

< 논 문 >

수평 원주형 환형내에서의 정상상태의 공기의 자연대류에 대한 이중해

유 주 식*

(1996년 2월 29일 접수)

Dual Solutions for Steady Natural Convection of air in a Horizontal Cylindrical Annulus

Joo-Sik Yoo

Key Words: Natural Convection(자연대류), Thermal Instability(열 불안정성), Cellular Convection(셀대류), Critical Rayleigh Number(임계 Rayleigh수), Dual Solutions(이중해)

Abstract

Dual solutions for steady natural convection of air between two horizontal concentric cylinders are numerically investigated in the range of D_i/L (= diameter of inner cylinder/gap width) ≤ 10 . It is found that, when the Rayleigh number based on the gap width exceeds a certain critical value, a new flow pattern forming two counter-rotating eddies in the half of the annulus can be realized, which is different from the crescent-shaped flow commonly observed. In the new flow pattern, the fluid near the top of the hot inner cylinder moves downward. This solution is found for $D_i/L \geq 0.3$, but not for $D_i/L \leq 0.2$. As D_i/L increases, the critical Rayleigh number is decreased, and tends to a finite limit.

기 호 설 명			
D_i	: 안쪽 실린더의 지름	Pr	: Prandtl수, ν/α
\vec{e}_r, \vec{e}_ϕ	: 반경방향과 원주방향의 단위벡터	p	: 압력
g	: 중력가속도	R_i, R_o	: 안쪽 실린더와 바깥쪽 실린더의 반경
J	: Jacobian	Ra	: Rayleigh수, $ag(T_i - T_o)L^3/\nu\alpha$
L	: 환형의 폭, $R_o - R_i$	r	: 반경방향의 좌표
Nu	: Nusselt수, $(\overline{Nu}_i + \overline{Nu}_o)/2$	r_i, r_o	: 무차원화된 안쪽 실린더와 바깥쪽 실린더의 반경, $r_i = R_i/L (= \sigma/2)$, $r_o = R_o/L (= 1 + \sigma/2)$
Nu_{cond}	: 전도상태의 Nusselt수	t	: 시간
Nu_i, Nu_o	: 안쪽 실린더와 바깥쪽 실린더에서의 국소 Nusselt수	Δt	: 수치계산에서의 타임 스텝
$\overline{Nu}_i, \overline{Nu}_o$: 안쪽 실린더와 바깥쪽 실린더에서의 평균 Nusselt수	T_i, T_o	: 안쪽 실린더와 바깥쪽 실린더의 온도
		\vec{u}	: 속도벡터
		u	: 반경방향의 속도성분
		v	: 원주방향의 속도성분

*회원, 안동대학교 기계공학부

그리스문자

α	: 열팽창계수
η	: 확장된 반경 방향의 좌표
θ	: 무차원화된 온도
x	: 열확산계수
ν	: 동점성계수
ρ_0	: 밀도
σ	: 안쪽 실린더의 지름과 환형 폭의 비, D_i/L
ϕ	: 원주방향의 좌표
Ψ	: 흐름함수
ω	: 와도

기타 기호

∇	: Divergence, $\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial}{r\partial\phi}$
∇^2	: Laplacian, $\frac{\partial}{r\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{\partial^2}{r^2\partial\phi^2}$

1. 서 론

일정한 온도를 유지하고 있는 두 개의 수평 동심 실린더내에서의 자연 대류현상은, 흥미로운 유동의 형태와 넓은 응용 분야로 인해 많은 관심을 받아 왔다. 초기에 있어서의 연구들은 주로 정상 상태(steady state)의 문제에 대해 수행되었는데 근래에는 비정상 상태의 문제에 대한 연구들이 수행되고 있다.⁽¹⁻⁸⁾ 이 시스템에 있어서의 유동 형태에 대한 일반적인 특성은 Powe 등⁽⁶⁾에 의해 규명된 바가 있다. 그들은 Prandtl 수가 1에 가까운 유체의 유동 형태를 Grashof 수(혹은 Rayleigh 수)와 두 실린더 사이의 상대적인 간격(σ =안쪽 실린더의 지름/실린더 사이의 간격)을 변수로 하여 네 가지의 기본적인 유동 형태들로 분류하였는데 그 특성들은 다음과 같다: 충분히 작은 Rayleigh 수에서는 σ 에 상관 없이 두 개의 초승달 모양의 정상 상태의 2차원 유동을 보인다. 그리고 Rayleigh 수가 증가하여 어떤 임계치(critical value)를 넘어서면 σ 에 따라 다음과 같은 유동의 양상을 보인다:

- (1) $\sigma < 2.8$ (넓은 간격의 환형(annulus))일 때에는 2차원적인 진동하는 대류(oscillatory convection),
- (2) $2.8 < \sigma < 8.5$ (중간크기의 간격)일 때에는 3차원적인 와선유동(spiral flow),
- (3) $\sigma > 8.5$ (좁은 간격)일 때에는 2차원적인 다중 셀의 유동

(multicellular flow). Rao 등⁽⁴⁾도 수치적인 방법과 실험을 통하여 유동 형태에 대한 도표를 작성하였는데 $\sigma > 2.8$ 인 경우에는 Powe 등⁽⁶⁾의 결과와 잘 일치하였다. 그러나 $\sigma < 2.8$ 인 경우에 대해서는 2차원적인 단일 셀 유동(unicellular flow)만을 관측하였고 진동하는 대류는 수치적으로 구현하지 못하였다.

액체 금속과 같은 낮은 Prandtl 수의 유체는 조금 더 복잡한 유동의 형태를 보이는데 이에 대한 연구는 최근 Fant 등⁽⁷⁾과 Yoo 등⁽⁸⁾에 의해 새롭게 수행되었다. 그들은 Prandtl수가 0 혹은 0.02인 경우에 대해 주기적으로 혹은 비주기적으로 진동하는 다중 셀의 유동(oscillatory multicellular flow)을 보였다. Fant 등⁽⁷⁾은 $Pr=0$, $\sigma \rightarrow \infty$ 인 극한적인 경우에 대해 매우 큰 Rayleigh 수와 아주 작은 폭의 환형(annulus)이란 가정 하에서 점근적인 이론(asymptotic theory)을 적용하여 Navier-Stokes 방정식을 단순화시켜 연구하였다. 그러나 Yoo 등⁽⁸⁾은 Fant 등⁽⁷⁾과는 달리 지배방정식을 근사시키지 않고 넓은 범위의 환형 폭(gap width of annulus)에 대해서 진동하는 유동현상을 규명하였다. Fant 등⁽⁷⁾은 $\sigma \rightarrow \infty$ 인 경우만을 고려하였는데, 진동하는 유동은 단순히 소용돌이(eddy)의 합체와 분리로써 이루어진다고 하였다. 그러나 Yoo 등⁽⁸⁾은 $\sigma = 10$ (small gap)인 경우의 진동하는 다중 셀 대류(oscillatory multicellular convection)에 있어서는 같은 방향으로 회전하는 셀(cell)들이 아래로 흘러 내려가고 있음을 보였다.

