

〈論 文〉

저 레이놀즈수 $k-\epsilon$ 모형에서 DNS 자료에 의한 ϵ 방정식의 다중 생성률 모형 개발

신종근* · 최영돈**

(1995년 4월 6일 접수)

Development of Multiple Production ϵ Equation Model in Low Reynolds Number $k-\epsilon$ Model with the Aid of DNS Data

J. K. Shin and Y. D. Choi

Key Words : Low Reynolds Number $k-\epsilon$ Model(저 레이놀즈수 $k-\epsilon$ 모형), Multiple Production ϵ Equation Model(다중 생성률 ϵ 방정식 모형), Wall Limiting Condition(벽면극한 조건), Direct Numerical Simulation Data(직접 수치모사 자료)

Abstract

A multiple production ϵ equation model was developed in the low Reynolds number $k-\epsilon$ model with the aids of DNS data. We derived the model theoretically and avoided the use of empirical correlations as much as possible in order for the model to have generality in the prediction of complex turbulent flow. Unavoidable model constants were, however, optimized with the aids of DNS data. All the production and dissipation models in the ϵ equation were modified with damping functions to satisfy the wall limiting behavior. A new f_μ function, turbulent diffusion and pressure diffusion model for the k and ϵ equations were also proposed to satisfy the wall limiting behavior. By computational investigation on the plane channel flows, we found that the multiple production model for ϵ equation could improve the near wall turbulence behavior compared with the standard production model without the complicated empirical modification. Satisfaction of the wall limiting conditions for each turbulence model term was found to be most important for the accurate prediction of near wall turbulence behaviors.

기 호 설 명

$C_{\epsilon 1}, \tilde{C}_{\epsilon 1}, C_{\epsilon 2}, C_{\epsilon 3}, C_{\epsilon 3}^1, C_{\epsilon 3}^2, C_{\epsilon 4}, C_{\epsilon 5}, C_{\epsilon 6}$: 모형상수

$C_{\epsilon 1}^*, C_{\epsilon 2}^*$: 등가모형상수

$C_{d1}, C_{d2}, C_{d3}, C_{d4}, C_{d5}$: 모형상수

$C_{dk}, C_{d\epsilon}$: 모형상수

C_k : 모형상수

$C_{\pi k}, C_{\pi \epsilon}$: 모형상수

C_μ : 모형상수

D_k, D_ϵ : 점성확산율

D_k^*, D_ϵ^* : 무차원 점성확산율

$f_\epsilon, f_{\epsilon 1}, f_{\epsilon 2}$: 소멸항의 수정계수

$f_{w1}, f_{w2}, f_{wk}, f_{w\epsilon}$: 천이함수

f_μ : 와점성계수의 수정계수

H : 평판의 길이

k : 난류운동에너지

k^+ : 무차원 난류운동에너지 (k/u_τ^2)

P_k : 난류운동에너지 생성률

*고려대학교 기계공학과 대학원

**회원, 고려대학교 기계공학과

- P_k^* : 무차원 난류운동에너지 생성률
- $P_\epsilon^1, P_\epsilon^2, P_\epsilon^3, P_\epsilon^4$: 난류운동에너지 소멸률 방정식의 생성물
- $P_\epsilon^{1+}, P_\epsilon^{2+}, P_\epsilon^{3+}, P_\epsilon^{4+}$: 무차원 난류운동에너지 소멸률 방정식의 생성물
- Re_D : 평균속도에 의한 레이놀즈수 (UH/ν)
- Re_τ : 벽마찰속도에 의한 레이놀즈수 ($u_\tau H/(2\nu)$)
- R'_p : 시간척도비 함수
- R_ϵ : 난류 레이놀즈수 ($k^2/(\nu\epsilon)$)
- $S_{i,j}$: 평균변형률
- t : 시간
- T_k, T_ϵ : 난류수송률
- T_k^*, T_ϵ^* : 무차원 난류수송률
- U : x 방향 국부 평균속도
- u_1, u_2 : x, y 방향 요동속도
- u_i : i 방향 요동속도
- u_1^+, u_2^+, u_3^+ : x, y, z 방향 무차원 요동속도
- \overline{uv}^+ : 무차원 레이놀즈응력 ($\overline{u_i u_j}/u_\tau^2$)
- $\overline{u_i u_j}$: 레이놀즈응력
- u_τ : 벽마찰속도 ($\sqrt{\tau_w/\rho}$)
- x, y : 직교좌표
- y^+ : 벽면으로부터 무차원거리 (yu_τ/ν)
- ϵ : 난류운동에너지 소멸률
- $\bar{\epsilon}$: 등방성 난류운동에너지 소멸률
- ϵ_{ij} : 레이놀즈응력 소멸률 텐서
- ϵ^+ : 무차원 난류운동에너지 소멸률 ($\nu\epsilon/u_\tau^3$)
- Γ : 난류운동에너지 소멸률 방정식의 소멸률
- ν : 동점성계수
- ν_t : 와점성계수
- Π_k, Π_ϵ : 압력화산율
- Π_k^*, Π_ϵ^* : 무차원 압력화산율
- ρ : 유체의 밀도
- $\sigma_k, \sigma_\epsilon$: 난류 프란틀수

1. 서 론

지난 20년간 난류 모형에 큰 발전이 있었으며 특히 2차 모멘트 모형에 큰 진전이 있었다. 그러나 아직도 실제 산업계의 응용문제에서는 $k-\epsilon$ 모형이 더 많이 사용되고 있다. 대부분의 $k-\epsilon$ 모형은 전산시간을 절약하기 위해서 벽함수를 사용한다. 그러나 유용한 해를 얻기 위해서 벽함수를 사용할 수

없는 경우가 많다. 박리가 있는 유동역의 해석이나 2차유동에 의해 와류가 크게 발생하는 유동에서는 벽면인접부의 무차원 속도가 대수곡선을 그리지 않기 때문에 벽함수를 사용할 수 없다. (Choi, Iacovides와 Launder⁽¹⁾) 더욱이 최근 전산기 성능의 급격한 발달로 인해서 전산시간의 단축을 위해 거친 격자와 벽함수를 사용하는 데에 대한 이점이 격감되었다. 따라서 최근에 벽부근을 미세격자로 나누고 저 레이놀즈수 $k-\epsilon$ 모형을 실제문제에 적용하는 연구가 활발히 진행되고 있다. 저 레이놀즈수 $k-\epsilon$ 모형은 Jones와 Launder⁽²⁾(이후는 JL)에 의해서 처음으로 제안되었다. 그들은 ϵ 방정식의 모형상수 $C_{\epsilon 2}$ 와 와점성계수의 모형상수 C_μ 를 난류 레이놀즈수 R_ϵ ($\equiv k^2/(\nu\epsilon)$)의 함수로 나타내었다.

1984년까지의 저 레이놀즈수 $k-\epsilon$ 에 대한 연구는 Patel, Rodi와 Scheuerer⁽³⁾(이후는 PRS)의 논문으로 고찰되어 있다. 그들은 경계층 유동의 예측에서 8개의 모형을 상세히 고찰하여 현재의 저 레이놀즈수 $k-\epsilon$ 모형의 단점이 ϵ 방정식의 모형에 있다는 것을 지적하였다. 따라서 그 후 저 레이놀즈수 $k-\epsilon$ 모형에 관한 연구는 대부분 ϵ 방정식의 모형에 대한 연구로 집중되었다. (Myong과 Kasagi⁽⁴⁾(이후는 MK), So, Zhang과 Speziale⁽⁵⁾(이후는 SZS), Rodi와 Mansour⁽⁶⁾(이후는 RM))

그러나 아직 벽면인접부의 저 레이놀즈수 영역에서의 ϵ 방정식의 모형은 완전히 해결되지 않은 어려운 문제로 남아 있다. 그것은 ϵ 방정식 자체가 요동속도의 복잡한 상관함수와 그 구배로 되어 있고 각 항들의 배분에 대한 실제적 측정이 대단히 어려운데 기인하고 있다.

최근 직접수치모사(이후는 DNS)에 의해 얻어진 자료는 ϵ 방정식의 모형 개발에 새로운 국면을 맞이하게 하였다. DNS 자료는 실험으로 측정하지 못하는 ϵ 방정식의 배분항(budget)들을 정확히 예측해 줄 수 있었기 때문이다. Mansour, Kim과 Moin^(7,8)(이후는 MKM)은 DNS 자료를 이용하여 난류운동에너지와 난류운동에너지 소멸률의 배분항을 계산하였다. 그들은 또 이 예측된 배분항들에 의해서 기존의 저 레이놀즈수 $k-\epsilon$ 모형을 시험해 본 결과 ϵ 방정식은 벽에서 멀리 떨어진 곳에서는 정확하나 벽에 가까워지면 정확하지 않음을 발견하였다. 따라서 벽면인접부의 ϵ 분포를 정확히 예측하려면 ϵ 방정식의 원천항에 감쇄함수를 곱해주어야 한다고 했다. RM은 벽면인접부에서 ϵ 방정식

의 소멸항을 수정하기 위해서 DNS 자료에 의해서 얻어진 배분항의 크기를 사용하였다. 그들은 ϵ 방정식의 소멸항계수 $C_{\epsilon 2}$ 에 소멸운동의 시간척도와 P_k/ϵ 의 시간척도의 비를 변수로 하는 지수형 함수를 곱해 주었다. 여기서 P_k 는 난류운동에너지 생성률을 나타낸다. 이 지수형 함수는 ϵ 방정식의 소멸항의 크기를 크게 하여 ϵ 방정식의 혼합생성항(mixed production)이 속도생성항(velocity production)의 크기와 균형을 갖게 해준다. 그들은 Hanjalic과 Launder^(9,10)(이후는 HL)가 제안한 구배생성항(gradient production) 모형도 수정하였다.

Nagano와 Shimada⁽¹¹⁾(이후는 NS), Nagano, Youssef와 Shimada⁽¹²⁾는 역시 DNS 자료를 이용하여 새로운 저 레이놀즈수 $k-\epsilon$ 모형을 개발하였다. 그들은 ϵ 방정식을 RM과 거의 같은 형식으로 수정하였다. 그러나 그들은 $C_{\epsilon 2}$ 와 C_μ 에 대해서 좀더 복잡하고 정성된 경험식을 사용함으로써 개선된 원천항의 크기를 예측할 수 있었다. 그러나 그들의 모형은 너무 경험적이었기 때문에 복잡한 3차원 유동에 적용할 때 그 일반성을 유지할 수 있을 지에 대한 의문을 갖게 한다. SZS⁽⁵⁾와 Lai와 So⁽¹³⁾(이후는 LS)는 ϵ 방정식을 수정하는 새로운 방법을 제안하였다. 그들은 ϵ 방정식의 소멸항계수 $C_{\epsilon 2}$ 를 수정하지 않고 벽면 부근에서 Shima⁽¹⁴⁾의 부합조건(coincidence condition)을 만족시키기 위한 부가적 원천항들을 추가하였다. 그들의 원천항에 대한 총체적 수정은 과거의 모형들^(15,16)보다 k , ϵ , \overline{uv} 분포의 예측을 개선해 주었다.

ϵ 방정식에는 5개의 원천항이 있다. 그러나 대부분의 $k-\epsilon$ 모형에서는 이 항들을 2~3개 항의 모형식으로 간략화시킨다. 이와 같은 원천항의 수를 줄여서 모형화하는 것은 ϵ 방정식의 혼합생성률과 난류생성률이 소멸률과 거의 같은 형태로 변하고 레이놀즈수 영역에서는 타당하지만 벽면에 접근하면 5개의 원천항들이 제작기 다른 형태로 변하기 때문에 그 타당성을 잃게 된다.

이 논문에서는 DNS 자료를 이용하여 ϵ 방정식의 원천항에 대한 다중 생성률 모형을 개발하였으며 벽면극한조건을 만족시키는 f_μ 함수를 제안하였다. 이 모형을 개발함에 있어서 가능한 경험식의 사용을 배제하였고 좀더 이론적으로 유도된 상관식을 사용하였으며 불가피한 모형상수들만 DNS 자료의 도움으로 전산 최적화하였다.

