

〈논 문〉

유압측정을 위한 피스톤-실린더 간격내의 압력분포에 대한 수치해석

우삼용* · 박종호**

(1994년 8월 12일 접수)

Numerical Analysis of Pressure Distribution in Piston-Cylinder Unit for Accurate Pressure Measurement

Sam-Young Woo and Jong-Ho Park

Key Words : Oil Hydraulics(유압), Numerical Analysis(수치해석), Elastic Distortion(탄성변형), Deadweight Piston Gauge(분동식 압력계), Piston-Cylinder Unit(피스톤-실린더 장치), Viscosity-Pressure Relation(점도-압력관계)

Abstract

Precise and accurate pressure measurements are obtained using deadweight piston gauges. Pressure distribution and elastic distortion in the piston-cylinder unit are the leading factors in determination of effective area. The distortion depends upon the pressure distribution in the clearance between piston and cylinder and those are coupled each other. Considering the viscosity-pressure relation of oil and governing flow equation in the clearance, a new numerical iterative algorithm is developed. The disagreement between the monotonous and sharp pressure profiles is an indication that the pressure profile will be different for each piston and cylinder unit due to material variances.

1. 서 론

대기압에서 약 2만기압 정도의 고압까지의 정밀한 압력측정을 위해서는 보통 분동식 압력계(deadweight piston gauge or pressure balance)가 많이 사용된다. 분동식 압력계는 피스톤-실린더 장치와 분동(deadweight), 압력 발생부, 압력 제어부로 구성되어 있다. 피스톤은 원통 형상을 하고 있으며 비슷한 직경의 실린더 내부에 기밀을 유지하며 끼워져 있으며 부드럽게 상하 운동을 할 수

있도록 되어

있다. 피스톤의 밑면에는 유압(또는 공압)이 작용하며 윗면에는 분동이 얹혀져 있다. 측정시 유압에 의한 힘과 분동에 의한 힘은 평형을 이루게 되고 이때 피스톤 밑면에 작용하는 압력 P 는 정의에 따라 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$P = \frac{Mg}{A_e} \quad (1)$$

여기서, M 은 피스톤과 분동 질량의 합, g 는 그 지역의 중력 가속도이고 A_e 는 피스톤-실린더 장치의 유효 단면적이다. 피스톤-실린더의 유효 단면적은 피스톤 단면적보다 다소 큰 값을 가지며 근사적으로 피스톤과 실린더 단면적의 산술평균이 된다.⁽¹⁾

*회원, 한국표준과학연구원 압력·전공그룹

**회원, 충남대학교 기계공학과

피스톤-실린더의 유효 단면적은 일정하지 않고 압력에 따라 변화하는데 대기압에서의 유효 단면적을 A_0 라면 압력 P 에서의 유효 단면적 A_e 는 다음과 같이 나타낼 수 있다.⁽²⁾

$$A_e = A_0(1 + \lambda P) \quad (2)$$

여기서, λ 는 압력변형계수라고 하며, 유효 단면적이 압력의 증가에 따라 변화하는 비례 상수를 의미한다. 유효 단면적은 피스톤에 작용하는 힘의 평형을 고려하여 피스톤과 실린더의 형상측정으로부터 계산할 수 있으며 Fig. 1에 보인 바와 같은 축대칭인 일반적인 형상의 피스톤-실린더의 경우 다음 식으로 표시된다.⁽²⁾

$$A_e = \pi r_0^2 \left(1 + \frac{h_0}{r_0} + \frac{1}{r_0 P} \int_0^L \rho(x) \cdot \frac{d(u+U)}{dx} dx \right) \quad (3)$$