본 연구에서는 Prandtl수가 0.7인 공기에 대해서 서로 다른 두 가지의 해가 존재한다는 것을 보이고자 한다. 유체역학 문제에 있어서는 다중 해(multiple solutions)를 갖는 시스템이 여러 가지가 있다: von Kármán swirling flows,⁽⁹⁾ 굽은 관에서의 강제대류(dean problem),^(10,11) 회전하는 실린더들 사이에서의 유동(Taylor problem),^(12,13) 수평덕트(duct)에서의 혼합대류⁽¹⁴⁾ 등. 그리고 자연 대류 문제에 있어서는 Yoo and Kim⁽¹⁵⁾에 의해서 공간적으로 주기적인 온도분포를 갖는 두 개의 수평 평판 사이에서의 자연 대류에 있어서도 다중 해가 존재한다는 것을 보인 바가 있다. 비록 수평 동심 실린더내의 자연대류현상에 대해 지금까지 많은 연구가 수행되었지만 이 시스템에 있어서의 해의 다중성에 대한 연구는 아직 어디에서도 수행되지 않았었다. 본 연구에서 조사한 두 가지의 해는 다음

과 같다. Rayleigh수가 작을 때에는 σ 의 전 범위에 걸쳐 초승달 모양의 유동 형태가 나타난다. 그러나 Rayleigh수가 증가하여 어떤 임계치(critical value)를 넘어서면 초기조건에 따라 서로 다른 두 가지의 유동형태가 실현된다: 하나는 $\phi=0$ (Fig. 1)

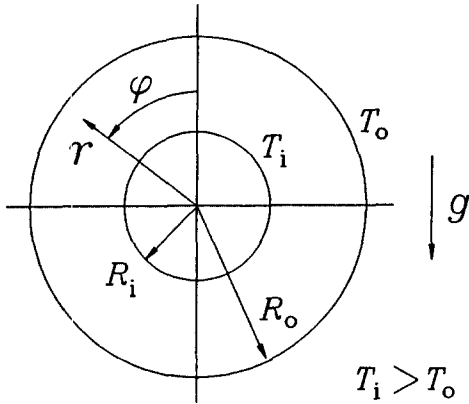


Fig. 1 Problem configuration

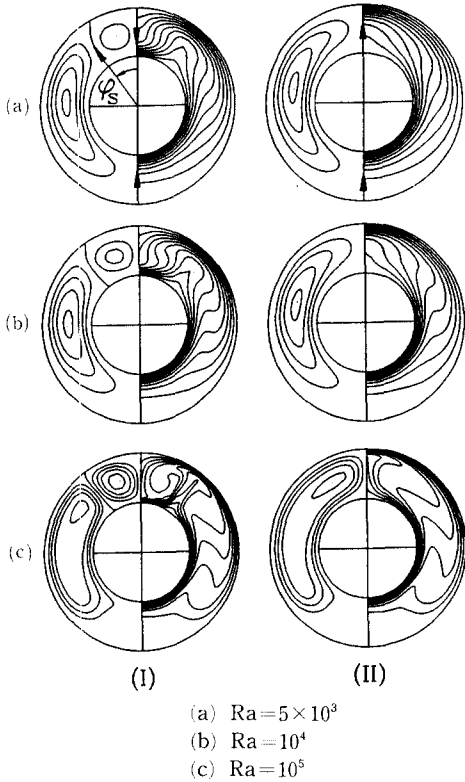


Fig. 2 Streamlines and isotherms when $\sigma=2$. The lefts (I) are downward flows and the rights (II) are upward flows

부근의 유체가 위로 올라가는 유동으로써 일반적으로 관찰되는 초승달 모양의 유동 형태이며(Fig. 2-II), 또 하나는 이와 반대로 $\phi=0$ 부근의 유체가 아래로 내려가는 유동으로써 서로 반대 방향으로 회전하는 두 개의 소용돌이(eddy)로 구성되는 유동형태이다(Fig. 2-I). 앞으로 전자를 '올라가는 유동', 후자를 '내려가는 유동'으로 부르기로 하겠다.

2. 해 석

고려하는 시스템의 구조와 좌표계는 Fig. 1과 같다. 유체는 일정한 표면온도를 유지하고 있는 두 개의 무한히 긴 수평 실린더 사이에 있다. 안쪽 실린더의 온도는 T_i 이고 바깥쪽 실린더의 온도는 T_o 이며 $T_i > T_o$ 이다. 부력 항을 제외하고는 유체에서의 밀도변화는 무시한다. 그리고 그 외의 다른 물성치들은 모두 일정하다고 가정한다(boussinesq approximation). 에너지 방정식에서 점성소산(viscous dissipation)도 역시 무시한다. 문제를 해석하기 위하여 실린더 좌표계 (r, ϕ) 를 사용한다. 여기에서 ϕ 는 Fig. 1과 같이 실린더의 꼭대기에서 반시계 방향으로 측정되어지는 각도이다. 그리고 방정식을 무차원화시키기 위한 특성 길이는 두 실린더 사이의 간격 $L=R_o-R_i$ 로 택한다. 왜냐하면 본 문제는 안쪽 실린더의 윗부분에 있는 유체층의 열적인 불안정성(thermal instability)과 밀접하게 관련되어 있기 때문이다. 질량, 운동량과 에너지에 대한 보존 방정식을 특성길이, 시간, 속도, 압력과 온도를 각각 $L, L^2/\alpha, \alpha/L, \rho_0 \alpha^2/L^2, (T_i-T_o)$ 로 택하여 무차원화시킨다. 그리고 $Pr=\nu/\alpha, Ra=ag(T_i-T_o)L^3/\alpha\nu$ 를 각각 Prandtl 수와 Rayleigh 수로 놓는다.

