lambda_{or}[M'] + \lambda'_r[M_0] \\ - [K'])\{\phi_{or}\} = \{0\} \end{aligned} \quad (6)$$

이 식의 첫번째 항은 식 (1)에 의해 0이 되고, 또 고유벡터가 정규화되었다면 이 식의 양변에  $\{\phi_{or}\}^T$ 를 앞에 곱해주고 정리하면, 고유치의 1차 감도는 다음과 같게 된다.

$$\lambda'_r = \{\phi_{or}\}^T ([K'] - \lambda_{or}[M'])\{\phi_{or}\} \quad (7)$$

또한 고유진동수의 1차 감도는 식 (5)에 의해 다음과 같다.

$$\Omega'_r = \frac{\{\phi_{or}\}^T ([K'] - \Omega_{or}^2[M'])\{\phi_{or}\}}{2\Omega_{or}} \quad (8)$$

한편 고유벡터의 1차 감도  $\{\phi'_r\}$ 은  $N$ 차원의 벡터이므로  $N$ 개의 고유벡터  $\{\phi_{oi}\}$  ( $i=1 \sim N$ )의 1차 결합으로 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$\{\phi'_r\} = \sum_{i=1}^N a_{ri}\{\phi_{oi}\} \quad (9)$$

위의 식을 식 (6)에 대입하고 정리하면,  $r \neq i$ 인 경우에는

$$a_{ri} = \frac{\{\phi_{oi}\}^T (\lambda_{or}[M'] - [K'])\{\phi_{or}\}}{(\lambda_{oi} - \lambda_{or})} \quad (10)$$

이고, 또 질량행렬을 고유벡터로 정규화한 식을 설

계변수  $\gamma$ 로 미분하여 정리하면

$$a_{rr} = -\frac{\{\phi_{or}\}^T [M'] \{\phi_{or}\}}{2} \quad (11)$$

이다. 따라서 식 (10)과 (11)을 식 (9)에 대입하면 고유벡터의 1차 감도  $\{\phi'_r\}$ 을 구할 수 있다.

### 2.2 설계변경량의 결정

설계변수의 미소변경량 벡터를  $\{\Delta\gamma\}$ , 실험모드 해석에서 구한 모드특성(고유진동수, 고유벡터) 벡터를  $\{\theta_E\}$ , 설계변경전 유한요소법으로 구한 모드 특성 벡터를  $\{\theta_o\}$ , 각 설계변수  $\gamma$ 에 대한 각각의 모드특성  $\theta$ 의 1차 감도행렬을  $[Z]$ 라 하면  $\{\theta_r\}$ 와  $\{\Delta\gamma\}$ 와의 관계는 다음과 같은 1차의 선형근사식의 형태로 표현할 수 있다.

$$\{\theta_r\} = \{\theta_o\} + [Z]\{\Delta\gamma\} \quad (12)$$

여기서, 설계변경에 이용되는 변수가  $m$ 개이고, 추종하고자 하는 실험결과의 모드특성 파라미터가  $n$  차원일 경우 식 (12)의 각 항은 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} \{\Delta\gamma\} &= [\Delta\gamma_1 \ \Delta\gamma_2 \ \dots \ \Delta\gamma_m]^T \\ \{\theta_r\} &= [\theta_{E1} \ \theta_{E2} \ \dots \ \theta_{En}]^T \\ \{\theta_o\} &= [\theta_{o1} \ \theta_{o2} \ \dots \ \theta_{on}]^T \\ Z &= \begin{bmatrix} \frac{\partial\theta_1}{\partial\gamma_1} & \frac{\partial\theta_1}{\partial\gamma_2} & \dots & \frac{\partial\theta_1}{\partial\gamma_m} \\ \frac{\partial\theta_2}{\partial\gamma_1} & \frac{\partial\theta_2}{\partial\gamma_2} & \dots & \frac{\partial\theta_2}{\partial\gamma_m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial\theta_n}{\partial\gamma_1} & \frac{\partial\theta_n}{\partial\gamma_2} & \dots & \frac{\partial\theta_n}{\partial\gamma_m} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (13)$$

또한  $\{\theta_E\} - \{\theta_o\} = \{\Delta\theta\}$ 라 정의하면 식 (12)는 다음과 같다.

$$[Z]\{\Delta\gamma\} = \{\Delta\theta\} \quad (14)$$

설계변수의 미소변경량 벡터  $\{\Delta\gamma\}$ 는 다음의 두가지 경우에 대해 각각 최소자승법(least square method)과 의사역행렬법(pseudo inverse method)으로 구할 수 있다.

$$\{\Delta\gamma\} = ([Z]^T [W] [Z])^{-1} [Z]^T [W] \{\Delta\theta\} \quad (m < n) \quad (15)$$

$$\{\Delta\gamma\} = [Z]^T ([Z][Z]^T)^{-1} \{\Delta\theta\}, \quad (m \geq n) \quad (16)$$

여기서,  $[W]$ 는 가중행렬로서 실험과 유한요소해석

과의 고유진동수 차이벡터와 고유모드 차이벡터의 최대값이 같은 값이 되도록 결정하였다. 즉 고유진동수의 값이 고유모드의 값보다 차수(order)가 높기 때문에 오차를 발생시킬 수 있으므로 같은 차수를 갖게 가중행렬로 조절하였다.

위의 식에서 계산된  $\{\Delta\gamma\}$ 를 이용하면 새로운 설계변수는 다음과 같이 된다.

$$\{\gamma\} = \{\gamma_o\} + \alpha \{\Delta\gamma\}, \quad 0 < \alpha \leq 1 \quad (17)$$

초기 유한요소 모델의 설계변수값에 위의 식에서 구한 변경량  $\{\Delta\gamma\}$ 을 대입하여 개선시킨 유한요소 모델은 동특성의 1차 감도를 선택한 근사식을 이용하기 때문에 실제 구조물의 진동특성과 일치하지 않는다. 따라서 개량시킨 값을 초기값으로 다시 사용하여 두 값의 차이가 목표값에 수렴할 때까지 반복 계산한다. 이때 변경량이 초기 값에 비해 크게 되면 수렴시에 문제가 생기므로 가중치  $\alpha$ 를 조절하여 수렴의 안정성을 보장한다. 일반적으로 가중치가 작으면 수렴성은 증가하나 수렴속도가 늦게되고, 가중치가 크면 수렴속도는 증가하나 발산할 가능성이 커지게 된다. 또 초기값이 목표값에서 지나치게 벗어나 있으면 물리적 의미가 없는 값으로 수렴하거나 발산하게 되므로, 초기값 선정시 주의해야 한다.