2. 벽면인접부에서 난류운동에너지와 난류운동에너지 소멸률의 변화 거동

비압축성유동에서 난류운동에너지 k 의 완전방정식은 다음과 같이 텐서형으로 나타낼 수 있다.

$$\frac{Dk}{Dt} = P_k + T_k + \Pi_k + D_k - \epsilon \quad (1)$$

위 식에서 우변의 각항들의 텐서형은 다음과 같이 정의된다.

생성률(Production Rate) :

$$P_k = -\overline{u_i u_j} S_{ij} \quad (2)$$

난류수송률(Turbulent Transport Rate) :

$$T_k = -\frac{1}{2} \overline{(u_i u_j u_j)}_{,j} \quad (3)$$

압력확산율(Pressure Diffusion Rate) :

$$\Pi_k = -\left(\frac{1}{\rho}\right) \overline{(u_i p)}_{,i} \quad (4)$$

점성확산율(Viscous Diffusion Rate) :

$$D_k = \nu k_{,jj} \quad (5)$$

소멸률(Dissipation Rate) :

$$\epsilon = \nu \overline{u_{i,j} u_{i,j}} \quad (6)$$

그리고 $S_{ij} = (U_{i,j} + U_{j,i})/2$ 이다.

ϵ ($\equiv \nu \overline{u_{i,j} u_{i,j}}$)에 대한 완전방정식은 Navier-Stokes 방정식으로부터 다음과 같이 유도된다.

$$\frac{D\epsilon}{Dt} = P_\epsilon^1 + P_\epsilon^2 + P_\epsilon^3 + P_\epsilon^4 + T_\epsilon + \Pi_\epsilon + D_\epsilon - \Gamma \quad (7)$$

여기서 우변 각 항들은 다음과 같이 정의된다.

혼합생성률(Mixed Production Rate) :

$$P_\epsilon^1 = -2\nu \overline{u_{i,j} u_{k,j}} S_{ik} \quad (8)$$

평균속도 구배생성률(Production Rate by Mean Velocity Gradient) :

$$P_\epsilon^2 = -2\nu \overline{u_{i,k} u_{i,m}} S_{km} \quad (9)$$

구배생성률(Gradient Production Rate) :

$$P_\epsilon^3 = -2\nu \overline{u_k u_{i,m}} U_{i,km} \quad (10)$$

난류생성률(Turbulent Production Rate) :

$$P_\epsilon^4 = -2\nu \overline{u_{i,k} u_{i,m}} u_{k,m} \quad (11)$$

난류수송률(Turbulent Transport Rate) :

$$T_\epsilon = -\nu \overline{(u_k u_{i,m} u_{i,m})_{,k}} \quad (12)$$

압력수송률(Pressure transport Rate) :

$$\Pi_\epsilon = -2 \frac{\nu}{\rho} \overline{(p_{,m} u_{k,m})_{,k}} \quad (13)$$

점성확산율(Viscous Diffusion Rate) :

$$D_\epsilon = \nu \epsilon_{,kk} \quad (14)$$

소멸률 (Dissipation Rate) :

$$\Gamma = 2\nu^2 \overline{u_{i,km} u_{i,km}} \quad (15)$$

완전발달된 평판유동에서 식 (1)과 (7)의 좌표은 0이므로 우변의 각항들이 서로 균형을 이루어야 한다. Fig. 1은 MKM⁽⁷⁾이 Kim, Moin과 Moser⁽¹⁷⁾의 DNS 자료로부터 계산한 k 방정식의 배분항들을 나타낸다. 그림의 모든 항들은 u_i^4/ν 로 무차원화되어 있다. 그들이 계산한 각 배분항들을 Laufer의 자료^(18,19)를 사용하여 계산한 배분항들과 비교한 결과, Laufer의 자료에 의한 계산결과가 난류수송률과 압력확산율을 과대평가하였고 점성확산율은 과소평가하여 벽면인접부의 ϵ 값을 낮게 예측하는 결과를 초래하고, ϵ 의 최대값이 벽에서 떨어진 곳에서 발생하도록 하였다는 것을 발견했다. 1990년 이전에 제안된 대부분의 저 레이놀즈수 k - ϵ 모형은 ϵ 의 최대값이 벽에서 떨어진 곳에 위치하도록 예측하고 있다. 그러나 DNS 자료에 의한 분석결과는 ϵ 의 최대값이 벽면상에 위치한다는 것을 밝히고 있기 때문에 저 레이놀즈수 ϵ 방정식 모형에 근본적인 수정이 요구됨을 알 수 있다.

Fig. 2는 MKM⁽⁷⁾이 $Re_r=180$ 에 대한 평판유동으로부터 계산한 ϵ 방정식의 배분항들을 나타낸다. 이 그림에서의 모든 항들은 u_i^6/ν^2 로 무차원화되어 있다.

HL⁽⁹⁾은 식 (7)의 우변항을 $\overline{u_i u_j}$, ϵ 과 평균변형률(mean strain rate)을 사용하여 다음과 같은 모형화 가정을 도입하였다.

$$P_\epsilon^1 + P_\epsilon^2 = 2U_{i,k} \nu (\overline{u_{i,m} u_{k,m}} + \overline{u_{m,i} u_{m,k}})$$

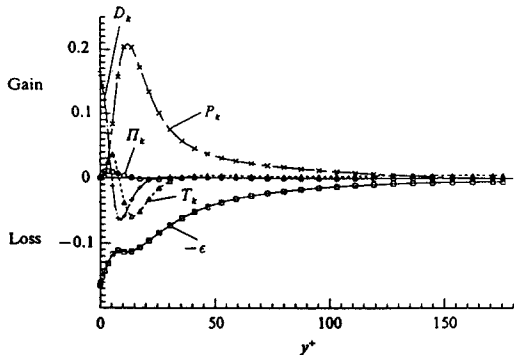


Fig. 1 Near wall budgets of k from DNS data in plane channel flow for $Re_t=180$ taken from MKM.⁽⁷⁾

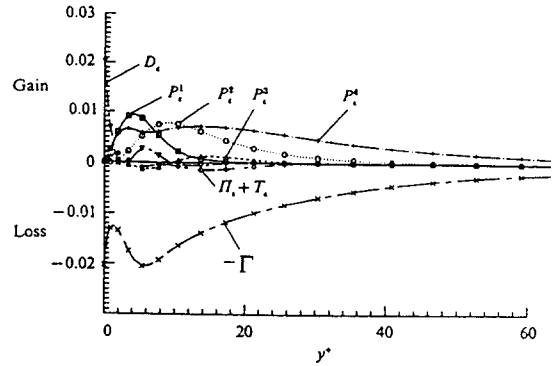


Fig. 2 Near wall budgets of ϵ from DNS data in plane channel flow for $Re_t=180$ taken from MKM.⁽⁷⁾

$$= U_{i,k} (C_{\epsilon 1} \frac{\overline{u_i u_k}}{k} + \tilde{C}_{\epsilon 1} \delta_{ik}) \epsilon \quad (16)$$

여기서, $C_{\epsilon 1}$ 과 $\tilde{C}_{\epsilon 1}$ 는 모형상수이다.

이 가정은 $P_\epsilon^1 + P_\epsilon^2$ 에 대해서 다음과 같은 모형식을 제공해 준다.

$$P_\epsilon^1 + P_\epsilon^2 = C_{\epsilon 1}^* \frac{P_k \epsilon}{k} \quad (17)$$

그러나 Fig. 2의 배분항들의 분포를 살펴보면 P_ϵ^1 과 P_ϵ^2 는 전구역에서 서로 다른 형태로 변하는 것을 알 수 있다. 따라서 이 두 항을 식 (17)과 같이 하나로 통합된 모양의 모형식으로 만들 경우 벽면 부근의 미세한 변화 경향을 정확히 모사할 수 없다는 것을 알 수 있다.

Rodi⁽²⁰⁾는 난류의 자체신장작용(self-stretching action)을 나타내는 식 (11)의 난류생성항 P_ϵ^2 는 점성에 의한 난류운동에너지 소멸률의 소멸항(Γ)과 결합시켜 고려해야 한다고 주장했다. HL⁽⁹⁾은 관성부영역(inertial subrange)이 존재해서 에너지 캐스케이드 과정의 동역학이 P_ϵ^2 와 Γ 를 지배하는 고 레이놀즈수 영역에서는 P_ϵ^2 와 Γ 가 점성에 무관하므로 동차성원리(homogeneity principle)에 의해서 다음과 같이 모형화될 수 있다고 결론지었다.

$$2\{\nu \overline{u_{i,k} u_{i,m} u_{k,m}} + \nu^2 \overline{u_{i,km} u_{i,km}}\} = C_{\epsilon 2}^* \frac{\epsilon^2}{k} \quad (18)$$

$P_\epsilon^2 - \Gamma$ 에 대한 Rodi의 주장과 HL⁽⁹⁾의 결론은 고 레이놀즈수 구역에서는 P_ϵ^2 와 Γ 의 크기가 Fig. 2에서와 같이 y^+ 가 증가함에 따라서 단순 감소하기 때문에 타당성이 인정된다. 그러나 벽면저층에서는 P_ϵ^2 와 Γ 가 완전히 다른 변화 경향을 보이기 때문에

식 (18)과 같이 하나의 식으로 통합해서 나타내면 그 미세한 변화 경향을 정확히 묘사하지는 못한다.

3. 저 레이놀즈수 $k-\varepsilon$ 모형에 대한 제안

3.1 난류운동에너지 소멸률 방정식의 다중 생성물 모형

벽면인접부에서 유동속도 성분을 Taylor 급수로 전개하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} u_1^+ &= b_1(y^+) + c_1(y^+)^2 + d_1(y^+)^3 + \dots \\ u_2^+ &= c_2(y^+)^2 + d_2(y^+)^3 + \dots \\ u_3^+ &= b_3(y^+) + c_3(y^+)^2 + d_3(y^+)^3 + \dots \end{aligned} \quad (19)$$

벽면인접부에서 식 (19)로부터 난류운동에너지와 그 소멸률은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$k^+ = a(y^+)^2 + b(y^+)^3 + \dots \quad (20)$$

$$\varepsilon^+ = 2a + 4b(y^+) + \dots \quad (21)$$

여기서, $a = (b_1^2 + b_3^2)/2$, $b = (b_1c_1 + b_3c_3)$ 이다.