무차원화된 지배방정식은 다음과 같다.

$$\nabla \cdot \vec{u} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} = -\nabla p + Pr \nabla^2 \vec{u} + Pr Ra \theta [\cos(\phi) \vec{e}_r - \sin(\phi) \vec{e}_\phi] \quad (2)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) \theta = \nabla^2 \theta \quad (3)$$

본 연구에서의 관심사는 2차원 정상상태에서의 대류현상이므로 2차원 문제만 고려한다. 따라서 흐름함수(streamfunction) Ψ 와 와도(vorticity)를 또

입한 지배방정식을 사용한다. Ψ 와 ω 로 나타내어 지는 지배방정식은 다음과 같다.

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = J(\Psi, \omega) + Pr \nabla^2 \omega - Pr Ra \left\{ \sin(\phi) \frac{\partial \theta}{\partial r} + \cos(\phi) \frac{\partial \theta}{r \partial \phi} \right\} \quad (4)$$

$$\omega = -\nabla^2 \Psi \quad (5)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = J(\Psi, \theta) + \nabla^2 \theta \quad (6)$$

여기에서 와도 ω , 흐름함수 Ψ , Jacobian $J(f, g)$, Laplacian ∇^2 은 다음과 같이 정의된다.

$$\begin{aligned} \omega &= \frac{\partial}{r \partial r} (rv) - \frac{\partial}{r \partial \phi} (u) \\ u &= \frac{\partial \Psi}{r \partial \phi}, \quad v = -\frac{\partial \Psi}{\partial r} \\ J(f, g) &= \frac{1}{r} \left(\frac{\partial f}{\partial r} \frac{\partial g}{\partial \phi} - \frac{\partial f}{\partial \phi} \frac{\partial g}{\partial r} \right) \\ \nabla^2 &= \frac{\partial}{r \partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2}{r^2 \partial \phi^2} \end{aligned} \quad (7)$$

그리고 두 벽면에서의 경계조건은 다음과 같다.

$$\Psi = \frac{\partial \Psi}{\partial r} = 0, \quad \omega = -\frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2}, \quad \theta = 1 \text{ at } r = r_i \quad (8)$$

$$\Psi = \frac{\partial \Psi}{\partial r} = 0, \quad \omega = -\frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2}, \quad \theta = 0 \text{ at } r = r_o \quad (9)$$

각도방향으로는 다음과 같은 대칭조건을 적용한다.

$$\Psi = \omega = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \phi^2} = \frac{\partial \theta}{\partial \phi} = 0 \text{ at } \phi = 0, \pi \quad (10)$$

유체유동이 없는 경우의 순수한 전도(conduction)에 의한 열전달률은 다음과 같이 된다.

$$Nu_{cond} = \frac{1}{\ln(r_o/r_i)} \quad (11)$$

그리고 국부 Nusselt수(local Nusselt number)를 다음과 같이 실제적인 열플럭스(heat flux)를 Nu_{cond} 로 나눈 값으로 정의한다.

$$Nu_i(\phi) = -\left(r \frac{\partial \theta}{\partial r} \right) / Nu_{cond} \text{ at } r = r_i \quad (12)$$

$$Nu_o(\phi) = -\left(r \frac{\partial \theta}{\partial r} \right) / Nu_{cond} \text{ at } r = r_o \quad (13)$$

평균 Nusselt 수 \overline{Nu}_i , \overline{Nu}_o 는 다음과 같이 주어진다.

$$\overline{Nu}_i = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi Nu_i(\phi) d\phi \quad (14)$$

$$\overline{Nu}_o = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi Nu_o(\phi) d\phi \quad (15)$$

정상상태에서 \overline{Nu}_i 와 \overline{Nu}_o 는 같은 값을 가지게 된다.

식 (4)~(10)의 방정식을 풀기 위하여 유한차분법을 이용한다. 식 (4)와 (6)을 차분화시키는 데 있어서는 시간 미분항과 확산(diffusion) 항에 대해 Dufort-Frankel의 leap-frog방법(Roache⁽¹⁷⁾)을 적용하고 Jacobian 항에 대해서는 중앙 미분(central differencing)을 사용한다. 그리고 유선함수에 대한 Poisson 방정식은 다섯 점 공식을 이용하여 유한한 방정식 계로 바꾼다. 차분화된 방정식에서의 계산 영역은 사각형 모양이 된다. 그리고 이 차분화된 Poisson방정식은 Buzbee 등⁽¹⁸⁾의 순환적인 짝홀 제거방법(cyclic even-odd reduction method)을 사용하여 반복계산(iteration)을 하지 않고 바로 푼다: Direct solver. 이 알고리즘(algorithm)은 매우 빠르고 정확하다. 각도방향(azimuthal direction)으로는 균일격자(uniform grid)를 이용하고 반경방향으로는 두 벽면에서의 얇은 경계층을 분해하기 위해 다음과 같은 좌표확장(coordinate stretching)을 이용한다.

$$r = r_i + \frac{1}{2} \left[1 + \frac{\tanh\{C(2\eta-1)\}}{\tanh(C)} \right]$$

$$\text{with } C = 1.5, \quad 0 \leq \eta \leq 1 \quad (16)$$

본 연구에서 사용한 초기조건과 수치적인 교란(numerical disturbance)은 다음과 같다. $t=0$ 일 때 모든 영역에서 $\Psi = \omega = 0$ 이고 $\theta = 1$ 이다. 그리고 식 (4)~(6)을 경계조건, 식 (8)~(10)하에서 시간에 따라 적분해 나간다. 외부적인 교란이 없다면 이 문제는 바깥쪽 실린더를 갑자기 식힌 경우의 문제에 해당된다. 그러나 특히 σ 가 작은 경우에 있어서는 '내려가는 유동'은 좀처럼 구해지지 않았었다. 따라서 다음과 같은 인위적인 교란을 부가시킨다: 처음 100번의 적분기간 동안에는 $\phi=0$ 선상의 온도를 주변 유체의 온도보다 낮게 놓는다: $\theta(r, 0, n\Delta t) = 1 - (r - r_i)/(r_o - r_i)$. 그러나 $n > 100$ 에서는 이 교란을 제거하고 수렴된 정상상태의 해가 구해질 때까지 적분해 간다. 고정된 기하학적 변수 σ 에 대해 위의 과정을 통하여 해가 구해지면 이 해를 초기조건으로 하여 다른 Rayleigh수에서의 해를 구한다. 그리고 다른 Rayleigh수에서의 해는 이 Rayleigh수와 가장 가까운 Rayleigh수에서의

이미 구해진 해를 초기조건으로 하여 구한다. 이런 과정은 지산 시간을 단축시킨다.