Fig. 1에서 $h(x)$ 는 피스톤과 실린더 사이의 간격, $r(x)$ 는 피스톤 반경, $u(x)$ 는 피스톤 밀면을 기준으로 한 반경방향 변위, $U(x)$ 는 실린더 밀면을 기준으로 한 반경방향 변위를 나타낸다. 점 o 는 $x=0$ 에서의(즉 피스톤 밀면) 값을 의미한다. 중립면(neutral surface)은 피스톤과 실린더의 사이에 위치하고 전단응력이 작용하지 않는 면을 나타내며 유효 단면적을 결정하는 기준이 된다. 식

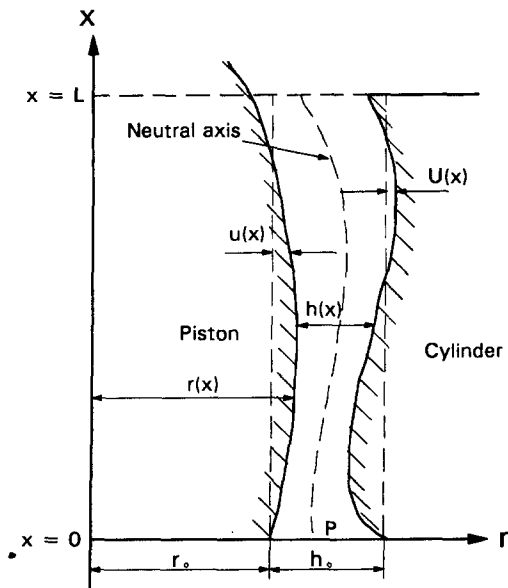


Fig. 1 Schematic diagram of piston-cylinder unit (clearances greatly exaggerated) to illustrate the terms used in equation 3

(3)은 어떤 압력이 작용할 때 피스톤 하단부의 변형을 기준으로 식 (2)의 형태로 바꾸어 쓸 수 있으며 이때 압력 변형 계수는 다음과 같이 표시된다.

$$\lambda = \frac{\frac{u_0 + U_0}{r_0 P} + \frac{1}{r_0 P^2} \int_0^L \rho(x) \left(\frac{du}{dx} + \frac{dU}{dx} \right) dx}{1 + \frac{h_0}{r_0}} \quad (4)$$

여기서, λ 를 계산하기 위해서는 분자의 적분항이 계산되어야 하는데 이를 위해서는 피스톤과 실린더 사이의 압력 분포와 변형을 알아야 한다. 따라서 최근 국제적으로 피스톤-실린더의 변형에 관한 연구가 활발히 진행되고 있으며 각 측정 표준기관에서는 다양한 접근 방법으로 이에 관한 연구를 수행하고 있다.⁽³⁻⁵⁾ 보통 피스톤-실린더 사이의 간격은 수 μm 이내로 매우 좁으므로 직접적인 압력 측정이 거의 불가능하여 간접적인 방법으로 측정하거나 수치해석적 방법으로 예측하고 있다. 특히 Molinar⁽⁶⁾는 피스톤-실린더 사이의 압력에 따른 탄성변형을 미분방정식으로 표현한 후 Tschebyschef의 다항식으로 미지 변형량을 계산하였으며, 피스톤-실린더 사이의 압력분포는 Navier-Stokes 방정식으로부터 유도하여 반복법을 사용하였으며 실린더 외부에 스트레인게이지를 부착하여 변형량을 측정하여 간접적으로 압력분포를 계산하였다.

본 논문에서는 모델의 단순화를 위해 초기 피스톤과 실린더 사이의 간격이 평행인 경우로 간격 내의 유체의 흐름을 평판 유동으로 가정하였으며 연관(coupled)되어 있는 간격 압력과 재질의 변형량을 계산하기 위해 점성을 고려한 유동 방정식을 결합 구간내의 미세요소에 적용하여 개발한 새로운 알고리즘을 사용한 수치적 반복법으로 그 해를 구하였다.