레이놀즈응력 $-\overline{u_1u_2^+}$ 는 식 (19)를 사용하여 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$-\overline{u_1u_2^+} = \frac{1}{2}\overline{b_1b_{3,3}}(y^+)^3 + \dots \quad (22)$$

완전발달된 평판유동에서 벽부근의 평균속도는 다음과 같이 변할 것이다.

$$U^+ = y^+ + O[(y^+)^2] \quad (23)$$

식 (22)와 (23)을 난류운동에너지 생성률항에 대입하면

$$P_k^+ = \frac{1}{2}\overline{b_1b_{3,3}}(y^+) + O[(y^+)^2] \quad (24)$$

와 같이 된다. ε 방정식의 원천항들의 벽면인접부 거동을 분석하기 위해서 MKM⁽⁷⁾은 Taylor 급수 전개를 통하여 다음의 식들을 얻었다.

$$P_\varepsilon^{1+} = 2\overline{b_1b_{3,3}}(y^+) + O[(y^+)^3] \quad (25)$$

$$P_\varepsilon^{2+} = 4\overline{c_1c_2}(y^+) + O[(y^+)^3] \quad (26)$$

$$P_\varepsilon^{3+} = -\frac{1}{Re_\tau}\overline{b_1b_{3,3}}(y^+)^2 + O[(y^+)^3] \quad (27)$$

$$P_\varepsilon^{4+} = 3(\overline{b_1b_1b_{3,3}} + \overline{b_3b_3b_{1,1}})(y^+) + O[(y^+)^2] \quad (28)$$

$$T_\varepsilon^+ = (\overline{b_1b_1b_{3,3}} + \overline{b_3b_3b_{1,1}})(y^+) + O[(y^+)^2] \quad (29)$$

$$P_\varepsilon^{5+} = -8\overline{c_2c_2} + O[(y^+)] \quad (30)$$

$$\begin{aligned} D_\varepsilon^+ &= 4[\overline{b_{1,1}b_{1,1}} + \overline{b_{1,3}b_{1,3}} + \overline{b_{3,3}b_{3,3}} + \overline{b_{3,1}b_{3,1}} \\ &\quad + 2(\overline{c_{1,1}c_{1,1}} + \overline{c_{2,2}c_{2,2}} + \overline{c_{3,3}c_{3,3}})] + 2\overline{c_{2,2}c_{2,2}} \\ &\quad + O[(y^+)] \end{aligned} \quad (31)$$

$$\begin{aligned} \Gamma^+ &= 4[\overline{b_{1,1}b_{1,1}} + \overline{b_{1,3}b_{1,3}} + \overline{b_{3,3}b_{3,3}} + \overline{b_{3,1}b_{3,1}} \\ &\quad + 2(\overline{c_{1,1}c_{1,1}} + \overline{c_{2,2}c_{2,2}} + \overline{c_{3,3}c_{3,3}})] + O[(y^+)] \end{aligned} \quad (32)$$

벽면부근에서는 위 방정식들의 우변 제1항이 각 배분항들의 대부분을 차지하기 때문에 이 벽면극한 조건(wall limiting condition)의 만족은 저 레이놀즈수 ε 방정식 모형화에 가장 중요한 요소가 된다. 따라서 본 연구는 벽면극한조건을 만족시키는 ε 방정식의 다중 생성물 모형을 제안하는데 그 의의가 있다.

혼합생성률 식 (8)은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$P_\varepsilon^i = -\varepsilon_{ik}S_{ik} = -\varepsilon_{ij}S_{ij} \quad (33)$$

식 (33)에서 ε_{ij} 가 알려지면 P_ε^i 을 위한 근사화 가정이 필요 없게 된다. HL⁽¹⁰⁾는 벽면에 접근할 때 ε_{ij} 에 대해서 다음과 같은 가정을 제안하였다.

$$\varepsilon_{ij} = (1 - f_{w1})\varepsilon_{ij}^{iso} + f_{w1}\varepsilon_{ij}^* \quad (34)$$

여기서 $\varepsilon_{ij}^{iso} = 2\varepsilon\delta_{ij}/3$, $\varepsilon_{ij}^* = \overline{u_iu_j\varepsilon}/k$ 이다.

그러나 Launder와 Reynolds⁽²¹⁾에 의하면 $\varepsilon_{ij}^* = \overline{u_iu_j\varepsilon}/k$ 의 가정은 벽면극한 조건을 만족시키지 않는다. 따라서 Launder와 Teslepidakis⁽²²⁾는 벽면극한 조건을 만족시키는 다음과 같은 새로운 ε_{ij}^* 모형을 제안하였다.

$$\varepsilon_{ij}^* = \frac{\frac{\varepsilon}{k}\{\overline{u_iu_j} + \overline{u_iu_kn_kn_j} + \overline{u_ju_kn_kn_i} + n_in_j\overline{u_ku_ln_kn_l}\}}{1 + \frac{3}{2}\frac{\overline{u_ku_l}}{k}n_kn_l} \quad (35)$$

식 (34), (35)를 식 (33)에 대입하면 P_ε^i 에 대해서 다음의 모형식이 유도된다.

$$\begin{aligned} P_\varepsilon^i &= (1 - f_{w1})\left(-\frac{2}{3}\varepsilon\delta_{ij}\right)S_{ij} - f_{w1}\varepsilon_{ij}^*S_{ij} \\ &= -f_{w1}\varepsilon_{ij}^*S_{ij} \\ &= \frac{f_{w1}\frac{\varepsilon}{k}(P_k - 2\overline{u_2u_2}S_{2j})}{1 + \frac{3}{2}\frac{\overline{u_2^2}}{k}} \end{aligned} \quad (36)$$

여기서 하첨자 2는 벽면에 수직인 방향을 나타낸다.

완전발달된 평판유동에서 식 (36)은 다음과 같은 표준형 생성물 모형식으로 전환된다.

$$P_\varepsilon^i = \frac{2f_{w1}}{1 + \frac{3}{2}\frac{\overline{u_2^2}}{k}}\frac{P_k\varepsilon}{k} = C_{\varepsilon 1}\frac{P_k\varepsilon}{k} \quad (37)$$

본 연구에서는 벽면 천이함수 f_{w1} 의 모형으로 다음과 같은 지수함수식을 사용하였다.

$$f_{w1} = \exp\left[-\left(\frac{R_t}{87}\right)^2\right] \quad (38)$$

모형상수 87은 식 (37)의 모형함수에 의한 P_ϵ^+ 를 $Re_\tau=395$ 의 완전발달된 평판유동에서 RM이 DNS 자료로부터 얻은 ϵ 배분항의 크기와 비교함으로써 구하였다.

2차 모멘트 모형에서는 식 (37)에서의 $\overline{u_2^2}$ 을 레이놀즈응력 방정식이나 대수응력식에 의해서 계산할 수 있다. 그러나 $k-\epsilon$ 모형에서는 이 값에 대한 모형이 필요하다. 본 연구에서는 $Re_\tau=395$ 의 평판유동에서의 DNS 자료로부터 다음의 상관식을 구하여 사용하였다.

$$\frac{\overline{u_2^2}}{k} = 0.4 \left[\tanh\left(\frac{y^+}{37}\right) \right]^2 \quad (39)$$

식 (38), (39)를 식 (37)에 대입하면 $C_{\epsilon1}$ 은 다음과 같이 나타난다.

$$C_{\epsilon1} = \frac{2 \exp\left[-\left(\frac{R_t}{87}\right)^2\right]}{1 + 0.6 \left[\tanh\left(\frac{y^+}{37}\right) \right]^2} \quad (40)$$

식 (20), (21), (24)와 (25)로부터 식 (37)의 $C_{\epsilon1}$ 은 벽면에 접근할 때 2로 수렴함을 알 수 있다. 본 연구에서 제안한 천이함수 f_{w1} 은 벽면에서 1로 수렴하기 때문에 $C_{\epsilon1}$ 함수는 이 벽면조건을 만족시킴을 알 수 있다.

Fig. 3은 $Re_\tau=395$ 에서 무차원화된 P_ϵ^+ 에 대한 본 모형과 DNS 자료로부터의 배분항을 비교한 것인데 매우 잘 일치함을 알 수 있다. P_ϵ^+ 의 최대치

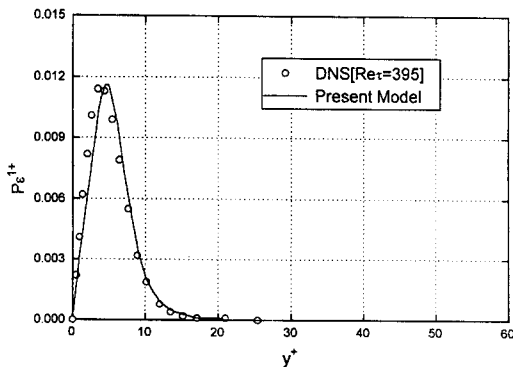


Fig. 3 Model for P_ϵ^+ -production compared with DNS data for $Re_\tau=395$

가 벽의 최인접부에서 발생한 것을 알 수 있는데 이것이 ϵ 의 최대치를 벽면에 발생시키고 벽면에서 ϵ 이 음의 구배를 갖게 해주는 주원인이 된다. 과거의 모형에서는 P_ϵ^+ 을 별도로 모형화하지 않았기 때문에 벽면인접부에서 ϵ 방정식 생성률의 최대치를 예측할 수 없었고 그것은 ϵ 의 최대값이 벽에서 떨어진 곳에서 발생하게 하는 주원인이 되었다. 그러므로 P_ϵ^+ 에 대한 정확한 모형을 제안한 것이 본 연구의 가장 큰 의의이다.

P_ϵ^+ 에 대해서 본 연구에서는 HL⁽⁹⁾이 제안한 식 (16)과 (17)의 형태를 약간 수정하여 사용하였다. 식 (20), (21)과 (24)를 식 (17)의 $P_k\epsilon/k$ 에 대입하면 이 식은 $O[(y^+)]$ 에 비례하게 된다. 그러나 식 (26)에서 P_ϵ^+ 는 벽면에 접근할 때 $P[(y^+)^2]$ 에 비례해야 하기 때문에 이 벽면극한조건을 만족시키기 위해서 본 연구에서는 쌍곡선정점(hyperbolic tangent) 벽면 감쇄함수를 곱하여 다음과 같은 P_ϵ^+ 모형을 제안하였다.

$$P_\epsilon^+ = C_{\epsilon2} \frac{P_k\epsilon}{k} \left[\tanh\left(\frac{y^+}{C_{a2}}\right) \right] \quad (41)$$

본 연구에서는 $C_{\epsilon2}$ 를 표준모형에서 일반적으로 사용하는 1.44 대신 1.10으로 사용하였는데, 이것은 고 레이놀즈수 구역에서 본 P_ϵ^+ 모형을 고 레이놀즈수 구역의 DNS 자료에 의한 P_ϵ^+ 분포와 일치시키기 위해서이다. C_{a2} 는 $Re_\tau=395$ 에서 평판유동의 DNS 자료와 이 예측된 배분항을 비교함으로써 2.5로 결정하였다.

Fig. 4는 무차원화된 본 P_ϵ^+ 모형과 DNS 자료를 비교한 그림이다. $y^+ \cong 10$ 구역을 제외하고 본 모형이 DNS 자료와 그 크기 및 전체적인 변화형상

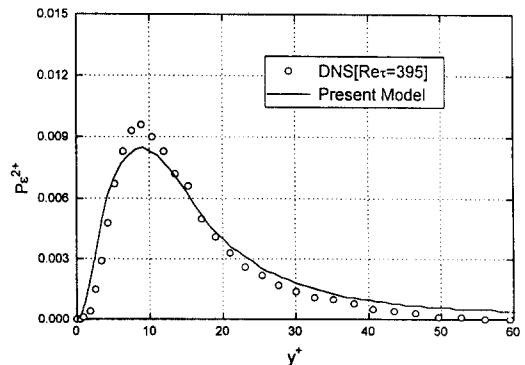


Fig. 4 Model for P_ϵ^+ -production compared with DNS data for $Re_\tau=395$

이 잘 일치하는 것을 볼 수 있다.

식 (37)과 (41)을 합하면 다음과 같이 식 (17) 형태의 표준형 모형으로 전환된다.

$$P_{\epsilon}^1 + P_{\epsilon}^2 = \left\{ \frac{2f_{w1}}{1 + \frac{3}{2} \frac{\bar{u}_2^2}{k}} + C_{\epsilon 2} [\tanh(\frac{y^+}{C_{a2}})] \right\} \frac{P_k \epsilon}{k}$$

$$= C_{\epsilon 1}^* \frac{P_k \epsilon}{k} \quad (42)$$

여기서 $C_{\epsilon 1}^*$ 는 등가 모형상수이다. 식 (42)는 등가 모형상수 $C_{\epsilon 1}^*$ 가 벽면인접부에서 y^+ 의 변수가 되는 것을 나타내준다. 또한 LS⁽¹³⁾도 $C_{\epsilon 1}^*$ 에 대해서 다음의 식을 제안하였다.

$$C_{\epsilon 1}^* = C_{\epsilon 1} (1 + \sigma f_{w1}^{LS}) \quad (43)$$

여기서, $f_{w1}^{LS} = \exp[-(R_f/64)^2]$, $\sigma = 1.0 - 0.6 \exp(-Re_D/10^4)$ 이고, Re_D 는 유동의 중심속도와 평판의 넓이에 관계된 레이놀즈수이다.