시간에 따라 적분해 나가는 과정에서 다음과 같이 두 개의 연속되는 타임스텝(time step) 사이의 값들의 상대적인 차이의 최대치가 주어진 값보다 작을 때 해는 정상상태로 수렴했다고 간주한다.

$$\text{Max} \left| \frac{f_{i,j}^{n+1} - f_{i,j}^n}{f_{i,j}^{n+1}} \right| < \epsilon \text{ for } f = \omega, \Psi \text{ and } \theta \quad (17)$$

계산에 있어서는 대개 $\epsilon = 10^{-5}$ 를 수렴조건으로 하였다. 대부분의 경우에 있어서 $\epsilon = 10^{-4}$ 로 하여도 Nusselt수, Ψ_{\max} , Ψ_{\min} 등에 대해 충분히 수렴된 값들을 얻을 수 있었다. 그러나 종종 $\epsilon = 10^{-10}$ 까지 되도록 계산을 계속해 봄으로써 정상 상태의 '내려가는 유동'이 실제로 지배방정식을 만족하는 해 중의 하나인지를 확인하였다. 타임스텝(time step) Δt 는 $10^{-5} < \Delta t < 10^{-2}$ 의 범위에서 택하여 사용하였다. 계산의 초기에는 작은 타임스텝($\Delta t = 10^{-5}$)이 요구되었지만 나중에는 $\Delta t = 10^{-3}$ 으로 바꾸어도 대개의 경우에 있어서는 충분히 수렴된 해를 구할 수 있었다. 그리고 기하학적 변수 σ 에 따라 다음과 같이 다른 격자제(grid system)를 사용하였다: $\sigma < 2$ 일 때에는 (55×65), $\sigma = 2, 3$ 일 때에는 (35×33), $\sigma = 4$ 일 때에는 (21×65), $\sigma = 6, 8, 10$ 일 때에는 (17×129).

3. 결과 및 논의

$Pr = 0.7$ 인 공기에 대해 $Ra = 2 \times 10^5$ 까지 계산하였다. 그리고 $0.1 \leq \sigma \leq 10$ 의 범위에서 환형(annulus)의 형태에 따른 영향을 조사하였다. 제시된 그림의 유선과 등온선에 있어서 별도의 언급이 없는 경우 유선의 간격은 $(0.95 \Psi_{\max}/4)$ 이고 등온선의 간격은 0.1이다. 수치적인 방법에 대해서는 참고 문헌 (8)과 (15)에서 충분히 검토된 바가 있다.

먼저 적당한 형태의 환형(annulus)을 나타내는 $\sigma = 2$ 에 대한 결과를 살펴볼 것이다. 몇 가지 Rayleigh 수에 대한 유선과 등온선을 Fig. 2에 도시하였다. $Ra = 10^4$ 일 때 앞서 기술한 방법에 의해 '내려가는 유동'을 쉽게 구할 수 있었다. 그리고 이 해를 초기조건으로 하여 다른 Rayleigh수에서의 해를 구했다. '내려가는 유동'은 언제나 하나의 큰 소용돌이(eddy) 위에 반대 방향으로 회전하는 작

은 소용돌이를 생성한다(Fig. 2-I). 이 작은 소용돌이(eddy)는 대략 사각형 모양을 하고 있는데 이 소용돌이의 힘의 세기는 $|\Psi_{\min}|$ 의 값으로써 대변될 수 있다. '내려가는 유동'이 나타나기 시작하는 임계치 부근의 작은 Rayleigh수($Ra = 3500$)에서는 작은 소용돌이(eddy)의 세기가 큰 소용돌이의 것보다 훨씬 작다. 그리고 마침내 $Ra \leq 3000$ 에서는 작은 소용돌이(eddy)는 사라지고 Fig. 2-II와 같은 '올라가는 유동'만이 확립된다. 그러나 Rayleigh수가 커질수록 $|\Psi_{\min}|$ 은 증가하며, $Ra = 10^5$ 에서는 $|\Psi_{\min}|$ 이 오히려 Ψ_{\max} 보다 더 크게 된다. 두 가지 종류의 유동장에 있어서의 온도분포를 비교해 보면 열적으로 불안정한 영역을 구성하는 실린더의 윗부분에서는 상당히 다른 온도 분포를 보이고 있다. 그러나 $\phi > \pi/2$ 의 안정한 영역에서는 큰 차이를 나타내지 않는다. 뜨거운 실린더의 꼭대기($\phi = 0$)부근의 유체가 아래로 내려가는 유동형태는 $Pr = 0.02$ 에 대해서 몇 사람^(18~20)에 의해 보인 바 있다. 그러나 이중해의 존재에 대한 것은 전혀 연구되지 않았었다. Prandtl수가 작을 때의 온도 분포는 유체 유동에 의해 크게 영향을 받지 않고 거의 전도상태(conduction state)의 것을 유지한다. 그러나 본 문제에서의 '내려가는 유동' 현상은 유체의 열적인 불안정성에 의해 일어나는 것이므로 온도 분포가 전도상태의 것보다 상당히 다른 모양으로 변화된다.

'내려가는 유동'에 있어서 ϕ_s 를 Fig. 2(a)와 같이 두 소용돌이(eddy) 사이의 분리점(separation point)을 나타내어 주는 각도로 정의하겠다. 두 가지 해에 대한 평균 Nusselt수와 ϕ_s 를 Fig. 3에 도시하였다. 내려가는 유동의 Nusselt수가 언제나 '올라가는 유동'의 것보다 크다. 이것은 '내려가는 유동'에 의해 일어나는 강한 대류 때문이다: '내려가는 유동'($\Psi_{\max} - \Psi_{\min}$)의 값은 $\Psi_{\min} = 0$ 인 '올라가는 유동'의 Ψ_{\max} 보다 언제나 크다. Fig. 3의 Nusselt수에 대한 그림은 Nandakumar 등⁽¹⁴⁾에 의해 혼합 대류(mixed convection)의 연구에서 발견한 이중해와는 다른 성질을 보여주고 있다: Nandakumar 등⁽¹⁴⁾이 발견한 이중해에 있어서는 작은 범위의 Grashof 수에 대해 히스테리시스(hysteresis) 현상을 보였다. 그러나 본 연구에서의 이중해는 언제나 어떤 임계치 이상의 Rayleigh수에서 존재한다. 만약 아래 분지(branch)의 해(올라가는 유동)를 초기 조건으로 사용하면 언제나