### 2.3 모드에너지 해석법

전체 구조물을 Fig. 1에서와 같이 두개의 분계와 탄성결합부로 분할한 경우 에너지 평형방정식은 다음의 두 경우에 대하여 구성할 수 있다.

우선 분계 1을 가진할 경우의 에너지 평형방정식은 다음과 같다.<sup>(9)</sup> 여기서  $\mu$ 는 내부 손실계수로서 소산파워의 시간평균값과 진동에너지의 시간평균값의 비로 정의된다.

$$\begin{aligned} \mu_{11} E_{11} + W_{11} &= P_1 \\ \mu_{22} E_{12} - W_{11} &= 0 \end{aligned} \quad (18)$$

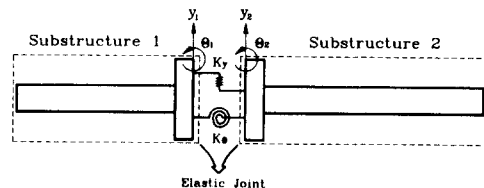


Fig. 1 Analysis model composing 2 substructures

여기서,  $\mu_{11}$  : 분계 1의 내부 손실계수 (1/sec)

$\mu_{22}$  : 분계 2의 내부 손실계수 (1/sec)

$E_{11}$  : 분계 1의 진동에너지의 시간평균값  
(Nm)

$E_{12}$  : 분계 2의 진동에너지의 시간평균값  
(Nm)

$W_{11}$  : 분계 1에서 분계 2로 전달되는 파워  
의 시간평균값  
(Nm/sec)

$P_1$  : 분계 1에 주어지는 입력파워의 시간  
평균값 (Nm/sec)

또 분계 2를 가진할 경우의 에너지 평형방정식은  
다음과 같다.

$$\begin{aligned} \mu_{11}E_{21} - W_{22} &= 0 \\ \mu_{22}E_{22} + W_{22} &= P_2 \end{aligned} \quad (19)$$

여기서,  $E_{21}$  : 분계 1의 진동에너지의 시간평균값

$E_{22}$  : 분계 2의 진동에너지의 시간평균값

$W_{22}$  : 분계 2에서 분계 1로 전달되는 파워  
의 시간평균값

$P_2$  : 분계 2에 주어지는 입력파워의 시간  
평균값

구성된 에너지 평형방정식중 우선 분계 1을  
 $f(t) = Fe^{j\omega t}$ 로 가진할 경우 가진점의 속도는 다음  
식과 같다.

$$v_f(t) = V_f e^{j\omega t} = H_f(\omega) F e^{j\omega t} \quad (20)$$

여기서,  $H_f(\omega)$ 는 가진점의 모빌리티(mobility)이  
다. 또 입력파워의 시간평균값은 다음과 같다.<sup>(10)</sup>

$$P_1 = \frac{1}{T} \int_0^T \text{Re}\{f(t)\} \text{Re}\{v_f(t)\} dt, \quad T = \frac{2\pi}{\omega} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} F^2 \text{Re}\{H_f(\omega)\} = \frac{1}{4} F (V_f + V_f^*) \\ & \quad (* : \text{conjugate}) \end{aligned} \quad (22)$$

또, 감쇠가 비교적 작은 1자유도계의 공진주파수  
부근에서는 근사적으로 운동에너지와 위치에너지가  
같다고 할 수 있으므로, 1자유도계의 진동에너지의  
시간평균값(단위시간당의 운동에너지와 위치에너지  
의 합)  $E_o$ 는 다음과 같다.

$$E_o = \frac{1}{2} m_o V_o V_o^* \quad (23)$$

이 식을 다자유도계로 확장시켜, 분계 1을 공진주

파수로 가진할 경우 분계 1과 분계 2의 진동에너지  
의 시간평균값을 구하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} E_{11} &= \frac{1}{4} (\{V_1\}^T [M_1] \{V_1^*\} + \{V_1^*\}^T [M_1] \{V_1\}) \\ E_{12} &= \frac{1}{4} (\{V_2\}^T [M_2] \{V_2^*\} + \{V_2^*\}^T [M_2] \{V_2\}) \end{aligned} \quad (24)$$

여기서,  $[M_1]$ ,  $[M_2]$ 는 분계 1과 분계 2의 질량행렬  
이고,  $\{V_1\}$ ,  $\{V_2\}$ 는 분계 1과 분계 2의 속도크기 벡  
터이다. 한편 분계 1에서 분계 2로 전달되는 파워  
의 시간평균값  $W_{11}$ 은 다음과 같이 나타낼 수 있  
다.<sup>(8)</sup>

$$W_{11} = K_y Q_{1y} + K_\theta Q_{1\theta} \quad (25)$$

여기서,  $K_y$ 는 병진방향의 선형강성값,  $K_\theta$ 는 회전  
방향의 회전강성 값이며,  $Q_{1y}$ ,  $Q_{1\theta}$ 는 다음 식과 같  
다.

$$Q_{1y} = \frac{1}{4} \{ \dot{y}_1 (y_1^* - y_2^*) + \dot{y}_1^* (y_1 - y_2) \} \quad (26)$$

$$Q_{1\theta} = \frac{1}{4} \{ \dot{\theta}_1 (\theta_1^* - \theta_2^*) + \dot{\theta}_1^* (\theta_1 - \theta_2) \} \quad (27)$$

분계 2를 가진할 경우에도 각 분계내의 변위와 속  
도 응답을 이용하여  $P_2$ ,  $E_{21}$ ,  $E_{22}$ ,  $W_{22}$ 를 계산할 수  
있으며,  $W_{22} = K_y Q_{2y} + K_\theta Q_{2\theta}$ 라 정의하면 에너지 평  
형방정식은 다음과 같이 새롭게 구성할 수 있다.

$$\begin{aligned} \mu_{11}E_{11} + K_y Q_{1y} + K_\theta Q_{1\theta} &= P_1 \\ \mu_{22}E_{12} - K_y Q_{1y} - K_\theta Q_{1\theta} &= 0 \\ \mu_{11}E_{21} - K_y Q_{2y} - K_\theta Q_{2\theta} &= 0 \\ \mu_{22}E_{22} + K_y Q_{2y} + K_\theta Q_{2\theta} &= P_2 \end{aligned} \quad (28)$$

위의 식에서 미지수  $\mu_{11}$ ,  $\mu_{22}$ ,  $K_y$ ,  $K_\theta$ 를 제외한 항들  
은 가진주파수에 의해 결정된다. 따라서 각 분계를  
공진 주파수로 가진할 경우 분계의 변위 및 속도응  
답으로부터 에너지 평형방정식인 식 (28)을 구성하  
여  $\mu_{11}$ ,  $\mu_{22}$ ,  $K_y$ ,  $K_\theta$ 를 구할 수 있다.