2. 이론 및 계산방법

분동식 압력계에 사용되는 압력 유체는 높은 압력에서 측정에 필요한 감도(즉, 점도)를 가질 수 있고 낮은 압력에서 피스톤-실린더 사이의 기밀을 유지할 점성을 요구하는 상반성을 갖고 있다. 따라서 스펀들 오일이나 합성 오일 등 특별한 오일이 사용된다. 압력에 의한 오일의 점도 변화는 Roelands⁽⁶⁾에 의해 광범위하게 조사되었으며, 일반적으로 점도는 압력의 증가에 따라 급속하게 증가하여 다음

과 같은 지수함수로 표현된다.⁽⁷⁾

$$\log \eta + 1.200 = (\log \eta_0 + 1.200) \left(1 + \frac{P}{200}\right)^z \quad (5)$$

여기서, η 는 압력 P (MPa)에서의 동점성계수 (mPa·s)이고 η_0 는 대기압에서의 동점성계수 그리고 지수 z 는 온도과 오일에 따른 무차원 상수이다.

피스톤, 실린더의 탄성변형은 후벽 실린더(thick-walled cylinder)의 해석으로부터 구할 수 있으며 이것은 Lamé해로 널리 알려져 있다. 단순화한 분동식 압력계의 피스톤 실린더 장치와 각 부분에 작용하는 힘을 Fig. 2에 나타내었다. 피스톤 밑부분에는 압력 P 가 유효 단면적에 걸쳐서 작용하고 피스톤 윗부분에는 분동에 의한 압축응력 P_{pe} 가 작용한다. 또 피스톤과 실린더 사이의 간격에는 x 의 변화에 대한 압력 $p(x)$ 가 작용하고 있다. 이때 초기 피스톤과 실린더는 굴곡이 없이 평행하다고 가정하였다. 즉, Fig. 1과 비교하면 $u(x)$ 와 $U(x)$ 가 0이고 h 가 h_0 로 일정한 경우이다. 피스톤 반경을 r_0 , 실린더 내반경을 $r_c (= r_0 + h_0)$, 실린더 외반경을 R_c 라면 피스톤, 실린더의 압력에 의한 변형량

은 각각 다음 식으로 표현된다.⁽¹¹⁾

$$u(x) = \mu_p \frac{P_{pe}}{E_p} r_0 + (\mu_p - 1) \frac{p(x)}{E_p} r_0 \quad (6)$$

$$U(x) = \frac{p(x)}{E_c} \frac{(1 + \mu_c) R_c^2 + (1 - \mu_c) r_c^2}{R_c^2 - r_c^2} r_c \quad (7)$$

여기서, μ_p 및 μ_c 는 각각 피스톤과 실린더 재료의 Poisson 비, E_p 및 E_c 는 피스톤과 실린더 재료의 탄성계수이다. 이 식에서 문제가 되는 것은 피스톤과 실린더 사이 간격에서의 압력분포 $p(x)$ 로 직접적인 압력측정이 곤란하므로 실린더 외부의 변형량을 측정하여 간접적으로 예측하거나 수치적 방법으로 계산한다.

피스톤-실린더 사이의 유체의 흐름은 피스톤의 반경에 비해 그 사이 간격이 매우 작으므로 근사적으로 두 평판사이의 유동으로 볼 수 있으며 Navier-Stokes 방정식을 이용하여 거리 dx 사이에 압력 dp 가 작용하고 있는 경우, 유량 Q 는 다음과 같이 나타낼 수 있다.⁽¹²⁾

$$Q = \pi r_0 \frac{dp}{dx} \frac{h(x)^3}{6\eta} \quad (8)$$

피스톤-실린더 간격의 밑부분은 고압력인 P , 간격 윗부분에는 대기압이 작용하고 있어 피스톤-실린더의 겹침구간(engagement length)에 대한 압력분포를 구하기 위해 Fig. 2와 같이 겹침 구간을 x 축 방향으로 미세등분한 후 각 미세요소에 식 (5)~(8)이 성립할 수 있도록 수치적 반복법(iterative method)을 적용하였다. 미세구간의 수는 측정압력에 따라 분해능을 고려하여 변화시킬 수 있으며 100~500개 정도가 사용되었다. 측정압력이 5000기압 이상으로 높아지면 점도의 급격한 변화로 수렴속도가 느려지고 경우에 따라 발산하는 경우가 있어 본 연구에서는 5000기압 이하의 압력변화에 대하여 개발한 알고리즘은 다음과 같다.

