

〈논 문〉

저레이놀즈수 2차 모멘트 난류모형에 의한 정사각단면의 180° 곡덕트 난류유동의 수치해석

신증근* · 최영돈**

(1996년 2월 3일 접수)

J. K. Shin and Y. D. Choi

Numerical Computation of Turbulent Flow in a Square Sectioned 180° Bend by Low-Reynolds-Number Second Moment Turbulence Closure

Key Words : Second Moment Turbulence Closure(2차 모멘트 난류단형), 180° Bend Flow(180° 곡덕트 유동), Secondary Flow(2차 유동), Vortex Breakdown(와류분해), Cubic Mean Pressure Strain Model(입방형 평균 압력변형률 모형)

Abstract

A new low Reynolds number nonlinear second moment turbulence closure was introduced to analyze a square sectioned 180° bend flow. Inclusion of nonlinear return to isotropy term and cubic mean pressure strain term has brought out a marked improvement in the level of agreement with measured velocity profiles. Optimization of present closure was performed by comparison of computed velocity profiles with the experimental ones with variation of nonlinear return to isotropy term and quadratic and cubic pressure-strain model. Progressive vortex breakdown due to the interaction of primary and secondary flows was well captured by using the optimized second moment turbulence closure.

기 호 설 명

<p>A : 레이놀즈응력의 불변항, 편평계수 ($\equiv 1 - 9(A_2 - A_3)/8$)</p> <p>$A_2$: 레이놀즈응력의 2차 불변항 ($\equiv a_{ij}a_{ji}$)</p> <p>A_3 : 레이놀즈응력의 3차 불변항 ($\equiv a_{ij}a_{jk}a_{ki}$)</p> <p>$a_{ij}$: 레이놀즈응력의 비등방성 텐서 ($\equiv \overline{u_i u_j} / k - 2\delta_{ij}/3$)</p> <p>$C_1, C_2$: 모형상수</p> <p>C'_1 : 모형상수</p> <p>C_1^w, C_1^v : 모형상수</p> <p>$C_{\epsilon 3}^1, C_{\epsilon 3}^2$: 모형상수</p> <p>C_{1d}, C_{2d} : 모형상수</p>	<p>C_D : 모형상수</p> <p>$C_{\epsilon}, C_{\epsilon 2}, C_{\epsilon 4}, C_{\epsilon 5}, C_{\epsilon 6}$: 모형상수</p> <p>C'_{A1}, C'_{A2} : 모형상수</p> <p>C_μ : 모형상수</p> <p>C_k : 모형상수</p> <p>C_s : 모형상수</p> <p>C_{ij} : 대류텐서</p> <p>c_l : 모형상수</p> <p>d_{ij} : 확산텐서</p> <p>D_H : 정사각덕트의 수력직경</p> <p>d_{ij}^k : 압력확산텐서</p> <p>d_{ij}^l : 난류확산텐서</p> <p>d_{ij}^m : 점성확산텐서</p> <p>e_{ij} : 비등방성 소멸율텐서</p>
---	--