### 3. 실험장치 및 방법

결합부의 강성을 동정하기 위해 Fig. 2와 같이  
양 끝단이 자유상태인 5개의 원형보 모델을 구성한  
다. 각 모델들은 2개의 분계인 보로 구성되어 있으  
며 플랜지부분이 볼트로 결합된다. 각 모델의 재질  
은 SM45C이며 결합부는 6개의 렌치 볼트로 결합  
된다. Fig. 2의 실험 대상물에 대한 수학적 모델링

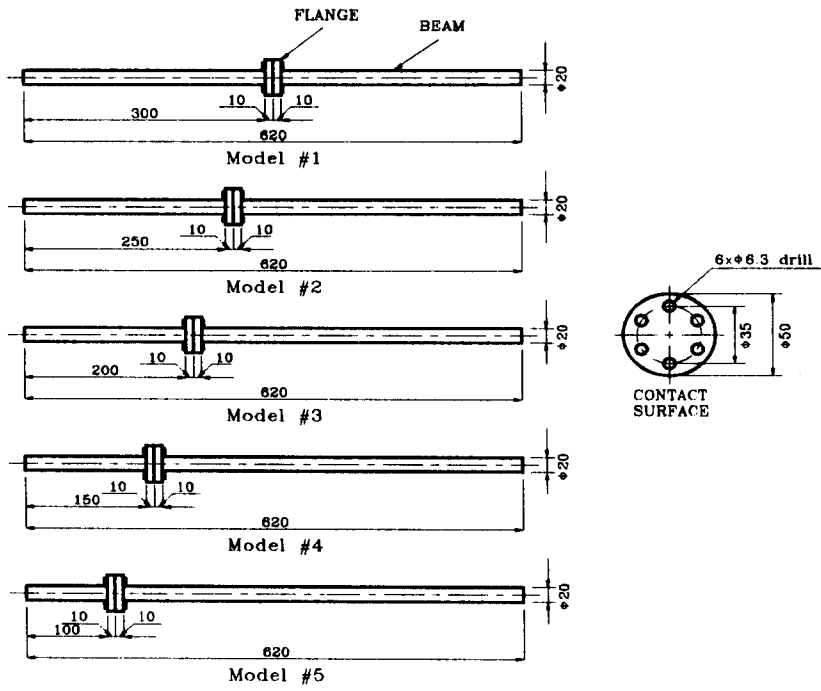


Fig. 2 Models for experiment

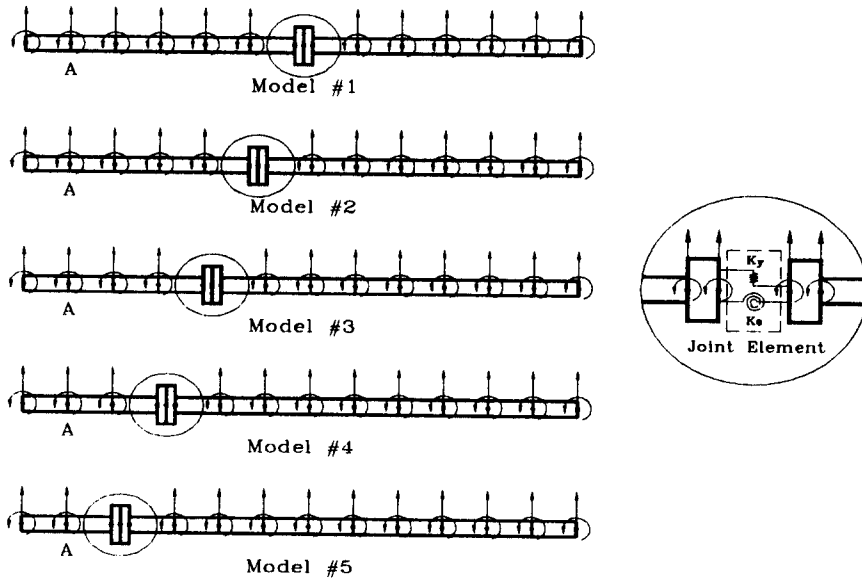


Fig. 3 Models for finite element analysis

을 Fig. 3에 나타내었다. 여기서 직선과 반원의 화살표는 각각 병진과 회전자유도를 나타낸다.

요소수의 차이에 의한 유한요소해석 결과의 차이가 나타나지 않도록 각 모델을 양 분계의 플랜지 부분과 결합 부분을 포함하여 도시한 바와 같이 총 15개의 요소로 분할하여 유한요소해석을 수행하였다.<sup>(10)</sup> 즉, 전체 구조물은 결합부 강성요소 1개와 길이가 50 mm이고 직경이 20 mm인 12개의 보요소 그리고 길이가 10 mm이고 직경이 50 mm인 2개의 보요소로 구성된다. 결합부 요소는 결합영역의 병진과 회전 자유도에 관련된 두 개의 집중강성, 즉 병진방향의 선형강성  $K_y$ 와 회전방향의 회전강성  $K_\theta$ 로 모델링하였다.

여기서, 유한요소 모델에 사용한 물성치는 각 분계를 실험하여 구한 고유진동수와 유한요소해석 결과를 비교하여 구하였다. 즉, 유한요소 모델의 정당성을 확보하기 위하여, 각 분계의 유한요소해석 결과와 실험의 결과를 비교하여 각 분계의 유효 굽힘강성값(EI)을 구하였으며, 밀도는 질량을 측정 한 후 계산된 부피로 나누어 구하였다.

또, Fig. 2에 보인 바와 같이 플랜지부분의 직경이 다른 부분에 비해 크므로 이를 유효반경 등으로

모델링하여야 정확한 볼트결합부의 강성을 구할 수 있으나, 본 연구에서는 이를 무시하였다. 따라서 이하의 과정에서 얻어지는 결과는 볼트를 포함한 커플링계의 강성값이라고 하는 것이 더욱 타당할 것이다.