이와 같은 분지의 해가 구해진다. 즉 아래 분지(올라가는 유동)로부터 위의 분지(내려가는 유동)로 분기하지 않는다(Fig. 3). 그러나 위의 분지로부터 아래 분지로의 전이가 임계 Rayleigh수에서 일어난다. '내려가는 유동'에 있어서 두 소용돌이(eddy)의 경계를 나타내는 ϕ_s 를 보면, 작은

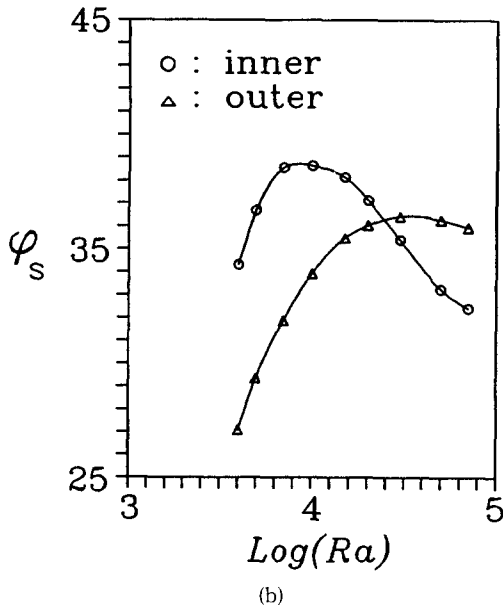
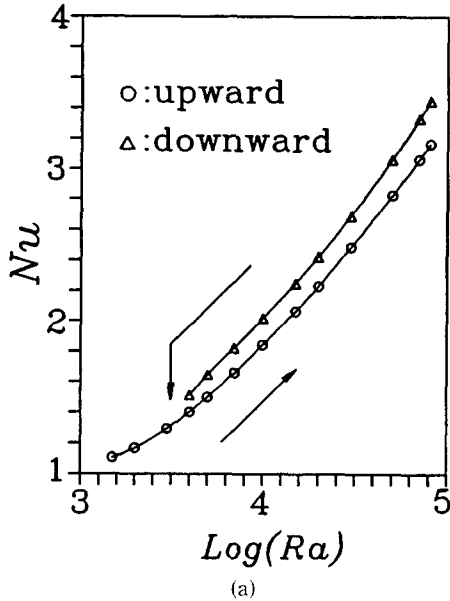


Fig. 3 Nusselt numbers and the angles of separation points at the two walls when $\sigma=2$: (a) Nu (b) ϕ_s (the unit of ϕ_s is degree)

Rayleigh수에 있어서는 바깥 실린더의 ϕ_s 가 안쪽 실린더의 것보다 작다. 그리고 Rayleigh수가 증가하면 두 값들도 같이 증가한다. 즉, 불안정한 영역의 작은 소용돌이(eddy)는 점점 커지게 된다. 그러나 $Ra > 10^4$ 에서는 안쪽 실린더의 ϕ_s 는 감소한다. 왜냐하면 $\phi_s < \phi < \pi$ 범위의 뜨거운 안쪽 실린더 영역이 그 부근의 유체를 위로 움직이게 함으로써 분리점(separation point) ϕ_s 를 위로 밀어주기 때문이다. 즉, Fig. 3(b)는 '내려가는 유동'에 있어서의 두 소용돌이(eddy) 사이에 있는 일종의 경쟁 현상을 보여주고 있다.

Kuehn and Goldstein⁽²⁾은 $\sigma=1.25$ 에 대해 자세히 조사하였다. $\sigma=1.25$ 에 있어서는 $Ra=4000$ 이상에서 두 가지의 해가 존재한다. $Ra \leq 3500$ 에서는 '내려가는 유동'만 발견되었다. 하나의 대표적인 보기로써 $Ra=5 \times 10^4$ 에서의 이중해를 Fig. 4에 나타내었다. '내려가는 유동'인 Fig. 4(b)는 Kuehn and Goldstein⁽²⁾에 있는 것과 같다.

큰 폭의 환형(annulus)을 나타내는 $\sigma=0.5$ 인 경우에는 $Ra \geq 1.5 \times 10^4$ 에서 이중해가 존재한다. $Ra \leq 10^4$ 에서는 초기조건과 수치적인 교란에 상관 없이 '올라가는 유동'만이 발견되었다. $Ra=1.5 \times 10^4$, 10^5 에서의 이중 해의 유동형태를 Fig. 5에 도시하였다. 이 그림에서 보면 안쪽 실린더의 매우 큰 곡률(curvature) 때문에 '내려가는 유동'의 구조가 매우 불안정하게 보임을 알 수 있다. $\sigma=0.3$ 일 때에는 $Ra=10^5$ 에서는 이중해가 발견되었지만 $Ra=5 \times 10^4$ 에서는 발견되지 않았다. 그리고 마침내 $\sigma=0.1$, 0.2 에서는 $Ra=2 \times 10^5$ 에서도 '내려가는 유동'을 발견할 수 없었다. $\sigma=0.3$ 에서의 '내려가는 유동'을 초기치로 사용하여도 잠시 후에 불안정한 영역에서의 소용돌이는 없어지고, Fig. 5에 있는 '올라가는 유동'과 비슷한 형태의 유동이 확립되었

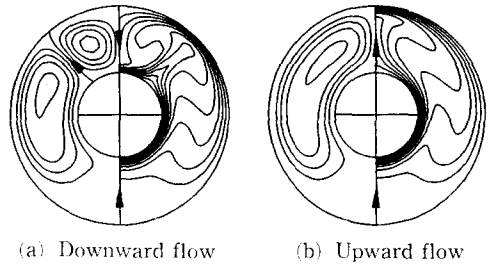


Fig. 4 Streamlines and isotherms when $\sigma=1.25$ and $Ra=5 \times 10^4$

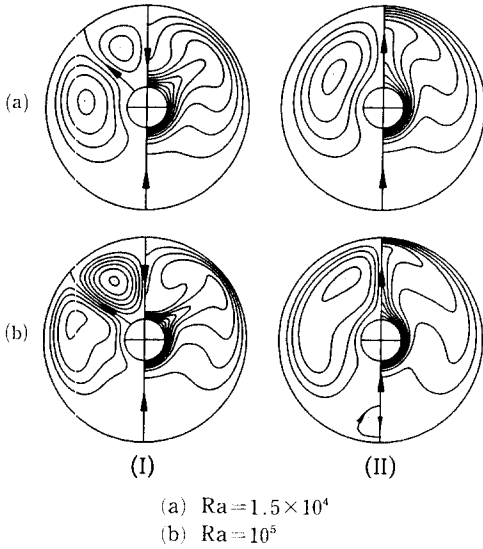


Fig. 5 Streamlines and isotherms when $\sigma = 0.5$. The lefts (I) are downward flows and the rights (II) are upward flows

다. 이상의 결과들을 살펴보면 안쪽 실린더의 큰 곡률은 '내려가는 유동'의 존재를 매우 어렵게 만든다는 것을 알 수 있다.