- (1) 겹침 구간을 측정압력, 정확 요구도, 컴퓨터 성능에 따라 적당한 수의 미세구간으로 나눈다.
- (2) 겹침구간의 압력분포가 선형인 것으로 가정하여 각 미세구간의 중심에서의 압력을 결정한다.
- (3) 식 (6), (7)을 이용하여 피스톤, 실린더의 변형을 계산한다.
- (4) 식 (5)를 이용하여 각 구간에서 압력에 따른 점도를 계산한다.
- (5) 식 (8)을 이용하여 각 구간의 압력 강하를 계산한다. 이때 유량 Q 는 일정하다고 가정한다.

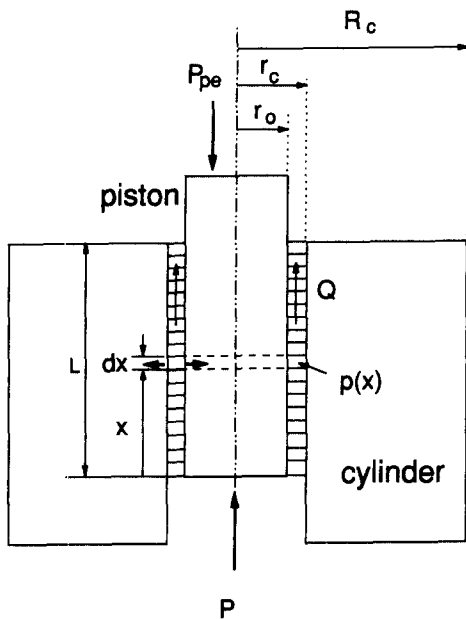


Fig. 2 Schematic representation of piston-cylinder unit, showing various acting pressures and division of annular gap into layers for iterative calculation

(6) 전 구간에 걸친 압력강하를 합하여 측정 압력 P 가 되는지 확인하고 설정한 공차 이내이면 정지하고 그렇지 않으면 합한 값을 P 라 하여 새로운 유량 Q 를 계산한다.

(7) 새로운 유량 Q 를 사용하여 각 미세 구간에서의 압력강하를 재계산한다.

(8) 이 값으로 각 미세구간에서의 압력분포를 재계산한다.

(9) 다시 단계 (3)에서 반복 수행한다.

이 알고리즘을 최근 Molinar에 의해 발표된 논문⁽⁶⁾의 자료와 같은 피스톤 외경 5.0462 mm, 실린더 내경 5.0474 mm, 실린더 외경 30 mm, 겹침구간 51 mm이고, 재질은 텅스텐 카바이드(6% 코발트 함유)인 피스톤-실린더 장치 모델에 적용하였다. 또한 재질에 따른 영향을 분석하기 위해 실제 피스톤-실린더 재질로 많이 쓰이는 스테인리스강에 대하여도 고찰하였다. 재료의 탄성계수 및 poisson 비는 텅스텐 카바이드의 경우 6.3×10^5 MPa, 0.21 그리고 스테인리스강의 경우 2.0×10^5 MPa, 0.30이다.