실험에 사용된 볼트결합부를 가진 보구조물은 양단이 자유상태가 되도록 Fig. 4에 나타낸 바와같이 약한 스프링으로 지지하여 실험모드해석을 수행하였으며, 충격가진 점의 수는 Fig. 3의 유한요소 모델의 절점의 수와 같이 16 지점이고, 충격가진방향은 각 절점의 병진방향과 같다. 가속도의 측정점은 Fig. 3의 A점에 위치한다. 모달파라미터는 LMS CADA-X의 모달해석중 최소자승 복소지수법 (least square complex exponential method)을 이용하여 구하였다.<sup>(11)</sup>

## 4. 실험결과

### 4.1 감도해석법

본 해석법의 적용을 위해 먼저 모델 #1과 모델 #2에 충격가진실험을 수행하여 얻은 체결토오크에 따른 고유진동수와 감쇠비는 Table 1, Table 2와

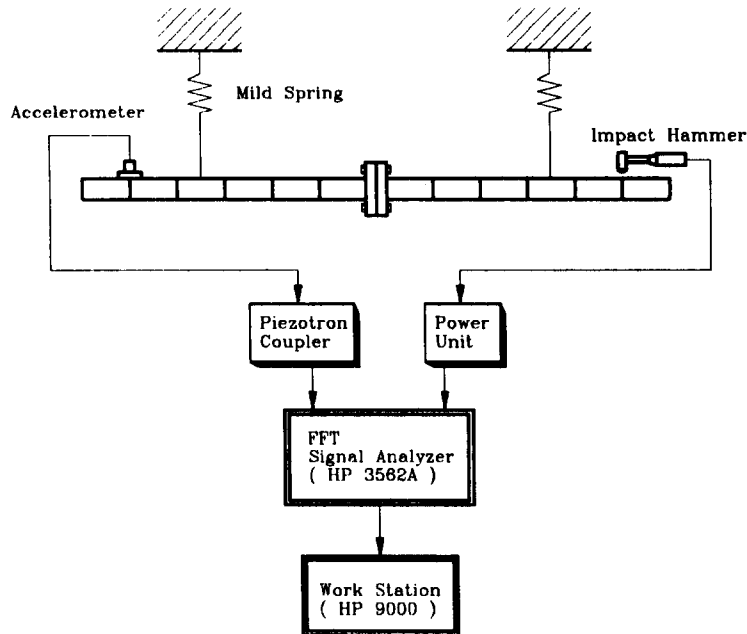
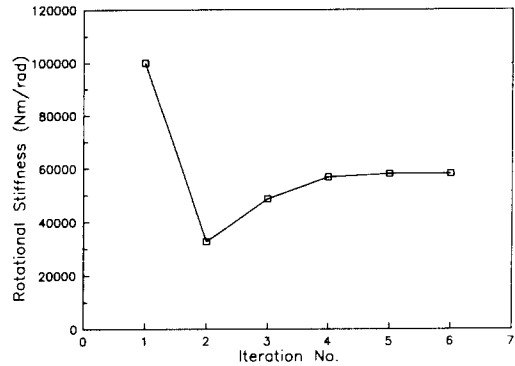


Fig. 4 Experimental setup

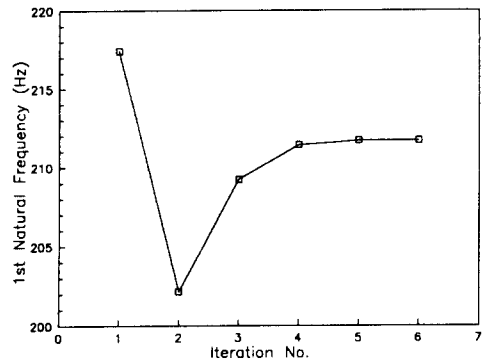
같다. 여기서 강결합은 볼트 결합부를 강결합으로 처리하여 유한요소 해석으로 구한 결과로써 실험결과와 비교하기 위한 것이다. 볼트의 체결토크가 증가할수록 고유진동수는 증가하며 감쇠비는 약간 감소하는 경향을 나타낸다. 그러나 Table 1에 보인 바와 같이 모델 #1은 결합부의 위치가 보의 중앙에 있으므로 2차 공진모드에서 결합부의 병진방향 변위가 영이 되고, 고유진동수와 감쇠비는 체결도수에 관계없이 일정한 경향을 보인다. 따라서 모델 #1의 2차 모드에서는 볼트의 체결토크의 변화는 결합부의 병진방향 성분에 관계없이 회전방향 성분의 변화로 나타난다고 생각할 수 있다.

볼트의 체결토크 증가에 따라서 Table 1과 Table 2에 보인 바와 같이 감쇠비의 감소량이 비교적 작고 감쇠비의 크기도 매우 작으므로 비감쇠계로 가정할 수 있다. 먼저 모델 #1의 실험모드 해석결과인 1차와 3차 고유진동수를 이용하여 볼트의 체결토크 증가에 따른 설계변수인 결합부의 회전강성  $K_\theta$ 를 감도해석으로 동정한다. 모델 #1의 기하학적 형상의 특이성 때문에 병진강성 값이 일정하므로, 모델 #2에서 병진강성 값을 구한다. 즉, 모델 #2의 실험모드 해석결과인 1차, 2차, 3차 고유진동수를 이용하여 앞에서 구한 결합부의 회전강성  $K_\theta$ 를 알고있는 값으로 대입하고, 설계변수인 결합부의 선형강성  $K_y$ 를 감도해석으로 동정한다. 이때 회전강성값과 선형강성값의 초기 값은 보부분 유한요소 행렬의 강성값 ( $K_\theta=1 \times 10^5$ ,  $K_y=1 \times 10^8$ )을 사용하였으며, 체결력 10 kgf·cm일때 모델 #1에서 반복회수에 따른 회전강성값과 고유진동수의 수렴성을 Fig. 5에 나타내었다. 이때 찾은 강성값을 다음 감도해석의 초기값으로 사용하므로, 이후부터는 2~3회 반복계산으로 수렴하는 것을 알 수 있었다. 본 연구에서 사용한 모델의 경우 10여회만 반복계산하여도 수렴된 결과를 찾을 수 있으며 발산하지 않으므로, 식 (17)의 가중치를 1로 하여 감도해석을 수행하였다. 감도해석법에 의해 동정된 결합부 강성값은 Table 3에서 보여주는 바와 같이 볼트의 체결토크가 커짐에 따라 증가함을 알 수 있다.

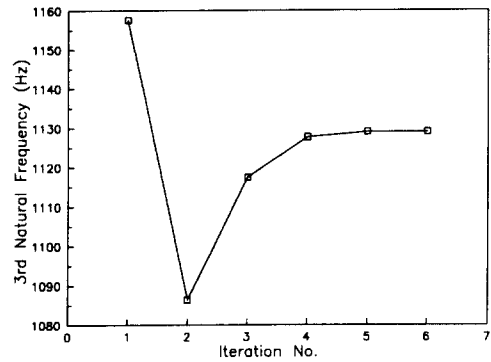
Tables 4~8까지는 감도해석으로 구한 강성값 (Table 3의 결과)을 모델 #1, #2, #3, #4 및 #5에 대입하여 구한 고유진동수의 추정값과 실험값을 비교하였다. 최대  $\pm 3.5\%$  이내로 일치하는 것을 알 수 있었다. 따라서 볼트결합부를 스프링으로 모델링하



(a) Rotational stiffness



(b) 1st natural frequency



(c) 3rd natural frequency

Fig. 5 Convergency with iteration numbers

는 것이 유용하고, 감도해석결과를 각각의 모델에 대입한 결과 결합부의 위치가 변하더라도 Table 3에서 구한 체결토크에 따른 강성값이 타당하다는 것을 확인하였다. 이에 따라 Table 3의 값을 정확한 값으로 하여 다음 절에 구할 모드에너지 해석결과와 비교한다.