*고려대학교 대학원 기계공학과

**회원, 고려대학교 기계공학과

- $f_1, f_2, f_3, f_4, f_{12}, f_{24}, f_0$: 벽함수
- $f_{\epsilon 1}, f_{\epsilon 2}$: 소멸항의 수정계수
- $f_{\epsilon}, f_{w1}, f_{w2}, f_{wk}, f_{we}$: 천이함수
- k : 난류운동에너지
- l, l_D, L_D : 난류길이척도
- n : 벽에 수직인 단위벡터
- P : 국소 평균압력
- P_k : 난류운동에너지 생성률
- $P_{\epsilon}^1, P_{\epsilon}^2, P_{\epsilon}^3, P_{\epsilon}^4$: 난류운동에너지 소멸률 방정식의 생성률
- P_{ij} : 레이놀즈응력 생성률 텐서
- r : ϕ_{ij2} 모형의 3차항 계수
- Re : 평균속도에 의한 레이놀즈수 ($\equiv WD_H/\nu$)
- Re_k : 난류레이놀즈수 ($\equiv L_D k^{0.5}/\nu$)
- Re_t : 난류레이놀즈수 ($\equiv k^2/(\nu\epsilon)$)
- r, x, θ : 원통좌표계
- T_k, T_{ϵ} : 난류수송률
- U : x 방향의 국부 평균속도
- u : x 방향의 요동속도
- u_i : 방향 요동속도
- $\overline{u_i u_j}$: 레이놀즈응력
- $u_i u_j$: 잔류응력텐서
- u_r : 벽마찰속도 ($\equiv \sqrt{\tau_w/\rho}$)
- V : y 방향 국부 평균속도
- v : y 방향 요동속도
- W : z 방향 국부 평균속도
- w : x 방향 요동속도
- x_i : 직교좌표
- y^+ : 벽면으로부터 무차원거리
- y, Y : 벽에 수직인 방향좌표
- z, Z : 유성방향 좌표

그리스문자

- δ_{ij} : Kronecker delta
- ϵ : 난류운동에너지 소멸률
- $\tilde{\epsilon}$: 등방성 난류운동에너지 소멸률
- ϵ_{ij} : 레이놀즈응력의 소멸텐서
- ϵ_{ij}^* : 벽면 저층에서 레이놀즈응력의 소멸텐서
- χ : von Karman의 상수
- μ : 점성계수
- ν : 동점성계수
- ν_{ij} : 모의 와점성계수 텐서
- ν_t : 와점성계수
- Π_k, Π_{ϵ} : 압력확산율
- ρ : 유체의 밀도

- Γ : ϵ 의 소멸률
- τ_w : 벽면의 전단응력
- ϕ_{ij} : 압력변형률 텐서
- ϕ_{ij1} : 저속 등방성회귀 성분
- ϕ_{ij2} : 고속 평균변형 성분
- ϕ_{ij1}^* : ϕ_{ij1} 의 벽면 수정항
- ϕ_{ij1}^{**} : ϕ_{ij1} 의 벽면 수정항

1. 서 론

전산유체역학의 실용화가 확대됨에 따라 복잡한 3차원 난류유동의 해석에서 해의 정확성과 일반성을 보장해줄 수 있는 난류모형의 개발이 요구되고 있다. 과거에는 실제유동의 해석에서 전산비용과 전산시간의 감축을 위해서 $k-\epsilon$ 모형과 벽함수법을 널리 사용해 왔으나 전산기 성능의 계속적인 발달에 따라 복잡한 난류유동을 좀 더 정확히 해석해 줄 수 있는 2차 모멘트 난류모형의 사용이 더 각광을 받게 되었다. 뿐만 아니라 난류유동의 해석에서 벽인접부 저레이놀즈수 영역의 복잡한 난류거동을 정확히 모사하는 것이 해의 정확성에 가장 큰 영향을 주는 것이 밝혀짐에 따라 벽부근을 미세격자로 나누고 저레이놀즈수 2차 모멘트 난류모형을 적용하는 연구가 활발히 진행되고 있다.^(1~4)

저레이놀즈수 2차 모멘트 난류모형은 구조적으로 $k-\epsilon$ 모형보다 이와 같은 벽인접부의 복잡한 난류 거동을 잘 모사할 수 있으나 저레이놀즈수 2차 모멘트 난류모형의 개발에 관한 연구는 최근에 들어서 이루어졌다. 그 이유는 저레이놀즈수 2차 모멘트 난류모형을 개발하려면 벽인접부에서 레이놀즈응력성분의 분포와 압력-변형률 성분 분포의 정확한 측정자료가 있어야 하는데 그 측정이 어려웠기 때문이다. 그러나 최근 난류유동을 직접 푸는 직접 수치모사법에 의한 유동해석^(5,6)이 이루어짐에 따라 벽인접부에서 레이놀즈응력의 분포와 압력-변형률 성분 분포의 자료가 제공되어서 이 분야의 연구가 활발히 진행되고 있다. 저레이놀즈수 2차 모멘트 난류모형에 관한 연구는 압력-변형률 모형, 레이놀즈응력의 난류확산 및 압력확산 모형, 레이놀즈응력의 소멸률 모형 등이 있으며 그 중심되는 연구는 비선형 압력-변형률 모형을 도입하는 연구이다.