Fig. 5는 $Re_\tau = 395$ 의 평판유동에서 $C_{\epsilon 1}^*$ 에 대한 본 모형, LS 모형 그리고 표준모형을 비교한 그림이다. 본 모형은 벽면에서 2의 값을 갖고 $y^+ = 4$ 부근에서 약 2.95의 최대값을 가지며 다시 감소하여 레이놀즈수 값 1.10으로 수렴한다. 반면 LS 모형은 벽면에서 최대값을 갖고 y^+ 가 증가함에 따라 레이놀즈수 값 1.35로 수렴함을 알 수 있다. 본 모형과 LS 모형에서 $C_{\epsilon 1}^*$ 가 정성적인 변화모양이 비슷한 것은 놀라운 일이다. 그러나 LS 모형에서 $C_{\epsilon 1}^*$ 의 최대치는 벽에서 일어나고 레이놀즈수의 변화에 따라 2.3에서 2.55까지 변화한다. 본 모형에서는 $C_{\epsilon 1}^*$ 가 레이놀즈수의 변화에 따른 큰 변화가 일어나지 않는다. 또한 본 모형은 새로운 P_{ϵ}^1 모형을 사용하였고 P_{ϵ}^2 모형에 관계된 모형상수 $C_{\epsilon 2}$ 를 1.10으로 설정하였기 때문에 벽면인접부 및 고 레이놀즈수 구역에서 DNS자료와 유사하게 거동하는 것을 볼 수 있다.

HL⁽¹⁰⁾은 P_{ϵ}^3 속의 $u_{i,j}$ 항을 평균속도의 2차구배 항으로 나타내었다. Launder와 Sharma⁽²³⁾는 HL의 가정을 더 단순화하여 다음과 같은 모형식을 제안하였다.

$$P_{\epsilon}^3 = 2\nu\nu_t (U_{,yy})^2 \quad (44)$$

그러나 이 모형으로 예측된 P_{ϵ}^3 은 Fig. 6에 보인 바와 같이 P_{ϵ}^3 을 DNS 자료보다 대단히 크게 예측하고 있다. RM은 P_{ϵ}^3 에 나타나는 $\overline{u_k u_{ij}}$ 에 대한 완전방정식을 사용하여 LS 모형을 수정하였다. 그들

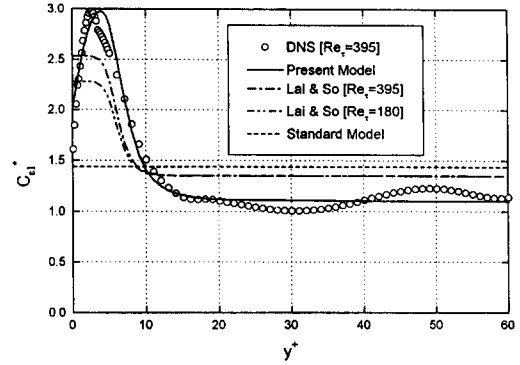


Fig. 5 Comparison of model constant $C_{\epsilon 1}^*$ in plane channel flow for $Re_\tau = 395$

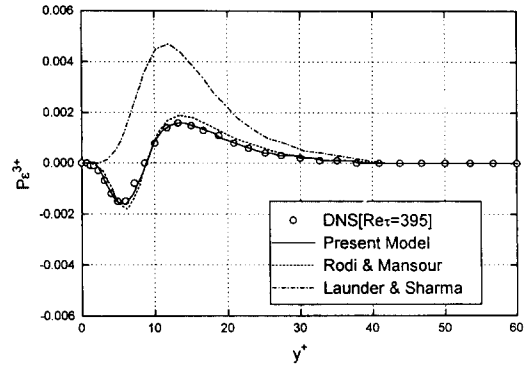


Fig. 6 Comparison of P_{ϵ}^{3+} -production model in plane channel flow for $Re_\tau = 395$

은 LS 모형에 평균속도와 난류운동에너지의 1차구배항을 포함시켜 다음의 모형식을 제안하였다.

$$P_{\epsilon}^3 = C_{\epsilon 3}^1 2\nu\nu_t (U_{,yy})^2 + C_{\epsilon 3}^2 \frac{k}{\epsilon} k_{,y} U_{,y} U_{,yy} \quad (45)$$

여기서 $C_{\epsilon 3}^1 = 0.5$, $C_{\epsilon 3}^2 = 0.0006$ 으로 선택하였다.

RM의 모형은 DNS 자료에 잘 맞으나 Fig. 6에 보이는 바와 같이 P_{ϵ}^3 의 최대값과 최소값의 크기를 약간 크게 예측하고 있다. 뿐만 아니라 식 (27)은 P_{ϵ}^3 이 벽에 접근할 때 $O[(y^+)^2]$ 으로 변해야 함을 나타내는데 식 (44), (45)는 $O[(y^+)^3]$ 로 변함을 나타낸다. 따라서 본 연구에서는 식 (45)를 지수형 감쇠함수로 나누어 주어 벽면극한조건을 만족하도록 하였다.

$$P_{\epsilon}^3 = \frac{[C_{\epsilon 3}^1 2\nu\nu_t (U_{,yy})^2 + C_{\epsilon 3}^2 \frac{k}{\epsilon} k_{,y} U_{,y} U_{,yy}]}{1 - \exp(-\frac{y^+}{C_{a3}})} \quad (46)$$

여기서, $C_{\varepsilon 3}^2=0.4$, $C_{\varepsilon 3}^2=0.0045$, $C_{d3}=4.0$ 이다.

이와 같은 감쇠함수를 사용하여 P_ε^* 의 최대값과 최소값이 과대 예측되는 것을 제거할 수 있었다.

x^{-n} 에 비례해서 소멸되는 균질난류유동 (homogeneous turbulent flow)에서 $C_{\varepsilon 2}^*=1/n+1$ 이 된다는 것을 쉽게 밝힐 수 있다.⁽¹⁰⁾ JL⁽²⁾과 HL⁽¹⁰⁾은 $P_\varepsilon^* - \Gamma$ 에 대한 모형식 (18)에 지수형 감쇠함수 $f_\varepsilon(R_t)$ 를 곱해 주어 난류레이놀즈수 R_t 의 감소에 따른 $C_{\varepsilon 2}^*$ 의 변화를 고려하였다.

ε 은 벽면에서 유한한 값을 갖고 k 는 0이 되기 때문에 ε^2/k 는 벽면에서 무한대 값을 가질 것이다. JL⁽²⁾과 HL⁽¹⁰⁾은 ε^2/k 에서 ε^2 을 $\varepsilon\bar{\varepsilon}$ 으로 대체시킴으로써 이 값이 무한대가 되는 것을 방지하였다. 여기서 $\bar{\varepsilon}$ 은 다음과 같이 정의된다.

$$\bar{\varepsilon} \equiv \varepsilon - 2\nu \left(\frac{\partial \sqrt{k}}{\partial x_i} \right)^2 \quad (47)$$

따라서 JL⁽²⁾과 HL⁽¹⁰⁾이 제안한 모형은

$$P_\varepsilon^* - \Gamma = -C_{\varepsilon 2}^* f_{\varepsilon 1}(R_t) \frac{\varepsilon \bar{\varepsilon}}{k} \quad (48)$$

과 같은 형태가 된다.

식 (28)과 (32)는 P_ε^* 가 벽면에 접근함에 따라 $O[(y^+)^3]$ 로 변함을 나타내고 Γ 는 일정값이 되는 것을 나타내 준다. 따라서 $P_\varepsilon^* - \Gamma$ 를 하나의 항으로 모형화하려면 복잡한 수정계수의 도입이 필요하다. NS의 연구는 이와 같이 복잡한 수정계수의 도입으로 정확한 k , ε 분포를 얻은 좋은 예이다.

본 연구는 DNS 자료를 이용하여 P_ε^* 와 Γ 에 대해서 개별적 모형을 제안하는 데 있다. 본 연구에서 P_ε^* 와 Γ 가 벽면에서 무한대로 되는 것을 방지하기 위해서 $\bar{\varepsilon}$ 를 쓰지 않고 대신 지수형 감쇠함수를 사용하였다. 식 (28)의 벽면극한조건을 만족시키도록 감쇠함수를 사용하면 P_ε^* 는 다음과 같이 모형화된다.

$$P_\varepsilon^* = C_{\varepsilon 4} f_{\varepsilon 1}(R_t) \frac{\varepsilon^2}{k} [1 - \exp(-\frac{y^+}{C_{d4}})]^3 \quad (49)$$

여기서, $f_{\varepsilon 1}(R_t) = 1 - 0.3 \exp[-(R_t/6)^2]$, $C_{\varepsilon 4} = 3.3$, $C_{d4} = 5.0$ 이다.

식 (20), (21)을 식 (49)에 대입하면서 식 (28)의 벽면극한조건이 만족된다. Fig. 7은 무차원화된 P_ε^* 에 대한 본 모형을 DNS 자료와 비교한 것인데 그 형상이 매우 잘 일치함을 알 수 있다. 특히 $y^+ = 3$ 부근의 P_ε^* 극대치와 $y^+ = 7$ 부근에서 극소치의

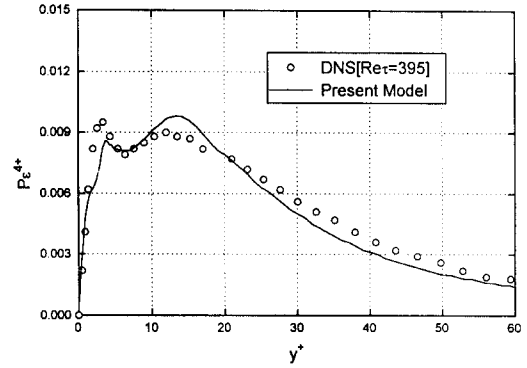


Fig. 7 Model for P_ε^* production compared with DNS data for $Re_\tau = 395$

발생을 잘 예측한 것은 다중 생성물 모형의 우수성을 입증해 주고 있는 것이다.

Γ 에 대해서도 식 (49)와 같은 형태의 모형을 택하였으며 RM 모형을 수정하여 다음과 같은 모형을 제안하였다.

$$\Gamma = C_{\varepsilon 5} f_{\varepsilon 1}(R_t) f_{\varepsilon 2}(R'_p) [\tanh(\frac{y^+}{C_{d5}})]^2 \frac{\varepsilon^2}{k} \quad (50)$$

여기서, $C_{\varepsilon 5} = 4.75$, $C_{d5} = 7.2$ 이고,

$$f_{\varepsilon 2}(R'_p) = \exp(R'^3_p) \quad (51)$$

$$R'_p = \frac{P_k}{\varepsilon} \frac{(1 + 0.51 f_{w2})}{0.3 R_t^{0.5}} \quad (52)$$

$$f_{w2} = \frac{2 f_{w1}}{1 + \frac{3}{2} \frac{\bar{u}_2^2}{k}} \quad (53)$$

이다.

식 (50)에서 쌍곡선정점 (hyperbolic tangent) 감쇠함수를 택한 것은 Γ 의 벽면인접부 거동을 향상시키기 위해서이다. 벽면인접부에서 Γ 가 P_ε^* 과 P_ε^* 와 균형을 이루도록 $f_{\varepsilon 2}$ 함수를 곱해주었다. P_ε^* 이 P_k , ε 과 k 뿐만 아니라 f_{w2} 의 함수이므로 RM의 $f_{\varepsilon 2}$ 함수를 식 (52)와 같이 f_{w2} 를 포함하는 식으로 수정하였다. Fig. 8은 무차원화된 Γ 에 대해 본 모형을 DNS 자료와 비교한 것이다.