**Table 1** Natural frequency and damping ratio of model #1

Mode		10 kgf·cm	20 kgf·cm	30 kgf·cm	40 kgf·cm
1	$\Omega$ (Hz)	211.86	215.02	216.38	216.87
	$\xi$ (%)	0.271	0.246	0.225	0.218
2	$\Omega$ (Hz)	651.51	651.53	651.56	651.50
	$\xi$ (%)	0.060	0.058	0.058	0.060
3	$\Omega$ (Hz)	1128.22	1143.83	1151.05	1153.52
	$\xi$ (%)	0.084	0.063	0.052	0.054

**Table 2** Natural frequency and damping ratio of model #2

Mode		10 kgf·cm	20 kgf·cm	30 kgf·cm	40 kgf·cm
1	$\Omega$ (Hz)	213.31	217.74	219.94	221.09
	$\xi$ (%)	0.368	0.249	0.212	0.209
2	$\Omega$ (Hz)	624.46	628.83	631.06	632.16
	$\xi$ (%)	0.072	0.063	0.062	0.060
3	$\Omega$ (Hz)	1196.00	1207.43	1214.43	1217.52
	$\xi$ (%)	0.079	0.074	0.074	0.070

**Table 3** Identified joint stiffness by sensitivity analysis

Clamping torque (kgf·cm)	$K_\theta$ ( $\times 10^4$ Nm/rad)	$K_y$ ( $\times 10^4$ N/m)
10	5.8078	2.0290
20	7.6054	2.2516
30	8.7553	2.4375
40	9.2431	2.6690

**Table 4** Comparison with experiment and estimated natural frequency of model #1  
(using stiffness value of Table 3)

Mode		10 kgf·cm	20 kgf·cm	30 kgf·cm	40 kgf·cm
1	Exp. (Hz)	211.86	215.02	216.38	216.87
	Est. (Hz)	211.72	214.89	216.28	216.77
	Error (%)	-0.07	-0.06	-0.05	-0.05
3	Exp. (Hz)	1128.22	1143.83	1151.05	1153.52
	Est. (Hz)	1129.04	1144.55	1151.60	1154.09
	Error (%)	+0.07	+0.06	+0.05	+0.05



**Table 5** Comparison with experiment and estimated natural frequency of model #2  
(using stiffness value of Table 3)

Mode		10 kgf·cm	20 kgf·cm	30 kgf·cm	40 kgf·cm
1	Exp. (Hz)	213.31	217.74	219.94	221.09
	Est. (Hz)	218.78	222.94	223.33	223.34
	Error (%)	+2.56	+2.39	+1.54	+1.02
2	Exp. (Hz)	624.46	628.83	631.06	632.16
	Est. (Hz)	626.93	631.02	633.11	633.87
	Error (%)	+0.40	+0.35	+0.32	+0.32
3	Exp. (Hz)	1196.00	1207.92	1214.43	1217.52
	Est. (Hz)	1193.58	1205.78	1212.44	1215.88
	Error (%)	-0.20	-0.18	-0.16	-0.13

**Table 6** Comparison with experiment and estimated natural frequency of model #3  
(using stiffness value of Table 3)

Mode		10 kgf·cm	20 kgf·cm	30 kgf·cm	40 kgf·cm
1	Exp. (Hz)	228.35	229.27	229.79	229.93
	Est. (Hz)	227.55	229.92	230.95	231.34
	Error (%)	-0.35	+0.28	+0.50	+0.61
2	Exp. (Hz)	598.54	601.66	603.18	603.68
	Est. (Hz)	590.78	598.26	601.66	602.97
	Error (%)	-1.30	-0.57	-0.25	-0.12
3	Exp. (Hz)	1265.98	1266.43	1266.61	1266.63
	Est. (Hz)	1222.28	1231.11	1237.05	1243.02
	Error (%)	-3.46	-2.79	-2.33	-1.86

## 4.2 모드에너지 해석법

### 4.2.1 모의실험

모의실험 대상구조물은 Fig. 6과 같이 양단이 자유상태인 모델 #3으로 선정하고 분계 1의 감쇠가 증가하는 경우와 분계 1과 분계 2의 감쇠가 함께 증가하는 경우에 대하여 모의실험을 수행하였다.

결합부를 제외한 각 분계의 감쇠행렬은 비례감쇠

로 가정하여 다음의 두가지 경우에 대하여 내부 손실계수와 결합부의 회전강성과 선형강성을 동정한다.

- ①  $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ 이고  $\beta_2 = 10^{-7}$ 으로 가정하고  $\beta_1 = 10^{-7} \sim 10^{-6}$ 으로 10단계 변화시켰을 경우
- ②  $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ 이고  $\beta_1 = \beta_2 = 10^{-7} \sim 10^{-6}$ 으로 10단계 변화시키는 경우

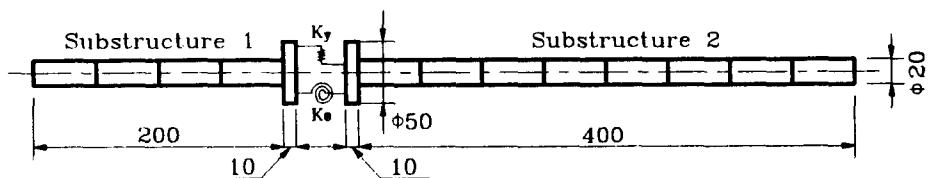
또 실험에서는 회전방향의 자유도를 예측하기 곤란하므로, 병진방향의 변위차로 구한 회전변위로

**Table 7** Comparison with experiment and estimated natural frequency of model #4  
(using stiffness value of Table 3)

Mode		10 kgf·cm	20 kgf·cm	30 kgf·cm	40 kgf·cm
1	Exp. (Hz)	233.77	236.17	236.86	237.10
	Est. (Hz)	235.94	237.17	237.72	237.95
	Error (%)	+0.94	+0.42	+0.36	+0.36
2	Exp. (Hz)	575.44	593.16	597.60	601.13
	Est. (Hz)	589.73	598.87	602.91	604.36
	Error (%)	+2.48	+0.96	+0.89	+0.54
3	Exp. (Hz)	1165.77	1186.99	1193.96	1196.65
	Est. (Hz)	1170.85	1184.41	1191.21	1194.79
	Error (%)	+0.44	-0.22	-0.23	-0.16