Lumely⁽⁷⁾는 압력-변형률(pressure-strain) 항의

저속 등방성회귀항(slow return to isotropy)에 대한 비선형 모형을 제안하였고, 김과 정⁽⁸⁾은 저속항의 비선형 모형상수를 결정하기 위한 이론을 제시하였다. Speziale, Sarkar와 Gatski,⁽⁹⁾ Shih와 Lumely,⁽¹⁰⁾ Launder와 Tselepidakis⁽³⁾ 등은 고속 평균변형률(rapid mean strain) 항의 비선형 모형의 도입에 관한 연구를 하였다. 특히 Launder와 Tselepidakis⁽³⁾는 입방형(cubic) 모형을 제안하였다.

신과 최⁽¹¹⁾는 DNS 자료와 Cayley-Hamilton원리를 사용하여 실용성 있는 저속항의 모형계수를 결정하는 연구를 하였으며, 저레이놀즈수 2차 모멘트 난류모형에 Hallbäck 등⁽¹²⁾이 제안한 레이놀즈응력의 비등방성 소멸물리론을 도입하였다. 또한 입방형 고속 평균변형률 모형에서 3차항의 모형계수에 대해서 DNS 자료를 이용한 전산최적화에 의해 일반성이 큰 모형계수를 개발하였다. 그리고 그들은 2차원 평행 채널유동에서 그 모형을 검증하여 타당성을 증명하였다.

새로운 난류모형이 개발되면 적당한 시험유동에서 검증을 거쳐야 실용화될 수 있다. 지금까지 가장 많이 사용되어 온 시험유동은 완전발달된 평행 원관유동, 2차원 채널유동, 2차원 계단유동 등이다. 그러나 이러한 유동들은 단순한 2차원 유동이기 때문에 어느 난류모형이 이러한 유동들에서 좋은 결과를 보여주었다고 해서 그 모형이 복잡한 실

제유동에서도 좋은 결과를 주리라고 보장할 수는 없다. 따라서 난류모형의 적합성을 검증해 줄 수 있는 3차원 시험유동이 필요하다. 난류모형의 실제 유동에서의 적용 가능성 여부를 판별하는 3차원 시험유동으로는 정사각 단면의 90° 곡덕트유동, 정사각 단면의 180° 곡덕트유동, 원형단면의 180° 곡관 유동 등이 널리 사용되고 있다.

Fig. 1과 같은 정사각 단면의 180° 곡덕트에서는 강한 2차유동이 발생한다. 이 2차유동은 곡덕트 입구부에서는 큰 2개의 와류를 이루나 유동이 진행됨에 따라 여러개의 군소 와류로 나누어지며 유동방향 속도분포에 큰 속도골을 형성한다.⁽¹³⁾ 전산유체역학이 실용화되기 위해서는 이와 같이 곡덕트에서 발생하는 2차유동의 형태변화를 잘 모사할 수 있어야 하며, 이를 위해서는 급격히 변하는 3차원 유동장에서의 난류구조를 잘 예측할 수 있는 난류모형의 도입이 요구된다.

Chang 등⁽¹⁴⁾은 곡률반경이 수력직경의 3.375배되는 정사각단면의 180° 곡덕트유동의 속도분포와 레이놀즈응력을 LDV로 상세히 측정하였다. 그러나 그들은 2개의 평균속도 분포와 3개의 레이놀즈응력만 측정할 수 있었다. Choi 등⁽¹⁵⁾은 열선유속계를 이용하여 3개의 평균속도 성분과 6개의 레이놀즈응력을 모두 측정하였다. 두 실험결과는 대체적으로 일치하나 차이가 큰 부분도 있다. 그러나 지금까지 어느 자료가 더 정확한 것인지 분별하기는 어려웠다.