3. 결과 및 고찰

분동식 압력계에 많이 사용되는 압력 매체는 spinosstic 38번 오일과 2-ethylhexyl sebacate 오일(이하 sebacate 오일)이다. spinosstic 38번 오일은 고속기계의 윤활유로 많이 사용되는 스피들 오일로 높은 내마모성과 저점성을 갖고 있다. sebacate 오일은 거의 1 GPa정도의 고압까지 저점성을 유지하고 있어 고압용 압력 유체로 널리 사용되고 있다. 최근 미국립표준국(NIST)에서 Bean이 측정한 자료에 의하면 23°C에서 spinosstic 38oil의 측정압력에 따른 점도 변화는 Table 1과 같이⁽⁸⁾ 최소사승법을 이용하여 (5)식의 적합 곡선식에서 구한 $\eta_0 = 37.8$, $z = 0.635$ 이고, sebacate 오일은 Stuart⁽⁷⁾의 논문에 제시되어 있는 $\eta_0 = 21.1$, $z = 0.55$ 을 사용하여 개발한 알고리즘을 FORTRAN 77으로 프로그래밍하여 그 결과를 분석하였다.

Fig. 3은 피스톤 실린더 사이의 간격이 일정하고

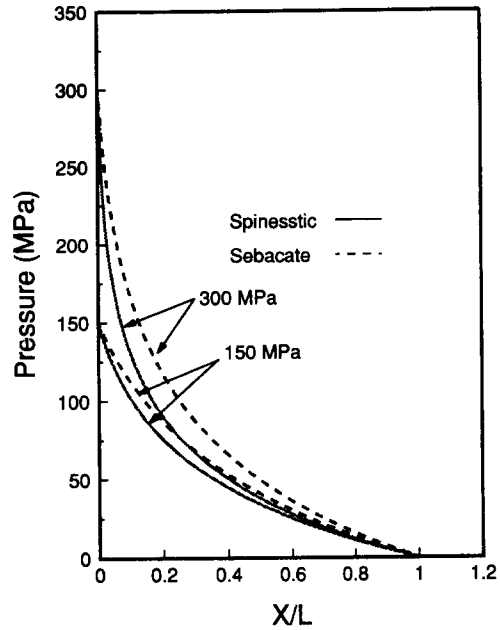


Fig. 3 Change of pressure distribution in the clearance according to the oil. (The distortions of piston and cylinder are ignored)

평행인 유로에서 피스톤-실린더의 변형을 고려하지 않았을 때(즉, 완전한 강체) 측정압력 150 MPa 및 300 MPa에서 압력 유체에 따라 피스톤-실린더 겹침 부분에 발생하는 압력 분포를 나타낸 것이다. 동일한 측정압력에서 두 오일은 비슷한 압력 분포를 보이지만 점도가 작을수록 선형 분포에 가까워짐을 알 수 있다. 측정압력이 150 MPa에서 300 MPa로 높아지면 계산한 압력 분포는 겹침구간 일부(고압부분)에서 급속한 감소를 보이고 있어 Stuart의 연구 결과와 일치하고 있다. 이상적인 완전 강체에서는 측정압력이 낮을수록 점도가 작을수록 압력 분포는 선형에 가까워짐을 알 수 있다.

그러나 실제 고체는 완전 강체가 아니므로 변형이 발생하게 마련이고 이로 인해 유로 간격이 달라지게 되므로 압력분포는 다시 변화하게 된다. Fig. 4(a)는 측정압력이 97.5 MPa인 경우 피스톤과 실린더의 재질을 가꾸어 가며 겹침 구간을 따라 유체

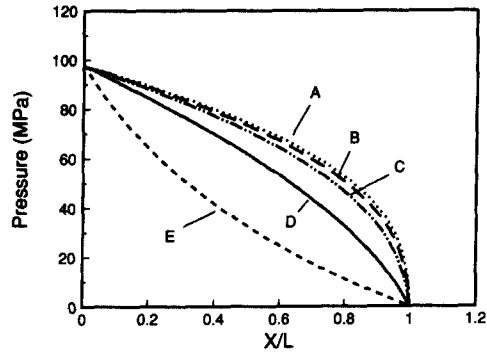
Table 1 Viscosity-pressure relationship of Spinosstic 38 oil

Pressure (MPa)	0.1	46.9	83.0	140.1	208.8	277.6	302.0
Viscosity (mPa. s)	37.8	79.9	172.0	477.0	1461.0	4852.0	frozen