**Table 8** Comparison with experiment and estimated natural frequency of model #5  
(using stiffness value of Table 3)

Mode		10 kgf·cm	20 kgf·cm	30 kgf·cm	40 kgf·cm
1	Exp. (Hz)	236.24	236.66	236.80	236.86
	Est. (Hz)	235.56	235.91	236.08	236.19
	Error (%)	-0.29	-0.32	-0.30	-0.28
2	Exp. (Hz)	634.88	641.15	642.51	643.55
	Est. (Hz)	632.46	638.23	640.85	642.10
	Error (%)	-0.38	-0.46	-0.26	-0.23
3	Exp. (Hz)	1159.72	1181.43	1187.99	1188.00
	Est. (Hz)	1166.11	1185.08	1193.60	1196.80
	Error (%)	+0.55	+0.31	+0.47	+0.75



$$K_{\theta} = 6 \times 10^4 (\text{Nm/rad}), \quad K_y = 2 \times 10^7 (\text{N/m})$$

$$[C_1] = \alpha_1 [M_1] + \beta_1 [K_1], \quad [C_2] = \alpha_2 [M_2] + \beta_2 [K_2]$$

**Fig. 6** Model for MEA simulation(model #3)

실험상태를 시뮬레이션하였다. 따라서 회전방향의 변위는 유한요소법에서 구하는 경우와 Fig. 7에서 보인 바와 같이 병진방향의 변위차를 이용하여 구하는 방법의 두가지를 사용한다. (12)

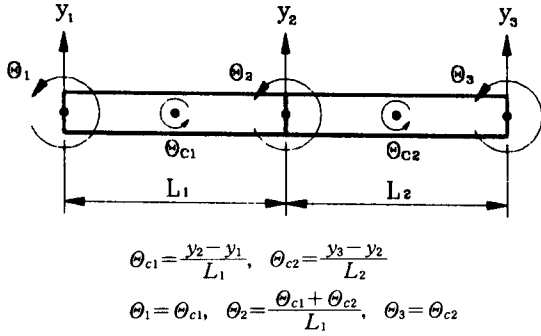
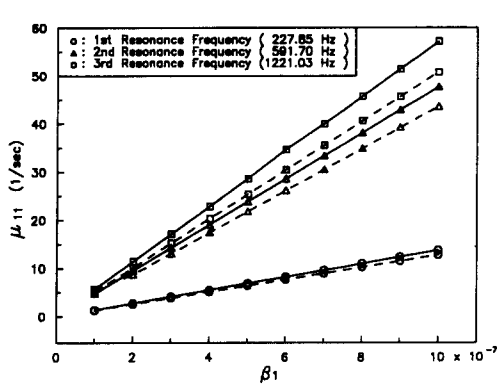
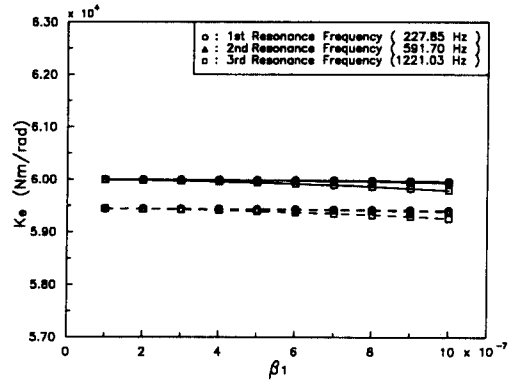


Fig. 7 Approximation of the rotational DOF(slope)

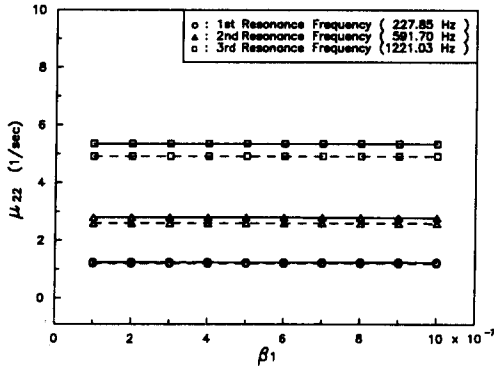
Fig. 8은  $\beta_1$ 에 따른 내부 손실계수를 나타내며, 분계 1의 감쇠가 커지는 경우에는  $\mu_{11}$ 은  $\beta_1$ 에 비례적으로 증가하나  $\mu_{22}$ 는 일정한 경향을 나타낸다. 그림에서 실선은 유한요소해석에서 구한 회전변위(정확한 회전변위)를 사용한 결과이고, 파선은 Fig. 7과 같이 회전변위를 근사하여 구한 결과(근사 회전변위)이다. 한편 분계 1과 분계 2의 감쇠가 함께 증가하는 경우에는  $\mu_{11}$ 과  $\mu_{22}$  또한 증가하는 것을 Fig. 10에 나타내었다. Fig. 9와 Fig. 11은 각 분계내 감쇠의 변화에 따른 모드에너지 해석결과인 결합부의 강성값을 나타내며 초기 선정값과 거의 일치함을 알 수 있었다. 단 분계내 감쇠가 커질수록 결합부 강성값과 초기 선정값과의 차이가 미소하게 증가하는 것을 알 수 있었다. 그러나 최대 오차를 보이는 Fig. 11(a)의 경우도 강성값의 오차가



(a) Substructure 1



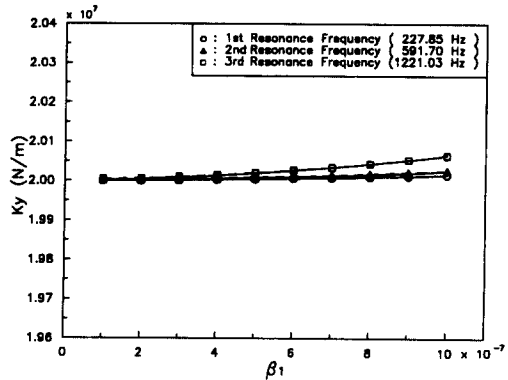
(a) Rotational stiffness



(b) Substructure 2

(— : Exact slope  
 - - - : Approximated slope)

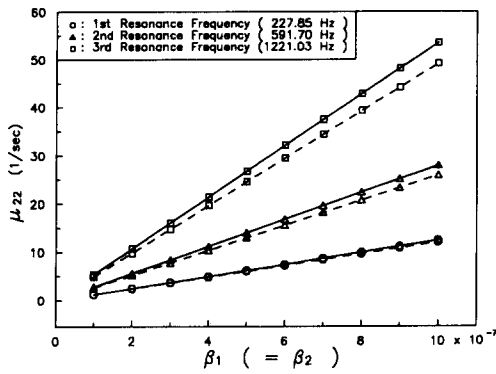
Fig. 8 Internal loss factor( $\alpha_1 = \alpha_2 = 0, \beta = 10^{-7}$ )