정사각단면의 180° 곡덕트 난류유동의 해석은 Johnson⁽¹⁶⁾이 와점성계수 모형(EVM)으로, Choi 등⁽¹³⁾은 대수응력모형(ASM)으로 해석한 바 있다. Johnson⁽¹⁶⁾은 벽함수법을 사용하였으나 Choi 등⁽¹³⁾은 미세격자법을 사용하였다. 그러나 그들은 모두 준-포물형 해법을 사용하였다.

Choi 등은 벽인접부의 난류모형으로 Van Driest의 혼합거리모형⁽¹⁷⁾을 사용하고 유동중심부는 표준대수응력모형⁽¹⁸⁾을 사용하였다. 그러나 유동역을 이와같이 2영역으로 나누어 2층모형(two layer model)을 사용하는 것은 프로그램 작성이 어렵고 모형의 일반성이 없어서 바람직하지 못하여 저레이놀즈수 2차 모멘트 난류모형의 적용이 요구되고 있다.

본 연구는 신과 최⁽¹¹⁾가 개발한 비선형 저 레이놀즈수 2차 모멘트 난류모형을 정사각단면의 180° 곡덕트 유동해석에 적용하여 이 모형의 적정성 여

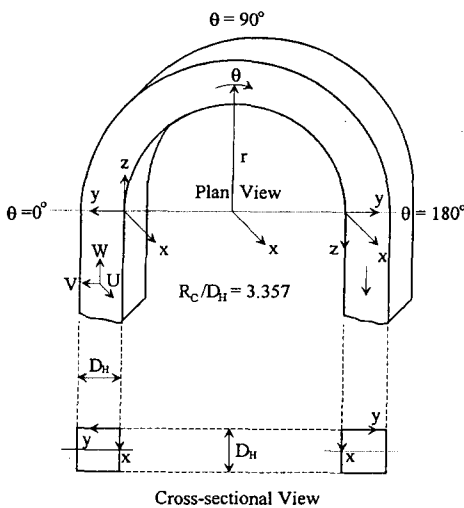


Fig. 1 Schematic showing the bend and tangents, the two coordinate systems and the velocity component of the flow

부를 검증하여 실용적 모형으로 만들려는데 목적을 두고 있다. 따라서 본 연구에서는 180° 곡덕트 유동을 해석할 때 레이놀즈응력방정식에서 어느 항과 어느 난류모형이 해석결과에 가장 큰 영향을 주는 인자인가를 알아보는데 초점을 맞추었고 아울러 최적 모형상수 값을 정하는 연구를 하였다.

그 결과 신과 최⁽¹¹⁾의 저레이놀즈수 2차 모멘트 난류모형은 저레이놀즈수 $k-\epsilon$ 모형이나 표준 2차 모멘트 난류모형보다 더 개선된 결과를 보여주었으며, 그 개선된 결과에 의해서 과거에 밝혀지지 않았던 곡덕트 유동에서 2차 유동의 변화 거동이 주 유동 속도분포에 미치는 영향을 찾아낼 수 있었다.

2. 난류유동의 수치해석

2.1 지배방정식

Fig. 1은 정사각단면을 갖는 180° 덕트 유로형상을 나타내는데, 그림에서와 같이 주유동속도를 W , 단면에 수직한 x, y 방향속도를 U, V 라 하였다. Table 1은 시험된 정사각단면의 180° 곡덕트 유로형상과 시험유동의 조건을 나타내며, 해석에 사용된 유체는 25°C의 공기이다.

본 해석에서는 정사각단면을 갖는 180° 곡덕트에서의 유동을 점성이 있는 정상상태 비압축성으로 고려하여 다음과 같은 직교원통형 좌표계에서의 연속방정식, 운동량방정식, 난류운동에너지방정식 그리고 난류운동에너지 소멸률방정식을 사용하였다.