$\sigma = 0.5$ 일 때, 작은 Rayleigh수에서의 '올라가는 유동'의 형태는 Fig. 5(a)와 비슷하다. 그러나 $Ra = 10^5$ 에서는 Fig. 5(b)와 같이 환형(annulus)의 아래 부분에 하나의 부수적인 작은 소용돌이(eddy)가 형성된다. 이 소용돌이는 약 $Ra = 5 \times 10^4$ 에서 환형의 아래 바닥에 부착된 형태로 나타나기 시작한다. Rayleigh수가 증가함에 따라 이 소용돌이도 계속 커지고 마침내 벽면으로부터 분리되어 Fig. 5(b)와 같은 모양을 하게 된다. $\sigma = 0.2, 0.1$ 에서도 비슷한 경향이 발견되었다.

$\sigma = 0.5$ 에 대한 평균 Nusselt수와 ϕ_s 를 Fig. 6에 도시하였다. 두 가지 유동의 형태는 상당히 다르지만 평균 Nusselt수는 거의 같음을 볼 수 있다. 그리고 바깥쪽 실린더의 ϕ_s 가 안쪽 실린더의 것보다 항상 크다.

중간치인 $\sigma = 4, 6, 8$ 인 경우에도 마찬가지로 이중해가 발견되었다. 대표적인 보기로서 $\sigma = 4, Ra = 3000$ 에서의 유동 형태를 Fig. 7에 도시하였다. σ 가 증가함에 따라 임계 Rayleigh수 부근에서 환형(annulus)의 꼭대기에 있는 작은 소용돌이(eddy)는 거의 정사각형 모양을 하게 된다.

$\sigma = 10$ 일 때에는 $Ra \geq 1900$ 에서 두 가지의 유동이

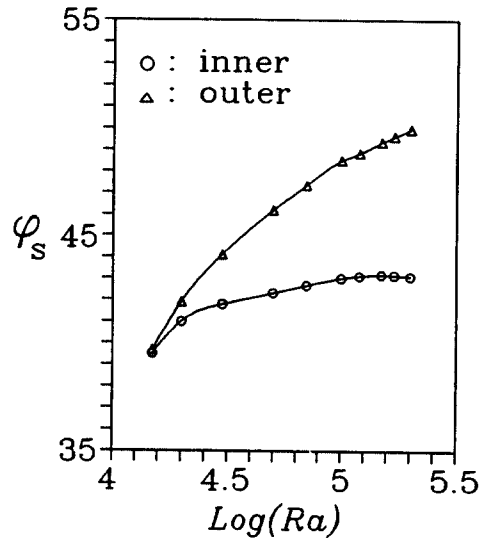
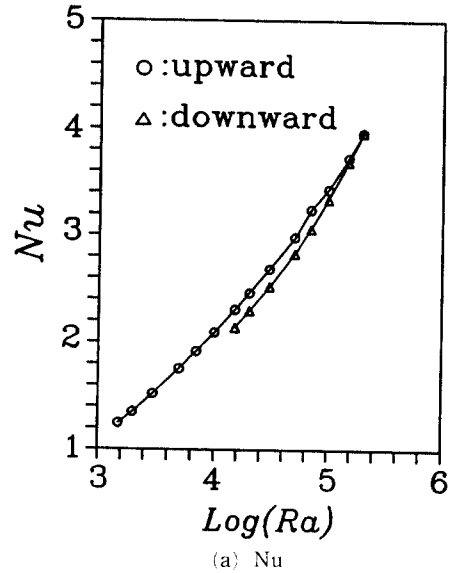


Fig. 6 Nusselt numbers and the angles of separation points at the two walls when $\sigma = 0.5$

존재한다. 그러나 $Ra \leq 1800$ 에서는 초승달 모양(crescent-shaped)의 '올라가는 유동'만이 구해졌다. 그리고 $Ra \geq 3000$ 에서는 여러 개의 셀(cell)을 가지는 '올라가는 유동'이 발견되었다. $Ra = 2000, 3000$ 에서의 '내려가는 유동'과 '올라가는 유동'의 유선과 등온선을 Fig. 8에 도시하였다. 다른 Rayleigh수에서의 유동도 이와 비슷한 모양을 보였다. Fig. 8로부터 일적으로 불안정한 영역을 구

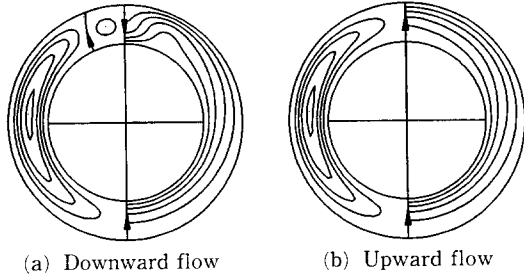


Fig. 7 Streamlines and isotherms ($\Delta\theta=0.2$) when $\sigma=4$ and $Ra=3\times 10^3$

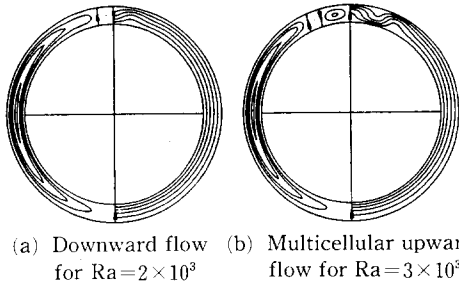
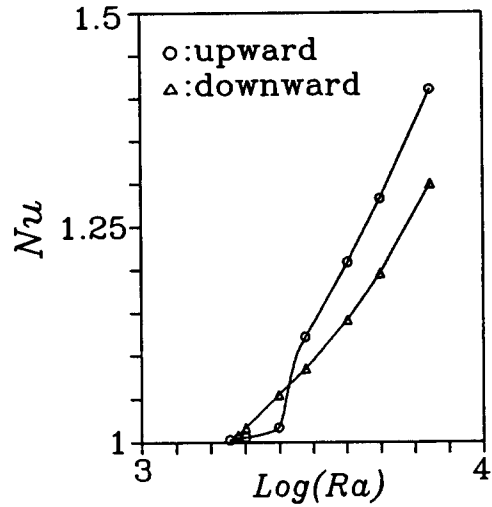