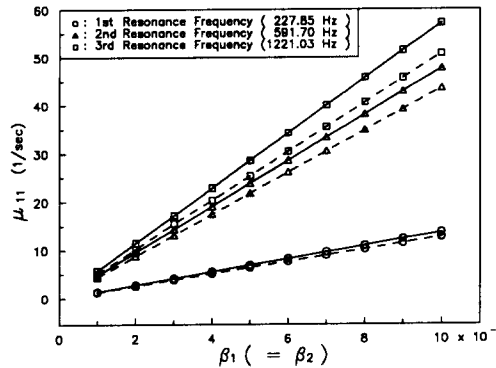
(b) Bending stiffness

(— : Exact Slope  
 - - - : Approximated slope)

Fig. 9 Joint stiffness( $\alpha_1 = \alpha_2 = 0, \beta = 10^{-7}$ )



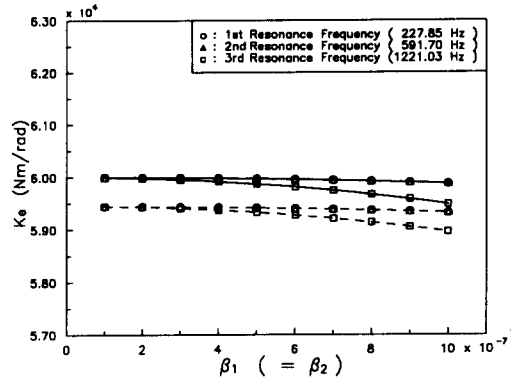
(a) Substructure 1



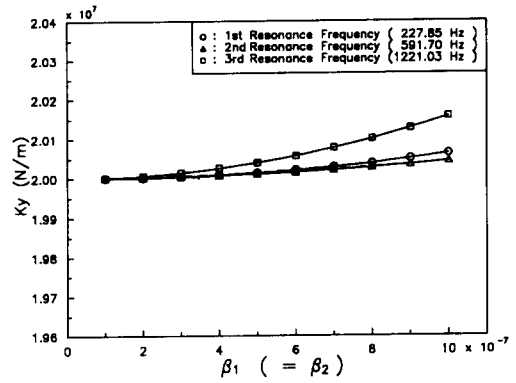
(b) Substructure 2

(— : Exact slope,  
 - - - : Approximated slope)

Fig. 10 Internal loss factor( $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ )



(a) Substructure 1



(b) Substructure 2

(— : Exact slope,  
 - - - : Approximated slope)

Fig. 11 Joint stiffness( $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ )

5%이내(회전변위 근사시의 오차+식 (23)유도시의 오차)이므로 모드에너지 해석에 의한 강성값 추정이 타당함을 알 수 있다.

4.2.2 실험결과

실험 대상구조물을 모델 #2와 모델 #3로 선정하여 모드에너지 해석을 수행하여 구한 분계 1과 분계 2의 내부 손실계수는 Fig. 12에 나타내었으며, 결합부의 회전강성과 선형강성을 구한 결과는 Table 9와 Table 10에 정리하였다. 여기서 오차는 Table 3의 결과와의 차이를 나타낸다.

Table 1과 2의 실험결과에서 볼트의 체결토크의 증가에 비례하여 감쇠비가 감소한다는 것은 볼트 결합부를 가진 모델 내부의 감쇠가 감소한다고 볼 수 있으므로, 본 해석법으로 구한 양 분계의 내부

손실계수도 감소하는 현상을 나타낸다. 모드 에너지 해석법으로 얻은 강성값이 Table 3의 결과와 차이를 보이는 것은 (i) 실험 모델의 악셀러런스(accelerance)를 구할때 포함된 잡음, (ii) 복소지수 최소자승법으로 파라미터 동정할때의 오차, (iii) 회전변위 근사에서의 오차, (iv) 모델링 오차(식 (23)유도시 1자유도제로 가정) 등이 종합적으로 작용한 결과라고 생각된다. 그러므로 Table 9의 결과에서 강성값이 체결력에 따라 증가하지 않고 감소하는 경향을 보이는 것은 앞에서 언급한 오차들의 영향이라고 생각되며, 실험과 파라미터 동정등에서 상당히 주의하지 않으면 잘못된 결과를 얻을 수 있음을 알 수 있다. 따라서 4.1절의 감도 해석을 통해 얻은 강성값은 결합부 위치의 변화에 따라 변하지 않으므로, 체결력에 따라 일정하게 증

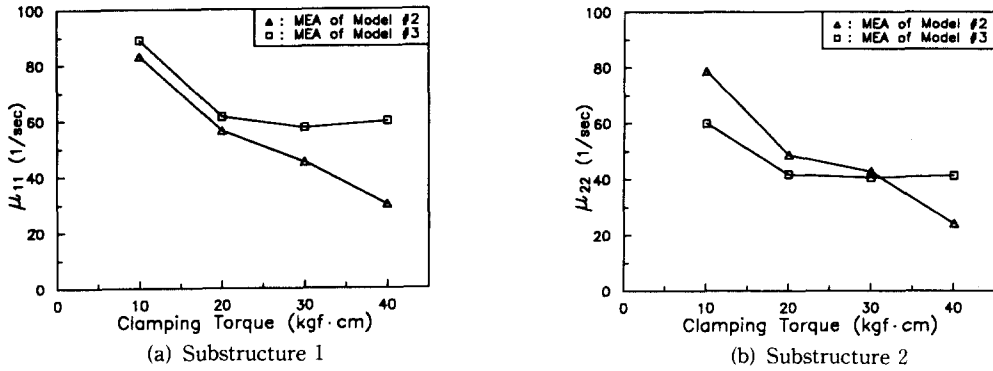


Fig. 12 Internal loss factor on the 1st natural frequency

Table 9 Identified joint stiffness of model #2 by MEA

Clamping torque (kgf·cm)	$K_\theta$ ( $\times 10^4$ Nm/rad)	Error (%)	$K_v$ ( $\times 10^7$ N/m)	Error (%)
10	5.0775	-12.6	1.2376	-39.0
20	10.6360	39.8	1.1958	-46.9
30	9.8365	12.3	1.7115	-29.8
40	19.1020	106.7	2.7697	3.8

Table 10 Identified joint stiffness of model #3 by MEA

Clamping torque (kgf·cm)	$K_\theta$ ( $\times 10^4$ Nm/rad)	Error (%)	$K_v$ ( $\times 10^7$ N/m)	Error (%)
10	2.9171	-49.8	1.2422	-38.8
20	5.7149	-24.9	1.2718	-43.5
30	6.6395	-24.2	3.3349	36.8
40	10.0620	8.9	5.2905	98.2

가하는 경향을 보이는 Table 10의 강성값을 모드에너지 해석으로 얻은 강성값으로 한다. 이 강성값을 모델 #2와 모델 #3에 대입하여 구한 고유진동수를 Table 11과 Table 12에서 실험값과 비교하였다. 감도해석 결과보다는 오차가 크지만  $\pm 8.5\%$  이내로 추정하는 것을 알 수 있다. 또 모델 #2와 #3의 결합부 강성값을 감도해석법으로 구한 결과와 모드에너지 해석법으로 구한 결과를 Fig. 13에 도시하였다. 결합부 강성의 정량적인 값은 감도해석

법으로 구한 강성값 주위에 모드에너지 해석법으로 구한 결합부의 강성값이 분포함을 알 수 있었다.