식 (50)을 식 (49)에서 빼어 정리하면 식 (18)과 같은 표준형 생성물 모형이 된다.

$$P_\varepsilon^* - \Gamma = \{C_{\varepsilon 4} f_{\varepsilon 1} [1 - \exp(-\frac{y^+}{C_{d4}})]^3 - C_{\varepsilon 5} f_{\varepsilon 1} f_{\varepsilon 2} [\tanh(\frac{y^+}{C_{d5}})]^2\} \frac{\varepsilon^2}{k} = -C_{\varepsilon 2}^* \frac{\varepsilon^2}{k} \quad (54)$$

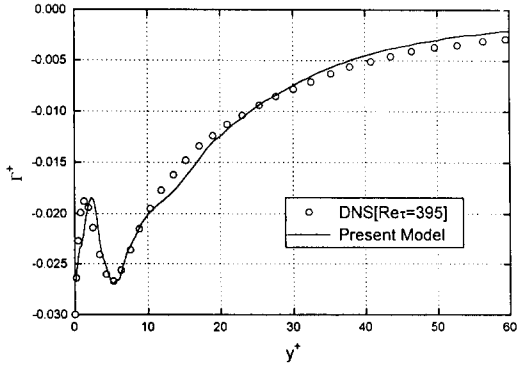


Fig. 8 Model for Γ^+ -dissipation compared with DNS data for $Re_\tau = 395$

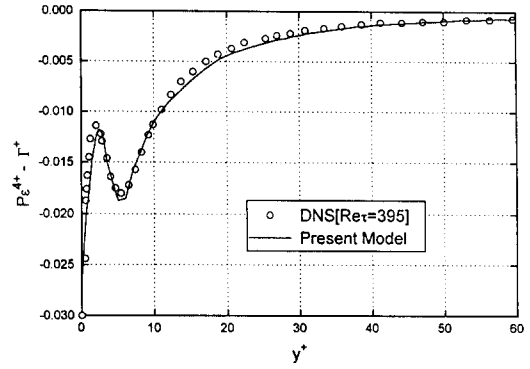


Fig. 10 Model for $P_\epsilon^+ - \Gamma^+$ compared with DNS data for $Re_\tau = 395$

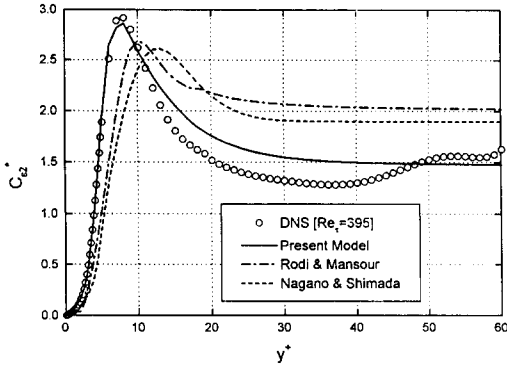


Fig. 9 Comparison of model constant $C_{\epsilon 2}^*$ in plane channel flow for $Re_\tau = 395$

여기서, $C_{\epsilon 2}^*$ 는 등가 모형상수이다. Fig. 9에서 $C_{\epsilon 2}^*$ 에 대한 본 모형과 RM의 모형, NS의 모형들을 비교하였다. 본 모형은 타 모형들보다 벽면 가까운 곳에서 최대값을 가지며 고 레이놀즈수 구역에서는 기존의 모형상수들보다 상당히 낮은 값인 1.45로 접근하는 것을 볼 수 있다. 또한 본 모형은 DNS 자료와 비교할 때 벽면인접부 및 고 레이놀즈수 구역에서 DNS 자료와 비교적 잘 일치하는 것을 볼 수 있다. 이는 $C_{\epsilon 1}^*$ 의 경우와 마찬가지로 고 레이놀즈수 구역에서 본 모형이 기존의 표준 $k-\epsilon$ 모형과는 다르게 DNS 자료를 따르는 모형상수들을 결정하였기 때문이다.

본 연구의 ϵ 방정식 모형에 사용된 등가 모형상수 $C_{\epsilon 1}^*$ 와 $C_{\epsilon 2}^*$ 는 고 레이놀즈수 구역에서 기존의 표준모형에서 사용된 모형상수들에 비해 상당히 작은 값을 갖지만 두 등가 모형상수의 차는 기존의 표형상수들에 의한 차와 유사한 값을 갖는다는 것을 알 수 있다.

Fig. 10은 무차원화된 본 $P_\epsilon^+ - \Gamma^+$ 의 모형을 DNS 자료와 비교한 것이다. $P_\epsilon^+ - \Gamma^+$ 에 대한 DNS 자료는 $y^+ < 10$ 에서 국소적으로 파형(wave) 형상을 갖는 것을 알 수 있다. 이와 같은 파형함수를 얻으려면 단순한 수정함수의 부가만으로는 불가능하고 복잡한 경험함수를 사용해야 한다. 그러나 본 연구에서는 다중 생성물 모형을 사용함으로써 NS와 같이 복잡한 모형을 사용한 경우와 벽면 세부거동이 거의 일치하는 결과를 얻어낼 수 있었다.

3.2 확산수송 모형

일반적으로 $k-\epsilon$ 모형에서는 난류확산항에 대해서는 다음과 같은 구배 모형을 사용한다.

$$T_k = \frac{d}{dy} \left[\frac{\nu_t}{\sigma_k} \frac{dk}{dy} \right] \quad (55)$$

$$T_\epsilon = \frac{d}{dy} \left[\frac{\nu_t}{\sigma_\epsilon} \frac{d\epsilon}{dy} \right] \quad (56)$$

난류확산항에 대한 구배 모형에서 가장 중요한 것은 주로 난류 프란틀수 σ_k 와 σ_ϵ 의 모형에 있다.

Blackwell 등⁽²⁴⁾의 실험자료는 열난류 프란틀수는 벽면에 접근함에 따라 상승하여 벽면에서 최대값을 갖는 것을 보여준다. 그러나 Kim과 Moin⁽²⁵⁾ 그리고 Kasagi 등⁽²⁶⁾은 완전발달된 평판유동에서의 열전달을 DNS로 해석하여 열난류 프란틀수의 최대값이 벽에서 떨어진 곳에서 일어난다는 것을 밝혔다. 만약 T_k^* 에 대한 DNS 자료를 이용하여 식 (55)를 u_τ^+/ν 로 무차원화하면 σ_k 값은 다음 식으로 계산할 수 있게 된다.

$$\sigma_k = \frac{(\nu_t/\nu) \frac{dk^+}{dy^+}}{\int_0^{y^+} T_k^+ dy^+} \quad (57)$$

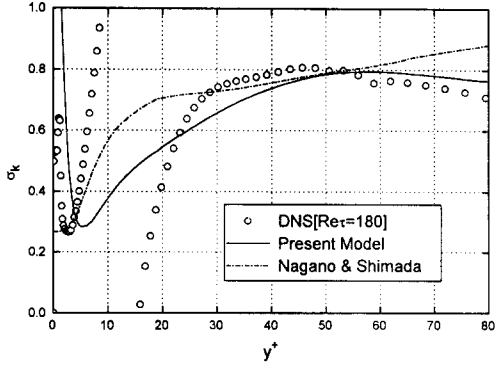


Fig. 11 Comparison of the models of σ_k with DNS data for $Re_\tau = 180$

Fig. 11은 DNS 자료를 이용하여 계산한 σ_k 의 분포를 나타내는데, σ_k 가 $y^+ = 12$ 부근에서 무한대 값을 갖는 것을 보여준다. 이 현상은 식 (57)의 분모가 그곳에서 0이 되기 때문이다. 이 특징은 난류확산에 대한 구배 모형 가정에서 온 것이어서 실제성이 없다. DNS 자료에 대한 σ_k 는 $y^+ = 50$ 에서 극대값을 갖는데 그것은 Kim과 Moin⁽²⁵⁾, Kasagi 등⁽²⁶⁾이 계산한 열난류 프란틀수가 최대값을 갖는 위치와 일치한다. 그리고 y^+ 가 감소하여 벽면 인접하면 $y^+ = 3$ 부근에서 최소값을 가지며 다시 증가하여 벽에서 일정값을 갖는다. 만약 구배 모형식 (55)를 2차 모멘트 닫힘 모형에서 사용하는 확산모형⁽²⁷⁾과 같게 놓으면 σ_k 에 대한 다음 식이 얻어진다.

$$\sigma_k = \frac{C_\mu f_\mu \frac{k^2}{\varepsilon}}{C_k \frac{k}{\varepsilon} \frac{\bar{u}_2^2}{k}} = \frac{C_\mu f_\mu}{C_k} \frac{\bar{u}_2^2}{k} \quad (58)$$

그러나 σ_k 를 Taylor 급수 전개하여 σ_k 가 벽에서 일정값을 갖도록 하는 극한조건을 만족시키려면 지수형 감쇠함수를 곱해 주어야 하며 그 결과는 다음과 같은 식으로 표현된다.

$$\sigma_k = \frac{C_\mu f_\mu}{C_k} \frac{\bar{u}_2^2}{k} \left[1 - \exp\left(-\frac{y^+}{C_{ak}}\right) \right]^3 \quad (59)$$

본 연구에서는 식 (59)를 DNS 자료와 비교함으로써, $C_k = 0.33$, $C_{ak} = 5.0$ 으로 결정하였다. 식 (39)를 (59)에 대입하면 본 모형은 Fig. 11과 같은 형상을 갖는다. NS 모형과 비교할 때 $y^+ > 50$ 부근에서 본 모형이 NS 모형보다 더 DNS 자료에

근접함을 알 수 있다.

ε 방정식의 난류확산항 T_ε 모형의 난류 프란틀수 σ_ε 은 일반적인 $k-\varepsilon$ 모형에서와 같이 $\sigma_\varepsilon = 1.3\sigma_k$ 로 사용하였다.

압력확산항 Π_k 와 Π_ε 은 다른항들보다 작기 때문에 이 항들은 보통 무시가 되거나 다른 항에 흡수시킨다. 그러나 벽면저층에서는 다른 항들의 합이 대단히 작기 때문에 벽면인접부 배분항들의 정밀한 균형을 위해서는 Π_k 와 Π_ε 에 대한 개별 모형을 도입하는 것이 더 좋다.

벽면저층에서 완전발달된 평판유동에 대한 난류 운동에너지 방정식은 다음과 같이 단순화될 수 있다.

$$\frac{d^2 k^+}{dy^{+2}} + \Pi_k^+ - \varepsilon^+ = 0 \quad (60)$$

만약, 식 (20), (21)을 식 (60)에 대입하면 Π_k^+ 에 대한 다음과 같은 벽면 거동이 얻어진다.

$$\Pi_k^+ = -2by^+ + O[y^+]^2 \quad (61)$$

그러나 DNS 자료에 의하면 Π_k^+ 의 배분율은 y^+ 가 증가함에 따라서 0으로 감소하기 때문에 식 (61)은 단지 벽면인접부에서만 중요하다. Π_k^+ 에 대한 NS 모형은 이러한 벽면극한조건과 큰 y^+ 에서의 소멸조건을 만족하기 때문에 본 연구에서 그대로 사용하였다.

$$\Pi_k = -\frac{\partial}{\partial x_k} (0.5\nu f_{wk} \frac{k}{\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_k}) \quad (62)$$

여기서, $f_{wk} = [-(y^+/C_{\pi k})^2]$, $C_{\pi k} = 9.0$ 이다.

Launder와 Tselepidakis⁽²²⁾는 ε 방정식에도 다음과 같은 압력확산항 모형을 사용할 것을 제안하였다.

$$\Pi_\varepsilon = \frac{\partial}{\partial x_k} (C_{\varepsilon 6} \nu \frac{\bar{\varepsilon}}{k} \frac{\partial k}{\partial x_k}) \quad (63)$$

여기서, $C_{\varepsilon 6}$ 은 0.92 값을 갖는다.