Fig. 8 Streamlines and isotherms ($\Delta\theta=0.2$) of downward flow and upward flow when $\sigma=10$

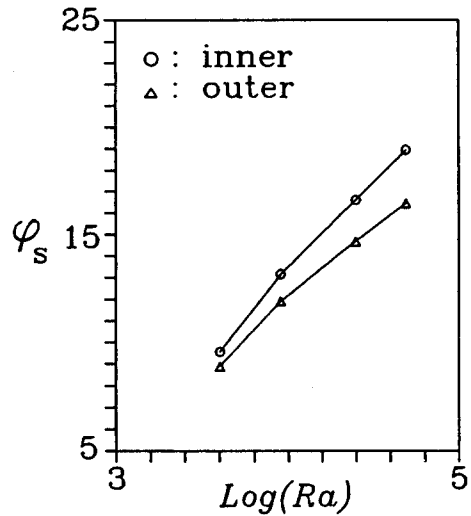
성하는 환형 (annulus)의 윗부분에서는 $\phi=0$ 에서의 유동 방향에 따라 두 가지 형태의 셀대류 (cellular convection)가 일어나는 것을 알 수 있다. $\sigma \rightarrow \infty$ 가 되면 환형 (annulus)의 윗부분은 아래로부터 가열되는 무한 채널 (channel)에 가까워진다. 따라서 Rayleigh Bénard problem (Swinney and Gollub⁽²¹⁾)에서와 같이 이 열적으로 불안정한 영역에서 셀대류 (cellular convection)가 일어나는 것은 자연스러운 일이다.

$\sigma=10$ 에서의 평균 Nusselt수와 ϕ_s 를 Fig. 9에 도시하였다. Rayleigh수가 작을 때에는 '내려가는 유동'의 Nusselt수가 '올라가는 유동'의 것보다 작다. 그러나 Fig. 8(b)와 같이 다중 셀대류 (multicellular convection)가 일어난 후에는 '올라가는 유동'의 Nusselt수가 더 크게 된다.

이상에서 논의한 두 가지의 해가 존재하는 영역을 σ 와 Rayleigh수에 대해 Fig. 10에 도시하였다. σ 가 증가하면 두 가지 해가 존재하기 위한 임계 Rayleigh수는 급격히 감소한다. 그리고 그 임계치는 어떤 일정한 값으로 접근해 가는데 그 값은 $\sigma \rightarrow \infty$ 일때 1708이 될 것으로 추측된다: Rayleigh-Bénard problem에서 열대류가 일어나는 임계



(a) Nu



(b) ϕ_s (the unit of ϕ_s is degree)

Fig. 9 Nusselt numbers and the angles of separation points at the two walls when $\sigma=10$

Rayleigh수는 $Ra_c=1708$ 이다(Swinney and Gollub⁽²¹⁾). 기하학적 변수 (geometric parameter) σ 에 대한 임계 Rayleigh수의 변화경향(Fig. 10)은, 밀폐된 용기속에서 일어나는 열 불안정성 (thermal instability)에 의해 일어나는 대류현상에 있어서의 임계 Rayleigh수의 변화 경향들과 매우 유사한 모양을 보여주고 있다: 직육면체의 용기 (Davis⁽²²⁾), 수직 실린더 (Charlson and Sani⁽²³⁾), 수직 환형 (annulus) (Yoo et al.⁽²⁴⁾).

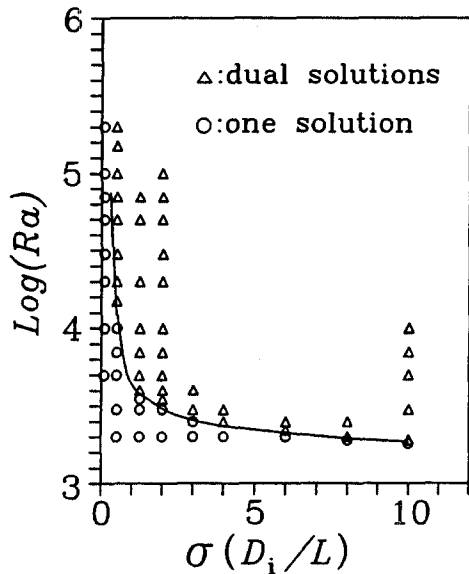


Fig. 10 Map of the downward and upward flows on the Ra - σ plane: (\circ : only upward flow exists); (Δ : two flows are coexisting). Continuous line represents the critical Rayleigh number above which dual solutions exist

유체유동을 지배하는 Navier-Stokes 방정식은 비선형(nonlinear)이므로 복수해(multiple solutions)가 존재할 가능성은 언제든지 있다. 따라서 지금까지 많이 연구되어 온 기존의 시스템에 대해서 이미 알려진 유동현상 외의 다른 현상을 발견하는 것은 무척 흥미로운 일일 것이다. 똑같은 상황에서 일어나는 여러 가지의 현상, 즉 다중해의 발견은 매우 흥미있는 것으로 생각된다. 특히 학문적으로 흥미를 끌고 있는 기존의 문제는 von Kármán swirling flows⁽⁹⁾인데 이 시스템에 있어서는 실현 불가능한 현상이지만 무한히 많은 해가 존재한다고 알려져 있다. 본 연구에 있어서의 '내려가는 유동'은 시스템의 부분적인 열적인 불안정에 의해 구형되는 현상으로서 σ 가 클 때에는 아주 자연스런 현상으로 보인다. 그러나 실험적으로 이 현상을 뚜렷하게 규명한 연구는 아직 보여지지 않고 있다. Powe 등⁽⁶⁾은 $\sigma=10$ 일 때 환형의 윗부분에서 하나 혹은 여러 쌍의 작은 counter-rotating cell로 구성되는 비정상 유동을 관측하였다고 하지만 정확하게 어떤 형태의 유동인지는 알 수가 없다. 본 연구의 수치계산에 의해 발견된 이중해의 현상을 실험적으로 규명하는 것은 남겨진 또 하나의 과제이다.