### 5. 결론

볼트로 결합된 보구조물에 대하여 감도해석법과 모드에너지 해석법을 적용하여 모의실험과 실험을 수행함으로써 다음과 같은 결론을 얻었다.

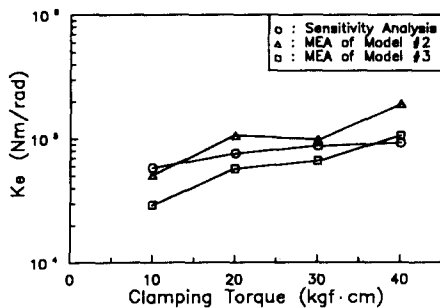
- (1) 결합부가 변하는 보구조물의 볼트결합부를

**Table 11** Comparison with experiment and estimated natural frequency of model #2  
(using stiffness value of Table 10)

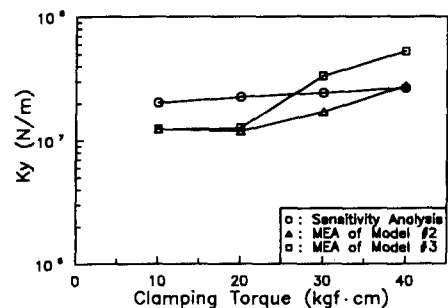
Mode		10 kgf·cm	20 kgf·cm	30 kgf·cm	40 kgf·cm
1	Exp. (Hz)	213.31	217.74	219.94	221.09
	Est. (Hz)	206.83	218.49	220.48	224.54
	Error (%)	-3.04	+0.34	+0.25	+1.56
2	Exp. (Hz)	624.46	628.83	631.06	632.16
	Est. (Hz)	609.54	620.18	632.57	638.90
	Error (%)	-2.39	-1.38	+0.24	+1.07
3	Exp. (Hz)	1196.00	1207.92	1214.43	1217.52
	Est. (Hz)	1135.74	1160.53	1215.74	1235.31
	Error (%)	-5.04	-3.92	+0.11	+1.46

**Table 12** Comparison with experiment and estimated natural frequency of model #3  
(using stiffness value of Table 10)

Mode		10 kgf·cm	20 kgf·cm	30 kgf·cm	40 kgf·cm
1	Exp. (Hz)	228.35	229.27	229.79	229.93
	Est. (Hz)	218.08	227.08	228.98	232.07
	Error (%)	-4.50	-0.96	-0.35	+0.93
2	Exp. (Hz)	598.54	601.66	603.18	603.68
	Est. (Hz)	564.07	588.95	595.37	605.44
	Error (%)	-5.76	-2.11	-1.29	-0.29
3	Exp. (Hz)	1265.98	1266.43	1266.61	1266.63
	Est. (Hz)	1162.65	1166.65	1254.28	1271.39
	Error (%)	-8.16	-7.88	-0.97	+0.38



(a) Rotational stiffness



(b) Bending stiffness

**Fig. 13** Joint stiffness with clamping torque

선형스프링과 회전스프링으로 모델링하는 것이 타당함을 보이고, 감도해석법으로 구한 강성값이 결합부의 위치가 변하더라도 체결력에 따라 일정하다는 것을 제시하였다.

(2) 모드에너지 해석법의 이론적 타당성을 모의 실험으로 검증하였으며, 볼트에 가해지는 체결토크에 따른 결합부 강성의 정량적인 값은 감도해석법으로 구한 강성값 주위에 모드에너지 해석법으로 구한 결합부의 강성값이 분포함을 알 수 있었다. 단 실험에서는 각종 오차의 영향때문에 정확한 강성값을 찾기 어려움을 알 수 있었다.

### 후 기

본 연구는 국방과학연구소 장기기초연구의 일부로서 수행되었습니다.

### 참고문헌

(1) Yoshimura, M., 1976, "Analysis and Optimization of Structural Dynamics of Machine Tools by Synthesis of Dynamic Rigidity Program System," *Proc. 16th MTDR Conf.*, Pergamon, pp. 209~215.

(2) Yoshimura, M., 1977, "Measurement of Dynamic Rigidity and Damping Property for Simplified Joint Models and Simulation by Computer," *Annals of CIRP*, Vol. 25, No. 1, pp. 193~198.

(3) Yuan, J. X. and Wu, X. M., 1985, "Identifica-

tion of Joint Structural Parameters of Machine Tool by DDS and FEM," *ASME J. of Engineering for Industry*, Vol. 107, pp. 64~69.

(4) Tsai, J. S. and Chou, Y. F., 1988, "The Identification of Dynamic Characteristics of a Single Bolt Joint," *J. of Sound and Vibration*, Vol. 125, pp. 487~502.

(5) Wang, J. H. and Liou, C. M., 1991, "Experimental Identification of Mechanical Joint Parameters," *ASME J. of Vibration and Acoustics*, Vol. 113, pp. 28~36.

(6) 孫國一, 大熊政明, 長松昭男, 1991, "實驗データ参照による有限要素モデルの改良," 日本機械學會論文集, C編, 57卷, 537號, pp. 173~177.

(7) 孫國一, 大熊政明, 長松昭男, 1991, "實驗データ参照による有限要素モデルの改良," 日本機械學會論文集, C編, 58卷, 554號, pp. 94~101.

(8) 大熊政明, 長松昭男, 中村正信, 1991, "モーバ工示ルギー解析法による振動解析," 日本機械學會論文集, C編, 57卷, 543號, pp. 37~44.

(9) Lyon, R. H., 1975, *Statistical Energy Analysis of Dynamical Systems*, The MIT Press.

(10) Newland, D. E., 1984, *Mechanical Vibration Analysis and Computation*, Longman Scientific & Technical.

(11) Leuven Measurement & Systems International, 1990, *LMS CADA Modal/Analysis User Manual*, Rev. 2. 6.

(12) Ewins, D. J., 1984, *Modal Testing Theory and Practice*, John Wiley & Sons.