● 연속방정식

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho U) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r\rho V) + \frac{\partial}{\partial \theta}(\rho W) = 0 \quad (1)$$

● 운동량방정식

$$\begin{aligned} x \text{ 방향} : & \frac{\partial}{\partial x}(\rho UU) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r\rho VU) + \frac{\partial}{\partial \theta}(\rho WU) \\ & = -\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left[2\mu \frac{\partial U}{\partial x} - \rho \overline{u^2} \right] \\ & + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r\mu \left(\frac{\partial U}{\partial r} + \frac{\partial V}{\partial x} \right) - r\rho \overline{uv} \right] \end{aligned}$$

$$+ \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\mu \left(\frac{\partial W}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial \theta} \right) - \rho \overline{uw} \right] \quad (2)$$

$$\begin{aligned} r \text{ 방향} : & \frac{\partial}{\partial x}(\rho UV) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r\rho VV) \\ & + \frac{\partial}{\partial \theta}(\rho WV) - \rho \frac{W^2}{r} \\ & = -\frac{\partial P}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial x} \left[\mu \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial x} \right) - \rho \overline{uv} \right] \\ & + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[2r\mu \frac{\partial V}{\partial r} - r\rho \overline{v^2} \right] \\ & + \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\mu \left(\frac{\partial W}{\partial r} - \frac{W}{r} + \frac{\partial V}{\partial \theta} \right) - \rho \overline{vw} \right] \\ & - \frac{2\mu}{r} \left[\frac{\partial W}{\partial \theta} + \frac{V}{r} \right] + \rho \frac{\overline{w^2}}{r} \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \theta \text{ 방향} : & \frac{\partial}{\partial x}(\rho UW) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r\rho VW) \\ & + \frac{\partial}{\partial \theta}(\rho WW) + \rho \frac{VW}{r} \\ & = -\frac{\partial P}{\partial \theta} + \frac{\partial}{\partial x} \left[r\mu \left(\frac{\partial V}{\partial \theta} + \frac{\partial W}{\partial r} - \frac{W}{r} \right) - r\rho \overline{vw} \right] \\ & + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r\mu \left(\frac{\partial V}{\partial \theta} + \frac{\partial W}{\partial r} - \frac{W}{r} \right) - r\rho \overline{vw} \right] \\ & + \frac{\partial}{\partial \theta} \left[2\mu \left(\frac{\partial W}{\partial \theta} + \frac{V}{r} \right) - \rho \overline{w^2} \right] \\ & + \mu \left[\frac{\partial V}{\partial \theta} + \frac{\partial W}{\partial r} - \frac{W}{r} \right] - \rho \frac{\overline{vw}}{r} \end{aligned} \quad (4)$$

● 난류운동에너지방정식

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x}(\rho Uk) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r\rho Vk) + \frac{\partial}{\partial \theta}(\rho Wk) \\ & = \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(\mu + \rho C_s \frac{k}{\epsilon} \overline{u^2} \right) \frac{\partial k}{\partial x} \right] \\ & + \frac{\partial}{\partial r} \left[r \left(\mu + \rho C_s \frac{k}{\epsilon} \overline{v^2} \right) \frac{\partial k}{\partial r} \right] \\ & + \frac{\partial}{\partial x} \left[\rho C_s \frac{k}{\epsilon} \left(\overline{uv} \frac{\partial k}{\partial r} + \overline{vw} \frac{\partial k}{\partial \theta} \right) \right] \\ & + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r\rho C_s \frac{k}{\epsilon} \left(\overline{uv} \frac{\partial k}{\partial x} + \overline{vw} \frac{\partial k}{\partial \theta} \right) \right] \\ & + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[r\rho C_s \frac{k}{\epsilon} \left(\overline{uw} \frac{\partial k}{\partial x} + \overline{vw} \frac{\partial k}{\partial r} \right) \right] \\ & + \rho \Pi_k + P_k - \rho \epsilon \end{aligned} \quad (5)$$