NS는 식 (63)을 DNS 자료에 더 잘 일치시키기 위해서 수정한 식

$$\Pi_\varepsilon = \frac{\partial}{\partial x_k} [C_{\varepsilon 6} \nu (1 - f_{wk}) \frac{\bar{\varepsilon}}{k} \frac{\partial k}{\partial x_k} f_{wk}] \quad (64)$$

을 제안하였다. 여기서 $C_{\varepsilon 6}$ 은 0.5이다.

그러나 식 (63), (64)는 Fig. 12에서 보여주는 바와 같이 $T_\varepsilon + \Pi_\varepsilon$ 값의 벽면인접부 거동에서 DNS 자료와 상반되게 큰 벽면값을 갖고 있다. 따라서

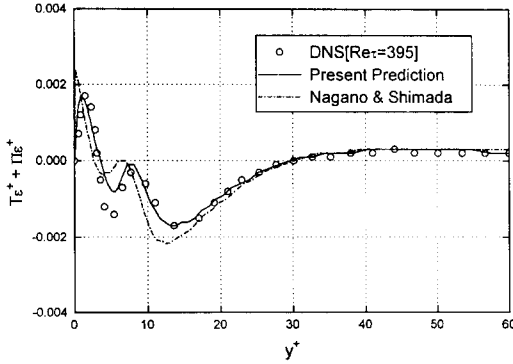


Fig. 12 Comparison of the distribution of $T_\epsilon^+ + \Pi_\epsilon^+$ for $Re_\tau = 395$

본 연구에서는 이 벽면극한조건을 만족시키기 위해서 NS 모형에 감쇠함수를 하나 더 곱하여 다음의 모형을 사용하였다.

$$\Pi_\epsilon = C_{\epsilon 6} \nu \frac{\partial}{\partial x_k} \left[(1 - f_{wf}) \frac{\epsilon}{k} \frac{\partial k}{\partial x_k} \right] f_{wk} f_{w\epsilon} \quad (65)$$

여기서, $f_{w\epsilon} = 1 - 1.3 \exp(-y^+/C_{\pi\epsilon})$, $C_{\pi\epsilon} = 0.4$ 이다.

Fig. 12는 무차원화된 $T_\epsilon + \Pi_\epsilon$ 의 본 예측값과 NS 모형에 의한 예측값을 DNS 자료와 비교한 것이다. 본 모형이 전구역에서 NS 모형보다 DNS 자료에 더 잘 일치하는 것을 알 수 있다.

3.3 와점성계수의 수정함수 f_μ

벽면인접부에서 점성계수 효과가 전단응력에 미치는 영향을 고려하기 위해 와점성계수 관계식에 f_μ 함수를 도입하였다.

$$\nu_t = f_\mu C_\mu \frac{k^2}{\epsilon} \quad (66)$$

여기서, 계수 C_μ 는 일반적으로 0.09로 사용되고, 수정함수 f_μ 는 저 레이놀즈수 $k-\epsilon$ 모형에서 레이놀즈응력의 분포에 가장 큰 영향을 주기 때문에 많은 모형이 제안되었고 또 시험되었다. 대부분의 모형들은 경험으로 얻어진 함수식을 사용하였지만 MK⁽⁴⁾는 난류운동에너지 소멸률의 벽면인접부 거동으로부터 f_μ 에 대한 이론식을 다음과 같이 유도하였다.

$$f_\mu = \left(1 + \frac{3.45}{\sqrt{R_t}} [1 - \exp(-\frac{y^+}{70})] \right) \quad (67)$$

Speziale, Abid와 Anderson⁽¹⁵⁾은 식 (67)에서 지수형 감쇠함수를 쌍곡선정점 (hyperbolic tangent)

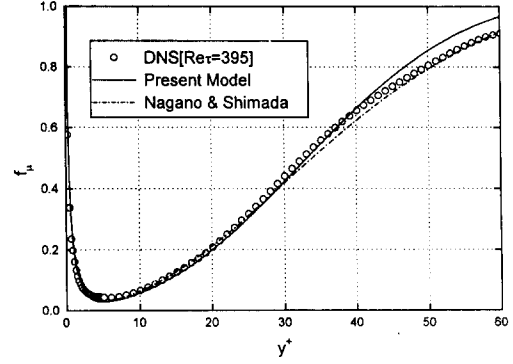


Fig. 13 Comparison of f_μ functions with DNS data for $Re_\tau = 395$

함수로 대체하여 DNS 자료에 더 잘 일치하는 f_μ 함수를 얻었다. 김 등⁽²⁸⁾은 좀 더 정확한 벽면 난류거동을 해석함으로써 MK의 모형을 수정한 다음의 모형을 제안하였다.

$$f_\mu = \frac{1}{2} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{47.4}{R_t}} \right) \tanh\left(\frac{y^+}{60}\right) \quad (68)$$

MKM⁽⁸⁾은 DNS 자료로부터 다음의 식으로 f_μ 값을 계산해 낼 수 있었다.

$$f_\mu = \frac{(\overline{uv^+})^2}{k^+} \frac{\epsilon^+}{C_\mu P_k^+} \quad (69)$$

그러나 식 (67), (68)은 식 (69)에 의한 f_μ 의 벽면극한조건을 만족시키지 않는다. 따라서 본 연구에서는 f_μ 가 벽면인접부 극한거동을 만족시키도록 식 (68)을 수정한 다음 식을 사용하였다. Fig. 13은 본 f_μ 모형을 DNS 자료와 비교한 것이다.

$$f_\mu = \frac{1}{2} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{47.4}{R_t}} \right) \tanh\left(\frac{y^+}{54}\right)^2 \left(1 + \frac{20}{R_t^{0.75}} \tanh(R_t^{0.5}) \right) \quad (70)$$

본 f_μ 모형은 국부적으로 NS 모형보다 DNS 자료에 덜 일치하는 곳도 있지만 NS의 모형식은 순전히 경험적으로 얻어진 식이기 때문에 본 연구에서는 이론적 해석에 근거해서 얻어진 식 (70)을 사용하였다.

4. 모형들의 비교

본 연구에서는 난류운동에너지 소멸률 ϵ 방정식의 원천항들을 각각 모두 모형화하는 이른바 다중

생성물 모형을 도입하였다. 이 새로운 개념의 본 $k-\epsilon$ 모형에 대한 정확성을 검증하기 위하여 벽마찰속도와 평판 넓이의 반을 기준으로 한 레이놀즈수 (Re_τ)가 180과 395인 완전 발달된 평판유동에 대해 해석을 시도하였고, 그 결과로 얻어진 각종 난류 특성치와 평균속도 분포를 Kim 등⁽¹⁷⁾의 DNS 자료, MK⁽⁴⁾, SZS⁽⁶⁾, NS⁽¹¹⁾ 등의 난류모형에 의한 해석결과들과 비교하였다.

MK⁽⁴⁾에 의한 ϵ 방정식 모형은

$$P_\epsilon^1 + P_\epsilon^2 + P_\epsilon^3 - \Gamma = C_{\epsilon 1} \frac{P_k \epsilon}{k} - C_{\epsilon 2} f_{\epsilon 2}^{MK} \frac{\epsilon^2}{k} \quad (71a)$$

$$P_\epsilon^3 = 0 \quad (71b)$$

과 같다. 여기서

$$f_{\epsilon 2}^{MK} = \left\{ 1 - \frac{2}{9} \exp\left[-\left(\frac{R_t}{6}\right)^2\right] \right\} \left[1 - \exp\left(-\frac{y^+}{5}\right) \right]^2 \quad (72)$$

이고, 와점성계수의 수정함수 f_μ^{MK} 는 식 (67)과 같다. 해석에 필요한 난류 모형계수들은 $\sigma_k=1.4$, $\sigma_\epsilon=1.3$, $C_{\epsilon 1}=1.4$, $C_{\epsilon 2}=1.8$, $C_\mu=0.09$ 이다.

SZS⁽⁶⁾는 ϵ 방정식의 생성항에 다음과 같은 2개의 부가적인 요소들을 더해 줌으로써 Shima⁽¹⁴⁾가 제안한 이른바 부합조건을 만족시켜 벽면에서 ϵ^+ 가 최고치에 도달하게 하였다.

$$P_\epsilon^1 + P_\epsilon^2 + P_\epsilon^3 + P_\epsilon^4 - \Gamma = C_{\epsilon 1} \frac{P_k \epsilon}{k} - C_{\epsilon 2} f_{\epsilon 2}^{SZS} \frac{\epsilon \tilde{\epsilon}}{k} + f_{w1}^{SZS} \left[-2 \frac{\epsilon \tilde{\epsilon}}{k} + 1.5 \frac{\epsilon^{*2}}{k} \right] \quad (73)$$

여기서, $\tilde{\epsilon}$ 는 식 (47)과 같고, $f_{\epsilon 2}^{SZS}=1.0$ 이며

$$f_{w1}^{SZS} = \exp\left[-\left(\frac{R_t}{64}\right)^2\right] \quad (74)$$

$$\epsilon^* = \epsilon - 2\nu \frac{k}{y^2} \quad (75)$$

이다. 와점성계수의 수정함수는

$$f_\mu^{SZS} = \left[1 + \frac{3.45}{\sqrt{R_t}} \right] \tanh\left(\frac{y^+}{115}\right) \quad (76)$$

이고, 모형계수들은 $\sigma_k=0.75$, $\sigma_\epsilon=1.45$, $C_{\epsilon 1}=1.5$, $C_{\epsilon 2}=1.83$, $C_\mu=0.096$ 이다.

NS⁽¹¹⁾는 ϵ 방정식의 소멸항에 다음과 같이 난류 레이놀즈수 R_t 와 와점성계수 ν_t 의 함수로 이루어진 복잡한 경험함수를 도입하여 DNS 자료에 매우 잘 일치하는 벽면인접부 난류특성을 얻을 수 있었다.

$$P_\epsilon^1 + P_\epsilon^2 + P_\epsilon^3 - \Gamma = C_{\epsilon 1} \frac{P_k \epsilon}{k} - C_{\epsilon 2} f_{\epsilon 2}^{NS} \frac{\epsilon^2}{k} \quad (77a)$$

$$P_\epsilon^3 = f_{w2}^{NS} \nu_t (U_{,yy})^2 + C_3^3 \nu \frac{k}{\epsilon} k_{,y} U_{,y} U_{,yy} \quad (77b)$$

여기서

$$f_{\epsilon 2}^{NS} = \left\{ 1 + \exp\left[-2 \times 10^4 R^{13}\right] \left[1 - \exp\left(-2.2 R^{0.5}\right) \right] \right\} \left(1 - f_{w1}^{NS} \right) \quad (78)$$

$$R = \frac{k}{\epsilon} \frac{u_\tau^2}{\nu + \nu_t} \frac{1}{R_t^{0.5} f_{w1}^{NS}} \quad (79)$$

$$f_{w1}^{NS} = \exp\left[-\left(\frac{y^+}{9}\right)^2\right] \quad (80)$$

$$f_{w2}^{NS} = \exp\left[-\left(\frac{y^+}{44}\right)^2\right] \quad (81)$$

이고, 와점성계수의 수정함수는

$$f_\mu^{NS} = \left(1 - f_{w2}^{NS} \left\{ 1 + \frac{45}{R_t^{0.75}} \exp\left[-\left(\frac{R_t}{55}\right)^{0.5}\right] \right\} \right) \quad (82)$$

으로 사용하였다. 한편, 다른 모형상수들은 $\sigma_k=1.2/f_t^{NS}$, $\sigma_\epsilon=1.3/f_t^{NS}$, $C_{\epsilon 1}=1.45$, $C_{\epsilon 2}=1.90$, $C_\epsilon^3=0.005$, $C_\mu=0.09$ 이고,

$$f_t^{NS} = 1 + 3.5 \exp\left[-\left(R_t/100\right)^{0.75}\right] \quad (83)$$

이다. 난류운동에너지 및 소멸률 방정식에 관계된 압력확산 모형은 식 (62), (64)와 같다.