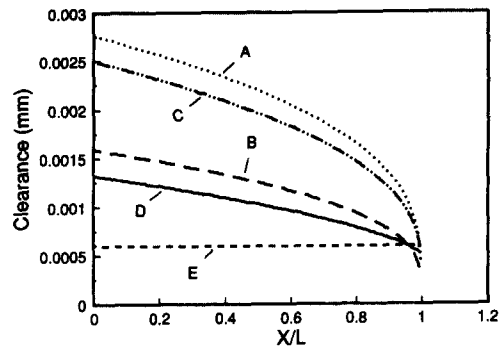
압력의 변화를 나타낸 것이고, (b)는 이때의 피스톤-실린더 사이의 간격의 크기를 나타낸 것이다. Fig. 4(a)에서 재질이 무를수록 압력 분포는 위로 볼록한 모양으로 변해가며 겹침구간 출구(저압부분)에서 급격한 압력 감소를 나타냄을 알 수 있다. 즉, 스테인리스강을 피스톤, 실린더 재료로 사용할 경우 압력은 겹침구간 입구에서 선형적으로 감소하다 출구 부근에서 급격히 압력이 감소한다. 그러나 D와 같이 재질의 강도가 커질수록 압력 분포는 직선에 가까워지게 되고 특히 변형이 전혀 없는 완전한 강체인 경우 압력분포는 E와 같이 아래로 갖는 것도 가능할 것이 예측된다. 이 결과는 간접적인 방법으로 피스톤-실린더 사이의 압력을 측정할 외국의 연구 사례와 비교해 볼 수 있으며 모두 압력 분포가 위로 볼록한 것과 일치하고 있다.^(3,5)

그런데 B와 C를 비교하면 일반적으로 실린더의 변형이 피스톤의 변형보다 크므로 실린더 재질을 스테인리스강으로 한 경우가 텅스텐 카바이드로 한 경우보다 변형이 크므로 C가 B보다 위로 더욱 볼록한 형상을 보일 것으로 예측되지만 Fig. 4(a)에서는 그렇지 못하다. 이것은 Fig. 4(b)에 보인 바와 같이 전체적인 변형은 C가 B보다 훨씬 크지만 겹침구간 출구 부근에서 분동 하중의 영향으로 인한 피스톤의 압축변형이 스테인리스강인 B의 경우가 크므로 출구 간격이 좁아져 밀봉효과를 가져오므로 이로 인해 압력분포의 형상이 역전된 것임을 알 수 있다.

분동식 압력계의 초기 연구자인 Johnson 등⁽⁹⁾에 따르면 피스톤-실린더 사이의 압력은 겹침 부분 길이를 따라 측정압력에서 대기압인 0까지 변화되어 어떤 작은 부분에서 압력감소가 집중되어 있을 것이라고 예측하고 이 부분의 유효 단면적을 결정하는 것이 중요하다고 주장하였다. 또 점도가 압력에 무관하다고 가정하고 유동 방정식을 적분하여 유도되는 Bass의 모델⁽¹⁰⁾을 이용한 Welch 등⁽³⁾은 겹침 길이의 중앙 부근에서 압력의 급격한 감소를 관찰하여 Johnson 등의 예측을 입증하였다. 그러나 본 연구에 의하면 이것은 Fig. 4(a)에서 A와 같이 스테인리스강과 같은 비교적 강성이 약한 재질에만 나타나는 형상으로 예측되며 실제로 이들은 강(steel)으로 만든 피스톤-실린더를 대상으로 하여 얻은 결과이다. 다만 이들은 피스톤-실린더 겹침의 중앙 부근에서 급속한 압력 감소를 관찰하였지만 본 연구에서는 겹침 끝부분에서 압력이 급속히 감



(a)



(b)

- A: piston & cylinder-stainless steel
- B: piston-stainless steel, cylinder-W. C
- C: piston-W. C, cylinder-stainless steel
- D: piston & cylinder-W. C
- E: piston & cylinder-perfect rigid

Fig. 4 Variation of pressure distribution (a) and clearance (b) according to the material change of piston-cylinder unit.