Table 1 Dimension and flow conditions of square sectioned 180° bend

Mean velocity (m/s)	Reynolds number	Hydraulic diameter (m)	Inner radius of curvature (m)	Outer radius of curvature (m)
9.996	56,690	0.0889	0.254	0.343

● 난류운동에너지 소멸률 방정식

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial}{\partial x}(\rho U \epsilon) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r \rho V \epsilon) + \frac{\partial}{r \partial \theta}(\rho W \epsilon) \\
 = & \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(\mu + \rho C_s \frac{k}{\epsilon} \overline{u^2} \right) \frac{\partial \epsilon}{\partial x} \right] \\
 & + \frac{\partial}{r \partial r} \left[r \left(\mu + \rho C_s \frac{k}{\epsilon} \overline{v^2} \right) \frac{\partial \epsilon}{\partial r} \right] \\
 & + \frac{\partial}{\partial x} \left[\rho C_s \frac{k}{\epsilon} \left(\overline{uv} \frac{\partial \epsilon}{\partial r} + \overline{uw} \frac{\partial \epsilon}{r \partial \theta} \right) \right] \\
 & + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \rho C_s \frac{k}{\epsilon} \left(\overline{uv} \frac{\partial \epsilon}{\partial x} + \overline{vw} \frac{\partial \epsilon}{r \partial \theta} \right) \right] \\
 & + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[r \rho C_s \frac{k}{\epsilon} \left(\overline{uw} \frac{\partial \epsilon}{\partial x} + \overline{vw} \frac{\partial \epsilon}{\partial r} \right) \right] \\
 & + \rho \Pi_\epsilon + \rho P_\epsilon^1 + \rho P_\epsilon^2 + \rho P_\epsilon^3 + \rho P_\epsilon^4 - \rho \Gamma
 \end{aligned} \tag{6}$$

식 (5) ~ (6)에서 난류운동에너지 생성항 P_k 는

$$\begin{aligned}
 P_k = & -\rho \left[\overline{u^2} \frac{\partial U}{\partial x} + \overline{uv} \left(\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial r} \right) \right. \\
 & + \overline{uw} \left(\frac{\partial W}{\partial x} + \frac{\partial U}{r \partial \theta} \right) \\
 & + \overline{v^2} \frac{\partial V}{\partial r} + \overline{vw} \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial V}{r \partial \theta} - \frac{W}{r} \right) \\
 & \left. + \overline{w^2} \left(\frac{\partial W}{r \partial \theta} + \frac{V}{r} \right) \right]
 \end{aligned} \tag{7}$$

이다. 식 (5)와 (6)의 난류운동에너지방정식과 난류운동에너지 소멸률방정식에 대한 신과 최⁽¹⁹⁾의 저레이놀즈수 다중생성률 모형은 Table 2와 같다. 이 모형은 난류운동에너지 소멸률의 4개 생성율과 1개 소멸률을 각각 모형화한 것이 특징이며, 난류운동에너지의 압력 확산항 Π_k 는 Nagano와 Shimada⁽²⁰⁾모형을 그대로 사용하였고, 난류운동에