4. 결 론

일정 온도를 유지하고 있는 두 개의 수평 동심 실린더 사이에 있는 공기($Pr=0.7$)의 자연 대류에 대한 이중해를 수치적으로 조사하였다. 안쪽 실린더의 온도가 바깥쪽 실린더의 온도보다 높은 경우 환형(annulus)의 윗부분은 열적으로 불안정한 상황이 된다. 이 열 불안정성(thermal instability)으로 인하여 두 실린더 사이의 간격을 기초를 둔 Rayleigh수가 어떤 임계치를 넘어서면 기존의 연구에서 흔히 보이는 초승달 모양의 소용돌이(eddy)와는 다른 새로운 형태의 유동장이 존재한다. 새로운 유동형태(flow pattern)는, 뜨거운 안쪽 실린더의 꼭대기 부근의 유체가 아래로 움직임으로써 환형의 반 쪽에 있어서 두 개의 서로 반대 방향으로 회전하는 소용돌이를 형성한다. 이 해는 D_i/L (=안쪽 실린더의 직경/환형의 폭) ≥ 0.3 에서 존재한다. 그러나 $D_i/L \leq 0.2$ 에서는 발견되지 않았다. D_i/L 이 증가할수록 이중해가 존재하는 임계 Rayleigh수는 감소하며 어떤 유한한 값으로 접근해 간다.

참고문헌

- (1) Gebhart, B., Jaluria, Y., Mahajan, R. L. and Sammakia, B., 1988, *Buoyancy-Induced Flows and Transport*, Springer-Verlag, pp. 761~771.
- (2) Kuehn, T. H. and Goldstein, R. J., 1976, "An Experimental and Theoretical Study of Natural Convection in the Annulus Between Horizontal Concentric Cylinders," *J. Fluid Mech.* Vol. 74, pp. 695~719.
- (3) Tsui, Y. T. and Tremblay, B., 1984, "On Transient Natural Convection Heat Transfer in the Annulus Between Concentric Horizontal Cylinders with Isothermal Surfaces," *Int. J. Heat and Mass Transfer*, Vol. 27, pp. 103~111.
- (4) Rao, Y. E., Miki, Y., Fukuda, K., Yakata, Y. and Hasegawa, S., 1985, "Flow Patterns of Natural Convection in Horizontal Annuli," *Int. J. Heat and Mass Transfer*, Vol. 28, pp. 705~714.
- (5) Castrejon, A. and Spalding, D. B., 1988, "An Experimental and Theoretical Study of Tran-

- sient Free-Convection Flow Between Horizontal Concentric Cylinders," *Int. J. Heat and Mass Transfer*, Vol. 31, pp. 273~284.
- (6) Powe, R. E., Carley, C. T. and Bishop, E. H., 1969, "Free Convective Flow Patterns in Cylindrical Annuli," *J. Heat Transfer, Trans. ASME. Series C*, Vol. 91, pp. 310~314.
- (7) Fant, D. B., Prusa, J. and Rothmayer, A. P., 1990, "Unsteady Multicellular Natural Convection in a Narrow Horizontal Cylindrical Annulus," *J. Heat Transfer, TRANS. ASME. Series C*, Vol. 112, pp. 379~387.
- (8) Yoo, J. S., Choi, J. Y. and Kim, M. U., 1994, "Multicellular Natural Convection of a Low Prandtl Number Fluid Between Horizontal Concentric Cylinders," *Numerical Heat Transfer, Part A*, Vol. 25, pp. 103~115.
- (9) Zandbergen, P. J. and Dijkstra, D., 1987, "Von Kármán Swirling Flows," *Ann. Rev. Fluid Mech.*, Vol. 19, pp. 465~491.
- (10) Dennis, S. C. R. and Ng, M., 1982, "Dual Solutions for Steady Laminar Flow Through a Curved Tube," *Q. J. Mech. Appl. Math.*, Vol. 35, pp. 305~324.
- (11) Nandakumar, K., and Masliyah, J. H., 1982, "Bifurcation in Steady Laminar Flow Through Curved Tubes," *J. Fluid Mech.*, Vol. 119, pp. 475~490.
- (12) Benjamin, T. B. and Mullin, T., 1982, "Notes on the Multiplicity of Flows in the Taylor Experiment," *J. Fluid Mech.*, Vol. 121, pp. 219~230.
- (13) Cliffe, K. A., 1983, "Numerical Calculations of Two-Cell and Single-Cell Taylor Flows," *J. Fluid. Mech.*, Vol. 135, pp. 219~233.
- (14) Nandakumar, K., Masliyah, J. H. and Law, H. S., 1985, "Bifurcation in Steady Laminar Mixed Convection Flow in Horizontal Ducts," *J. Fluid Mech.*, Vol. 152, pp. 145~161.
- (15) Yoo, J. S. and Kim, M. U., 1991, "Two-Dimensional Convection in a Horizontal Fluid Layer with Spatially Periodic Boundary Temperatures," *Fluid Dyn. Res.*, Vol. 7, pp. 181~200.
- (16) Roache, P. J., 1972, *Computational Fluid Dynamics*, Hermosa, pp. 53~64.
- (17) Buzbee, B. L., Golub, G. H. and Nielson, C. W., 1970, "On Direct Methods For Solving Poisson's Equations," *SIAM J. Numer. Anal.*, Vol. 7, pp. 627~656.
- (18) Mack, L. R. and Bishop, E. H., 1968, "Natural Convection Between Horizontal Concentric Cylinders for Low Rayleigh Numbers," *Q. J. Mech. Appl. Math.*, Vol. 21, pp. 223~241.
- (19) Custer, J. R. and Shaughnessy, E. J., 1977, "Thermoconvective Motion of Low Prandtl Number Fluids Within a Horizontal Cylindrical Annulus," *J. Heat Transfer, Trans. ASME. Series C*, Vol. 99, pp. 596~602.
- (20) Charrier-Mojtabi, M. C., Mojtabi, A. and Caltagirone, J. P., 1979, "Numerical Solution of a Flow Due to Natural Convection in Horizontal Cylindrical Annulus," *J. Heat Transfer, Trans. ASME. Series C*, Vol. 101, pp. 171~173.
- (21) Swinney, S. L. and Gollub, J. P., 1981, "Hydrodynamic Instabilities and the Transition to Turbulence," *Topics in Applied Physics*, vol. 45, Springer-Verlag, pp. 97~137.
- (22) Davis, S. H., 1967, "Convection in a Box : Linear Theory," *J. Fluid Mech.*, Vol. 30, pp. 465~478.
- (23) Charlson, G. S. and Sani, R. L., 1970, "Thermoconvective Instability in a Bounded Cylindrical Fluid Layer," *Int. J. Heat and Mass Transfer*, Vol. 13, pp. 1479~1495.
- (24) Yoo, J. S., Kim, M. U. and Choi, D. H., 1988, "Convective Instability of a Fluid Layer Confined in a Vertical Annulus Heated From Below," *Int. J. Heat and Mass Transfer*, Vol. 31, pp. 2285~2290.