소하는 경향을 보이고 있는데 이는 피스톤-실린더 형상을 본 논문과는 달리 실제 측정을 통해 굴곡이 있는 모델을 사용하므로써 압력분포가 다르게 나타날 수 있을 것으로 생각된다. 또한 Molinar는 텅스텐 카바이드를 피스톤-실린더 재료로 사용하였으며 수치적 방법과 스트레인지지를 이용한 간접 측정 방법으로 간격내의 압력분포를 구한 결과 급격한 압력 감소 대신 단조롭고 완만한 압력 변화를 관찰하였다.⁽⁵⁾ 이것은 Fig. 4(a)의 D의 경우로 피스톤-실린더 재료의 탄성계수가 커질수록 변형은 단조로운 형상으로 변하고 점점 직선 분포에 가까워지기 때문이다.

Molinar의 수치적 해석결과와 본 연구 결과를

비교하기 위하여 97.5 MPa의 압력을 가하고 텅스텐 카바이드 재질로 된 평행 유로의 피스톤-실린더 장치를 가정하고, 압력 유체로 sebacate 오일을 사용하였을 때 피스톤-실린더 겹침 길이에 따른 압력 분포를 Fig. 5에 나타내었다. 두 경우 모두 비슷한 압력 분포를 예측하고 있으며 Molinar의 경우가

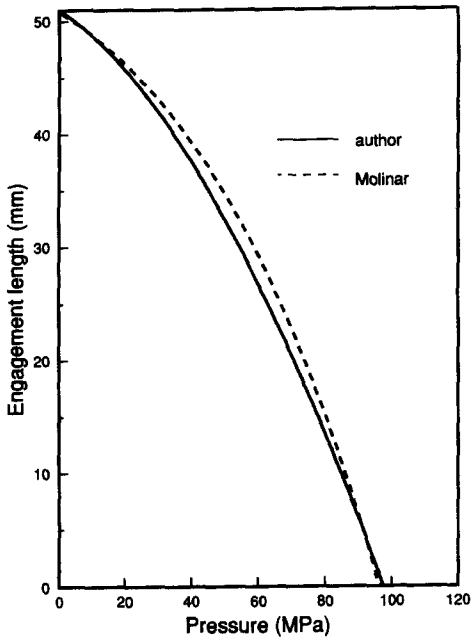


Fig. 5 Comparison of the pressure distribution in the clearance of piston-cylinder unit calculated by author and molinar

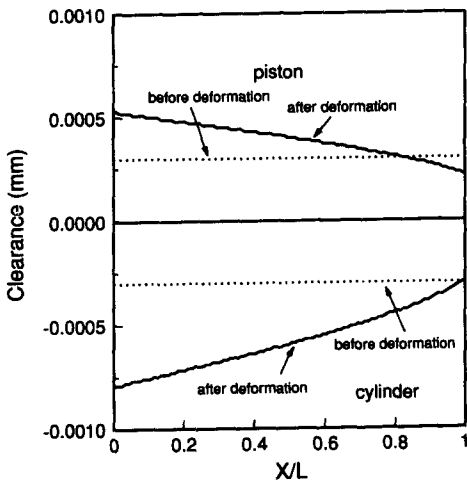


Fig. 6 Clearance change by elastic distortions of piston-cylinder unit at 97.5 MPa

중앙 부근에서 다소 볼록한 형상을 보이고 있다.