Table 2 Present low-Reynolds-number ϵ equation model

Process	Model
ϵ	$\frac{D\epsilon}{Dt} = D_\epsilon + \Pi_\epsilon + T_\epsilon + P_\epsilon^1 + P_\epsilon^2 + P_\epsilon^3 + P_\epsilon^4 - \Gamma$
Π_ϵ	$C_{\epsilon 6} \nu \frac{\partial}{\partial x_k} \left[(1 - f_{wk}) \frac{\epsilon}{k} \frac{\partial k}{\partial x_k} \right] f_{wk} f_{we}$
T_ϵ	$\frac{\partial}{\partial x_k} \left(C_\epsilon \frac{k}{\epsilon} \overline{u_k u_l} \frac{\partial \epsilon}{\partial x_l} \right)$
P_ϵ^1	$\frac{2f_{w1}}{1 + 1.5\overline{u^2}/k} \frac{P_k \epsilon}{k}$
P_ϵ^2	$C_{\epsilon 2} [1 - \exp(-y^+/4.7)] \frac{P_k \epsilon}{k}$
P_ϵ^3	$\nu \frac{k}{\epsilon} [C_{\epsilon 3}^1 \overline{u_k u_l} U_{l,j} + C_{\epsilon 3}^2 (k_i U_{l,j})] U_{l,kj}$
P_ϵ^4	$C_{\epsilon 4} [1 - \exp(-y^+/4.6)]^3 f_{e1}(R_t) \frac{\epsilon^3}{k}$
Γ	$C_{\epsilon 5} [\tanh(y^+/7.2)]^2 f_{e1}(R_t) \frac{\epsilon^2}{k}$

where

$$\begin{aligned}
 f_{e1}(R_t) &= 1 - 0.3 \exp[-(R_t/6)^2] \\
 f_{e2}(R_p) &= \exp(R_p^3) \\
 R_p &= \frac{P_k/\epsilon(1 + 0.47f_{w2})}{0.3R_t^{0.5}} \\
 f_{w2} &= \frac{2f_{w1}}{1 + 1.5\overline{u^2}/k} \\
 f_{w1} &= \exp[-(R_t/83)^2] \\
 f_{wk} &= \exp[-(y^+/9.0)^2] \\
 f_{we} &= 1 - 1.3 \exp(-y^+/0.4)
 \end{aligned}$$

너지의 소멸률의 압력확산항 $I\epsilon$ 는 Nagano와 Shimada⁽²⁰⁾모형에 수정함수 $f_{w\epsilon}$ 를 곱해서 사용하였다.

이때 사용된 모형계수들은 Table 3과 같다.

2.2 저레이놀즈수 2차 모멘트 대수응력 모형

본 연구에서 사용한 저레이놀즈수 대수응력 모형을 Table 4에 요약하였다. 이 모형은 신과 최⁽¹¹⁾가 2차원 평행 채널유동에서 시험한 모형이다. 이 모형에서 ϵ_{ij}^* 는 ϵ_{ij} 에 대한 Launder와 Tselepidakis⁽³⁾의 벽면 모형이고 ϵ_{ij}^0 는 Hallbäck 등⁽¹²⁾의 비선형 ϵ_{ij} 모형이다. ϕ_{ij1} 의 모형은 Lumley⁽⁷⁾가 제안한 비선형 모형을 택하였고, C_i 는 Sarkar와 Speziale⁽²¹⁾가 이론적으로 유도한 $-2/3$ 와 선형모형에 해당하는 0인 경우와 Launder와 Tselepidakis가 제안한 바와 같이 양의 값을 사용하여 C_i 값의 변화에 따른 해석결과를 검토하였다. ϕ_{ij2} 모형은 Launder와 Tselepidakis의 입방형 모형에 수정계수 C_2 를 전체에 곱하여 사용하였고 모형계수는 전산최적화 하였다.

Table 3 Coefficients of the low-Reynolds-number ϵ equation model

$C_{\epsilon 2}$	$C_{\epsilon 3}^1$	$C_{\epsilon 3}^2$	$C_{\epsilon 4}$	$C_{\epsilon 5}$	$C_{\epsilon 6}$
1.44	0.16	$0.004/[1-\exp(-y^+/4.0)]$	3.1	5.02	0.6