Fig. 14는 벽면인접부에서 $Re_\tau=395$ 일 때 무차원 난류운동에너지의 분포를 보여준다. 본 $k-\epsilon$ 모형과 NS 모형은 DNS 자료와 거의 일치하는 것을 볼 수 있고, SZS 모형은 $y^+ \geq 20$ 에서 DNS자료보다 다소 크게 예측되고 있다. NS와 SZS 모형이 $y^+ \cong 15$ 에서 k^* 의 최고치를 비교적 잘 일치시키는 것은 이 모형들의 근간을 DNS 자료에 두었기 때

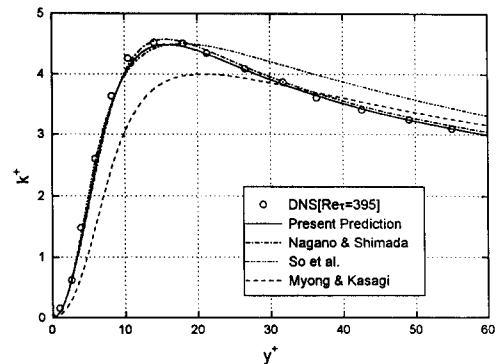


Fig. 14 Comparison of the distribution of k^* for $Re_\tau=395$

문인 것으로 해석된다. 반면, Laufer⁽¹⁸⁾의 원관유동 실험자료에 근간을 두고 모형화를 시도하였던 MK 모형은 $y^+ \leq 30$ 에서 DNS 자료와 차이가 많이 나는 것을 알 수 있다. 그러나 MK 모형은 고 레이놀즈수 구역에서 일반적으로 사용하는 일반적인 모형상수들을 그대로 사용하기 때문에 $y^+ \geq 30$ 에서는 SZS 모형보다 DNS 자료에 더 잘 일치하게 된다. 본 연구에서 비교 모형으로써 MK 모형을 택한 것은 연구자들이 DNS 자료를 바탕으로 한 새로운 모형화를 시도하기 이전에 실험자료들을 근간으로 하고 있는 기존의 저 레이놀즈수 $k-\epsilon$ 모형들 중에서 비교적 이론적인 접근이 많이 시도된 모형이기 때문이다.

Fig. 15는 무차원 난류운동에너지 소멸률 ϵ^+ 의 분포를 나타낸다. 우선 DNS 자료와 Laufer⁽¹⁸⁾에 의한 실험자료의 분포가 벽면 근처에서 서로 상이함을 볼 수 있다. 이 그림에서 Laufer의 실험자료는 Townsend⁽¹⁹⁾가 나중에 수정한 값을 미리 인식해야 한다. 즉, 실험자료는 ϵ^+ 가 벽면보다 $y^+ \approx 8$ 부근에서 최고치를 갖고 그 이후 서서히 감소하는데 반해, DNS 자료는 벽면에서 최고치를 가진 다음 유동 중심부로 갈수록 감소하는 경향을 보여준다. DNS 자료에 의한 분포가 실험치의 최고값을 갖는 부분에서 다소 평편한 분포를 갖는 것이 특이하다. DNS 자료와 실험값에서의 이러한 차이는 결국 새로운 ϵ 방정식의 모형이 요구되어진다는 것을 의미하는데, 이것은 실험자료들을 근간으로 하는 과거의 모형들이 MK 모형과 같이 실험값과 유사한 형상을 예측하여 왔기 때문이다.

본 연구에서는 ϵ 방정식의 모든 생성항들과 소

멸항을 이론적인 측면에서 각각 모형화하여 DNS 자료에 잘 일치하는 결과를 얻었다는 데 그 의의가 있다. 즉, 경험적인 함수의 도움 없이 이론적인 배경에 의해 좋은 결과를 얻었다는 것은 복잡한 유동장에 작용되었을 때의 일반성이 경험적인 함수에 의한 것보다 더 클 것이라는 것을 암시한다. 또한, 본 ϵ 방정식 모형은 구배생성항을 제외하고는 와점성계수 ν_t 의 사용을 제한하였기에 2차 모멘트 모형에 적용하기가 용이하다. 반면에 NS 모형은 ϵ 방정식의 모형화에 절대적인 영향을 미치는 소멸항을 식 (78)에서 보는 바와 같이 와점성계수를 이용하여 수정하였기에 고차의 난류 모형에 적용하기 위해서는 상당한 수정이 요구된다.

Fig. 16은 레이놀즈응력 $-\overline{u\nu^+}$ 에 대한 결과인데, 본 $k-\epsilon$ 모형과 NS 모형의 결과가 매우 유사하며 DNS 자료에 잘 일치하고 있다. SZS 모형은 벽면 부근에서 다소 크게 예측된 결과를 보여주고 있으나 MK 모형은 비교적 DNS 자료에 접근하고 있다.

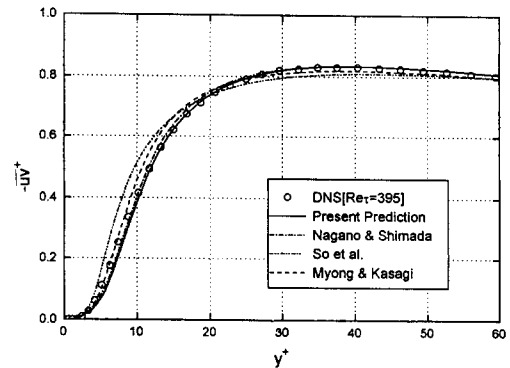


Fig. 16 Comparison of the distribution of $-\overline{u\nu^+}$ for $Re_\tau=395$

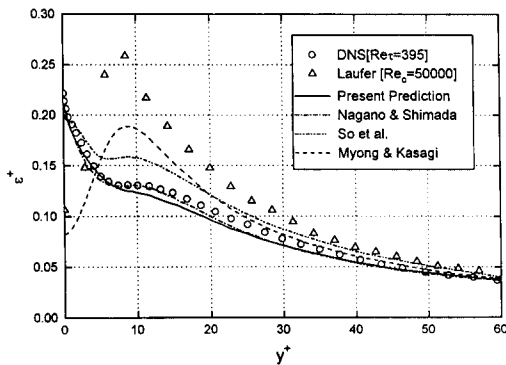


Fig. 15 Comparison of the distribution of ϵ^+ for $Re_\tau=395$

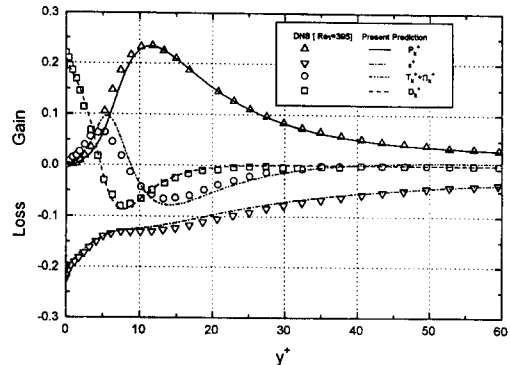


Fig. 17 Comparison of near wall budgets of k^+ for $Re_\tau=395$

Fig. 17은 난류운동에너지 k 방정식을 구성하고 있는 배분항(budget)들을 무차원화하여 나타낸 것이다. 난류운동에너지의 생성물 P_k^* 는 $y^+ \leq 10$ 에서 DNS 보다 다소 작게 분포하여 있으며, 점성확산항의 합 $T_k^* + \Pi_k^*$ 는, $y^+ \leq 10$ 에서는 DNS 자료보다 크게 $10 \leq y^+ \leq 35$ 에서는 작게 분포되고 있으나 전반적인 배분항들의 분포는 DNS 자료와 아주 잘 일치하고 있다. $T_k^* + \Pi_k^*$ 는 그 크기는 작지만 벽면 인접부에서 난류운동에너지와 그 소멸률의 정확한 예측에 상당한 영향을 미치는 것으로 알려져 있다. 따라서 본 연구에서 새로이 제안한 T_k^* 모형과 벽면극한조건을 만족시키는 Π_k^* 모형을 도입한 것은 벽면부근에서 난류운동에너지의 정확한 예측에 상당한 도움을 주고 있다고 생각할 수 있다. 본 연구에서 새로이 제안한 모형들에 의해 예측된 배분항들이 전반적으로 좋은 결과를 나타내었다는 것은 본 $k-\epsilon$ 모형의 정확성이 벽면인접부에서 우수하다는 것을 입증해 주고 있으며, ϵ 방정식에 대한 다

중 생성물 모형의 개발이 충분히 타당성이 있다는 것을 말해 준다.

Fig. 18은 전유동장에 대한 평균 속도분포를 보여준다. 다른 난류 특성치들에 대한 결과와 마찬가지로 본 $k-\epsilon$ 모형과 NS 모형이 DNS 자료와 잘 일치하는 것을 볼 수 있으며, 특히 $10 \leq y^+ \leq 100$ 에서 두 모형이 MK 와 SZS 모형보다 우수하다는 것을 판단할 수 있다. $k-\epsilon$ 모형에서 평균속도에 가장 큰 영향을 주는 것은 와점성계수의 수정함수 f_μ 모형이다. 본 연구에서는 Fig. 13에서 보여준 것처럼 DNS 자료에 의한 값과 거의 유사한 f_μ 함수를 도입하였기에 평균 속도분포 예측에서 우수한 결과를 나타내었다고 할 수 있다. Fig. 13에 의하면 NS 모형이 본 연구에서 도입한 모형보다 DNS 자료에 잘 일치하나 본 모형은 벽면극한조건을 만족시키는 보다 타당성이 있는 모형임을 이미 설명한 바 있다.