Fig. 6은 97.5 MPa의 압력을 가하고 텅스텐 카바이드 재질로 된 평행 유로의 피스톤-실린더 장치를 가정하고, 압력 유체로 sebacate 오일을 사용하였을 때 피스톤과 실린더의 간격의 변화를 나타내고 있다. 상부는 피스톤 하부는 실린더이고 점선은 변형 전 평행인 초기 유로를 나타내고 있다. 실선은 압력에 의해 변형된 피스톤과 실린더에 의해 형성된 유로를 보여주고 있다. 전체적으로 피스톤보다 실린더의 변형량이 더 크고 피스톤의 끝부분에서는 분동의 무게로 인한 압축변형이 발생하였음을 알 수 있다.

4. 결 론

정밀한 압력측정에 많이 사용되는 분동식 압력계의 올바른 해석을 위해서는 피스톤-실린더 장치 내의 간격의 압력분포를 아는 것은 매우 중요하다. 간격내의 압력분포로부터 압력변형계수와 유효 단면적을 계산할 수 있으나 압력분포와 피스톤-실린더의 변형은 서로 연관되어 있어 그 풀이가 복잡하다.

본 연구에서는 압력에 따라 유체의 점성이 변하는 것을 고려하고 피스톤, 실린더의 탄성변형과 겹침구간내의 미소부분에 작용하는 유동 지배방정식을 동시에 만족시키는 알고리즘을 개발하여 수치적 반복법으로 그 해를 구하였다.

그 결과 피스톤-실린더가 변형하지 않을 경우 피스톤-실린더 사이의 압력분포는 유체의 점성에 따라 달라져 점성이 작을수록 직선분포에 가까워지고 압력이 높아질수록 겹침구간 입구 부근에서 급격한 압력 감소를 보임을 확인하였다. 또 피스톤-실린더가 변형할 경우 위로 볼록한 형상 쪽으로 변화하고 스테인리스강인 경우 Welch와 Bean의 실험결과와 같이 급격한 압력 감소를 관찰할 수 있었으며, 텅스텐 카바이드 경우처럼 탄성계수가 비교적 큰 경우는 Molinar의 결과와 같이 비교적 완만한 압력 감소를 관찰할 수 있었으며, 압력분포는 피스톤과 실린더 재질에 의해 주된 영향을 받음을 알 수 있었다.

참고문헌

(1) Heydemann, P. L. M. and Welch, B. E., 1975,

- Experimental Thermodynamics*, Vol. 2, Butterworths, London, pp. 147~202.
- (2) Lewis, S. and Peggs, G. N., 1979, *The Pressure Balance: A Practical Guide to Its Use*, National Physical Laboratory, Teddington, England, pp. 19~30.
- (3) Welch, B. E. and Bean, V. E., 1984, "Pressure and Temperature Measurements in the Annulus between the Piston and Cylinder of a Simple Deadweight Piston Gauge," *Rev. Sci. Instrum.*, Vol. 55, pp. 1901~1909.
- (4) Klingenberg, G., 1986, "Elastic Distortion of a Piston-Cylinder Systems of a Pressure Balances," *Metrologia*, Vol. 22, pp. 259~263.
- (5) Molinar, G. F., 1989, "Elastic Distortions in a Piston-Cylinder Unit for Pressure Measurements in Liquids to 100 MPa," *BIPM Mmonographie* 89/1, pp. 12~21.
- (6) Roelands, C. J. A., 1966, "Correlational Aspect of the Viscosity, Temperature and Pressure Relationship of Lubricating Oils," Ph. D. Thesis, University of Delft.
- (7) Stuart, P. R., 1989, "The Influence of Fluid Viscosity on the Distortion of Piston-Cylinder Assemblies in Pressure Balances," *BIPM Monographie* 89/1, pp. 31~40.
- (8) Bean V. E., 1989, Private Communication.
- (9) Johnson, D. P. and Newhall, D. H., 1953, "The Piston Gage as a Precise Pressure Measuring Instrument," *Trans. ASME*, 75, pp. 301~310.
- (10) Bass, A. H., 1978, "Analysis of Mechanical Pressure Generators," *J. Phys. E.*, Vol. 11, pp. 682~686.