Figs. 19~23은 레이놀즈수를 $Re_\tau = 180$ 으로 변화

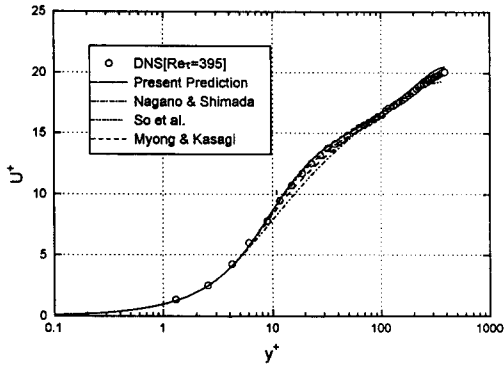


Fig. 18 Comparison of the distribution of U^+ for $Re_\tau = 395$

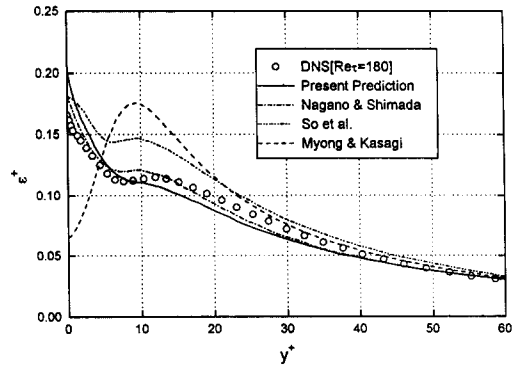


Fig. 20 Comparison of the distribution of ϵ^+ for $Re_\tau = 180$

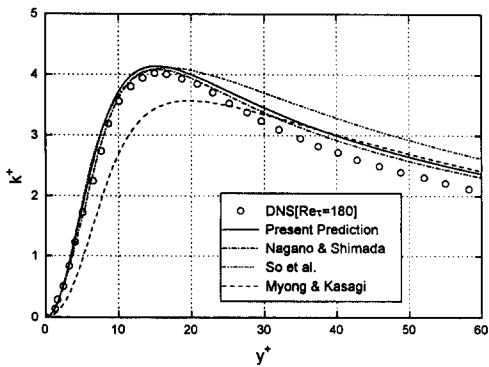


Fig. 19 Comparison of the distribution of k^+ for $Re_\tau = 180$

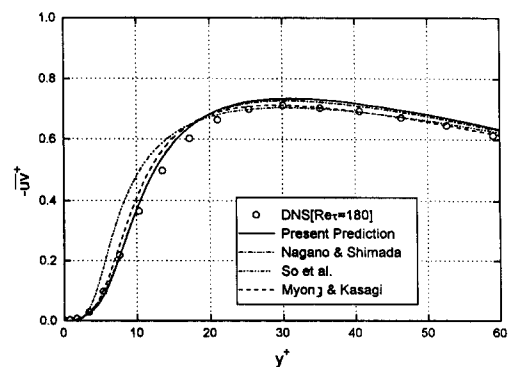


Fig. 21 Comparison of the distribution of $-\overline{uv}^+$ for $Re_\tau = 180$

시켜 해석한 경우의 난류 특성치들에 대한 비교이다. 해석결과들은 본 $k-\epsilon$ 모형이 레이놀즈수의 변화에도 그 추종성이 떨어지지 않는 것을 볼 수 있다. 따라서, 본 $k-\epsilon$ 모형을 비교적 단순한 형상을 갖는 실제 유동장에 적용하면 레이놀즈수의 변화에 따른 난류 특성치들의 크기를 비교적 타당하게 예측해 줄 것으로 기대된다. 만약, 예측 결과들에 대한 정확성의 차이가 생긴다면 본 $k-\epsilon$ 모형의 경우 벽면 극한조건을 모두 만족시켰으므로, $k-\epsilon$ 모형 자체에 도입된 난류 이론이 단순하기 때문에 발생하는 것으로 생각할 수 있다. NS 모형이 본 모형보다 레이놀즈수의 변화에 대해 전반적으로 민감하게 반응하고 있지만 전체적인 예측 결과는 두 모형이 거의 유사하다. NS 모형은 앞에서도 이야기했지만 와점성계수의 수정함수 f_μ 와 ϵ 방정식의 소멸항을 벽면인접부 유동에 타당하게 적용하기 위해서 상당히 복잡한 경험함수를 도입하였고, 이에 반해 본 $k-\epsilon$ 모형은 ϵ 방정식의 각 항들과 와점성계수

의 수정함수 f_μ 를 난류 이론에 근거하여 모형화하였기에 일반적인 유동장에서 보다 타당성이 있을 것으로 예측되며, 고차의 난류 모형에서도 ϵ 방정식을 구성하는 배분항들의 일부항을 제외하고 각 항들에 대해서는 변화 없이 그대로 적용가능하다.

5. 결 론

본 연구에서는 DNS 자료의 도움으로 저 레이놀즈수 ϵ 방정식의 다중 생성물 모형 개발에 대한 기초적, 이론적 연구를 수행하였다. 완전발달된 평판 유동에 대한 계산과 고찰을 통해서 다음의 결론을 얻었다.

- (1) ϵ 방정식의 다중 생성물 모형은 복잡한 경험 수정식을 사용하지 없이 벽면저층 난류거동의 예측을 개선시킬 수 있었다.
- (2) ϵ 방정식의 각 원천항과 f_μ 함수에 대한 벽면극한조건을 만족은 벽면 저층의 난류거동을 정확히 예측하는데 중요한 요인이 된다.
- (3) 본 $k-\epsilon$ 모형은 레이놀즈수의 변화에도 그 일반성을 잃지 않고 난류 특성치들을 타당성 있게 예측해 주고 있다.
- (4) 본 ϵ 방정식 모형에서 사용된 등가 모형상수 C_{k1} 와 C_{k2} 는 기존의 표준 $k-\epsilon$ 모형에서 사용하던 모형상수들과 상당한 차이가 있다. 본 $k-\epsilon$ 모형을 검증한 평판유동에서는 새로운 등가 모형상수들에 의한 해석결과가 DNS 자료와 유사하였지만 이에 대한 타당성을 얻기 위해서는 보다 다양한 유동장에서의 검증이 요구된다.
- (5) 본 ϵ 방정식의 다중 생성물 모형은 저 레이놀즈수 $k-\epsilon$ 모형뿐만 아니라 구배생성항과 난류확산항만 수정하면 2차 모멘트 모형에서도 그대로 적용될 수 있는 일반성을 갖고 있다.

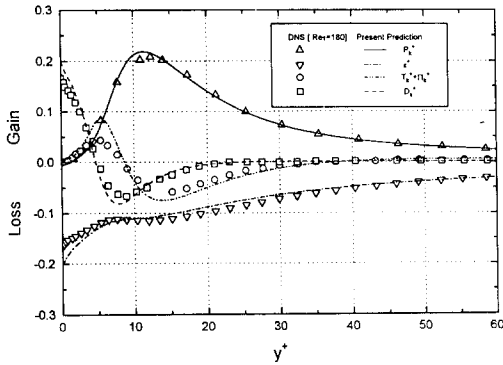


Fig. 22 Comparison of near wall budgets of k for $Re_\tau = 180$

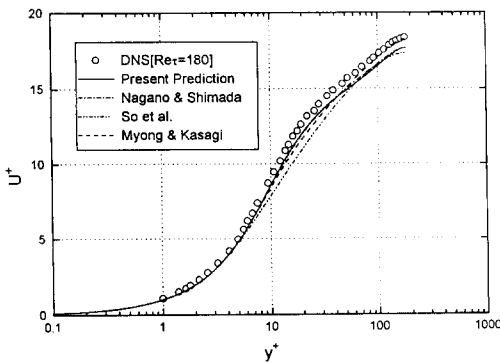


Fig. 23 Comparison of the distribution of U^+ for $Re_\tau = 180$

후 기

이 연구는 1994년 연암문화재단의 해외 교수과제 계획과 G7 차세대 자동차 기술 개발 사업의 연구비 지원으로 이루어진 것이며 이에 대해 감사드립니다.

참고문헌

- (1) Choi, Y. D., Iacovides, H. and Launder, B. E.,

- 1989, "Numerical Computation of Turbulent Flow in a Square-Sectioned 180 Deg Bend," *Trans. ASME I: J. Fluids Engng*, Vol. 111, pp. 59~68.
- (2) Jones, W. P. and Launder, B. E., 1972, "The Prediction of Laminarization with a Two-Equation Model of Turbulence," *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. 15, pp. 301~314.
- (3) Patel, V. C., Rodi, W. and Scheuerer, G., 1985, "Turbulence Models for Near-Wall and Low-Reynolds-Number Flows: A Review," *AIAA J.*, Vol. 23, pp. 1308~1319.
- (4) Myong, H. K. and Kasagi, N., 1990, "A New Approach to the Improvement $k-\epsilon$ of Turbulence Model for Wall-Bounded Shear Flows," *JSME Int. J.*, Vol. 33, pp. 63~72.
- (5) So, R. M. C., Zhang, H. S. and Speziale, C. G., 1991, "Near-Wall Modeling of the Dissipation Rate Equation," *AIAA J.*, Vol. 29, pp. 2069~2076.
- (6) Rodi, W. and Mansour, N. N., 1993, "Low Reynolds Number $k-\epsilon$ Modeling with the Aid of Direct Simulation Data," *J. Fluid Mech.*, Vol. 250, pp. 509~529.
- (7) Mansour, N. N., Kim, J. and Moin, P., 1988, "Reynolds-Stress and Dissipation-Rate Budgets in a Turbulent Channel Flow," *J. Fluid Mech.*, Vol. 194, pp. 15~44.
- (8) Mansour, N. N., Kim, J. and Moin, P., 1989, "Near-wall $k-\epsilon$ Turbulence Modeling," *AIAA J.*, Vol. 27, pp. 1068~1073.
- (9) Hanjalic, K. and Launder, B. E., 1972, "A Reynolds Stress Model of Turbulence and its Application to Thin Shear Flows," *J. Fluid Mech.*, Vol. 52, pp. 609~638.
- (10) Hanjalic, K. and Launder, B. E., 1976, "Contribution Towards a Reynolds-Stress Closure for Low-Reynolds-Number Turbulence," *J. Fluid Mech.*, Vol. 74, pp. 593~610.
- (11) Nagano, Y. and Shimada, M., 1993, "Modeling the Dissipation-Rate Equation for Wall Shear Flows(Comparision with Direct Simulation Data)," *Trans. JSME* (In Japanese), Vol. 59, pp. 742~749.
- (12) Nagano, Y. Youssef, M. S. and Shimada, M., 1993, "Assessment of ϵ -Equation for Wall Shear Flows with DNS Database(1st Report, the Case of $k-\epsilon$ Two-Equation Modeling)," *Trans. JSME*(In Japanese), Vol. 59, pp. 1972~1979.
- (13) Lai, Y. G. and So, R. M. C., 1990, "On Near-Wall Turbulent Flow Modeling," *J. Fluid Mech.*, Vol. 221, pp. 641~673.
- (14) Shima, N., 1988, "A Reynolds-Stress Model for Near-Wall and Low-Reynolds-Number Regions," *Trans. ASME I: J. Fluids Engng*, Vol. 110, pp. 38~44.
- (15) Speziale, C. G., Abid, R. and Anderson, E. C., 1990, "A Critical Evaluation of Two-Equation Models for Near Wall Turbulence," *ICASE Report*, No. 90~46.
- (16) Nagano, Y. and Tagawa, M., 1990, "An Improved $k-\epsilon$ Model for Boundary Layer Flows," *Trans. ASME I: J. Fluids Engng*, Vol. 112, pp. 33~39.
- (17) Kim, J., Moin, P. and Moser, R., 1987, "Turbulence Statistics in Fully Developed Channel Flow at Low-Reynolds-number," *J. Fluids Mech.*, Vol. 177, pp. 133~166.
- (18) Laufer, J., 1954, "The Structure of Turbulence in Fully Developed Pipe Flow," *NACA Rep.*, 1174.
- (19) Townsend, A. A., 1976, *The Structure of Turbulent Shear Flow*, Cambridge University Press.
- (20) Rodi, W., 1971, "On the Equation Governing the Rate of Turbulent Energy Dissipation," *Rep. TM/TN/A/14*, Imperial College of Science and Technology, Department of Mechanical Engineering, London.
- (21) Launder, B. E. and Reynolds, W. C., 1983, "Asymptotic Near-Wall Stress Dissipation Rates in Turbulent Flow," *Phys. Fluids*, Vol. 26, pp. 1157~1158.
- (22) Launder, B. E. and Tselepidakis, D. P., 1991, "Progress and Paradoxes in Modelling Near-wall Turbulence," *Proc. 8th Turbulent Shear Flow Symposium*, Munich, 2, 19, 1. 1.
- (23) Launder, B. E. and Sharma, B. I., 1974,

- “Application of the Energy-Dissipation Model of Turbulence to the Calculation of Flow Near a Spinning Disk,” *Lett. Heat Mass Transfer*, Vol. 1, pp. 131~138.
- (24) Blackwell, B. F., Kays, W. M. and Moffat, R. J., 1972, “The Turbulent Boundary Layer on a Porous Plate; An Experimental Study of the Heat Transfer Behaviour with Adverse Pressure Gradients,” *Rep. HMT-16*, Mech. Eng. Dept., Stanford University, Stanford, CA.
- (25) Kim, J. and Moin, P., 1989, “Transport of Passive Scalars in a Turbulent Channel Flow,” *Turbulent Shear Flows*, VI, Springer-Verlag, Berlin, pp. 85~96.
- (26) Kasagi, N., Tomita, Y. and Kuroda, A., 1992, “Direct Numerical Simulation of Passive Scalar Field in a Turbulent Channel Flow,” *Trans. ASME I: J. Fluids Engng*, Vol. 114, pp. 598~606.
- (27) Daly, B. J. and Harlow, F. H., 1970, “Transport Equation in Turbulence,” *Phys. Fluids*, Vol. 13, pp. 2634~2649.
- (28) 김명호, 신종근, 최영돈, 1992, “저 레이놀즈 수 $k-\epsilon$ 난류 모형 개발에 관한 연구,” 대한기계학회논문집, 제16권 제10호, pp. 1940~1954.