Table 4 Present low-Reynolds-number algebraic stress model

Process	Model
$\overline{u_i u_j}$	$\frac{\overline{u_i u_j}}{k} (P - \epsilon) = P_{ij} - \epsilon_{ij} + \phi_{ij}$
ϵ_{ij}	$f_\epsilon \epsilon_{ij}^* + (1 - g_\epsilon) \epsilon_{ij}^0$ where $f_\epsilon = \exp[-(R_t/150)^2]$
ϵ_{ij}^*	$\frac{\epsilon}{k} \frac{(\overline{u_i u_j} + \overline{u_i u_k n_j n_k} + \overline{u_j u_k n_i n_k} + \overline{u_k u_i n_k n_i n_i})}{1 + \frac{3}{2} \frac{\overline{u_p u_q n_p n_q}}{k}}$
ϵ_{ij}^0	$\epsilon \left[\left(1 + \frac{3}{4} \left(\frac{1}{2} A_2 - \frac{2}{3} \right) \right) a_{ij} - \frac{3}{4} \left(a_{ik} a_{kj} - \frac{1}{3} A_2 \delta_{ij} \right) \right] + \frac{2}{3} \delta_{ij} \epsilon$
ϕ_{ij}	$\phi_{ij1} + \phi_{ij2} + \phi_{ij1}^w + \phi_{ij2}^w$
ϕ_{ij1}	$-C_1 \left\{ a_{ij} + C_i \left(a_{ik} a_{kj} - \frac{1}{3} \delta_{ij} A_2 \right) \right\} \epsilon$
ϕ_{ij2}	$-C_2 \left[\left(P_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} P_{kk} \right) - \frac{1}{2} \epsilon a_{ij} \left(\frac{P_{kk}}{\epsilon} \right) \right. \\ \left. + \frac{1}{3} \left\{ \frac{\overline{u_k u_j} \overline{u_i u_l}}{K} \left(\frac{\partial U_k}{\partial x_l} + \frac{\partial U_l}{\partial x_k} \right) - \frac{\overline{u_j u_k}}{k} \left(\overline{u_i u_k} \frac{\partial U_j}{\partial x_l} + \overline{u_j u_k} \frac{\partial U_l}{\partial x_i} \right) \right\} \right. \\ \left. + \frac{r}{0.6} \left(A_2 (P_{ij} - D_{ij}) + 3a_{ij} a_{kj} (P_{ik} - D_{ik}) \right) \right]$
ϕ_{ij1}^w	$C_1^w \frac{\epsilon}{k} \left(\overline{u_k u_m n_k n_m} \delta_{ij} - \frac{3}{2} \overline{u_k u_i n_k n_j} - \frac{3}{2} \overline{u_k u_j n_k n_i} \right) f \left(\frac{1}{n_k \Gamma_k} \right)$
ϕ_{ij1}^w	$C_2^w \left(\phi_{km2} n_k n_m \delta_{ij} - \frac{3}{2} \phi_{ki2} n_k n_j - \frac{3}{2} \phi_{ki2} n_k n_i \right) f \left(\frac{1}{n_k \Gamma_k} \right)$ where $f \left(\frac{1}{n_k \Gamma_k} \right) = \frac{k^{1.5}}{2 C_i \epsilon x_n} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{47.4}{R_t}} \right)$ n_k = Unit vector normal to wall

Table 5 Coefficient of the low-Reynolds-number algebraic stress model

C_1	$2.5A^{0.25}\{1-\exp(-0.1R_t^{\frac{5}{8}})\}$
C'_1	0.8
C_2	$0.95(AA_2)^{0.25}[1-\exp\{- (0.0055R_t)^4\}]$
r	$\min(0.6, A^{0.5})$
C_1^w	$4.5\{1-0.95\exp(-0.954R_t^{0.25})\}\exp(-14A)+0.6A^{0.25}$
C_2^w	$0.3Z^{0.25}$
C_s	$\frac{0.22}{0.5[1+(\tanh(y^+/220))^3]}$
C_ϵ	$\frac{0.18}{0.5[1+(\tanh(Y^+/220))^3]}$
$C_{\epsilon 2}$	1.44
$C_{\epsilon 3}^1$	0.16
$C_{\epsilon 3}^2$	$\frac{0.004}{1-\exp(-y^+/4.0)}$
$C_{\epsilon 5}$	3.1
$C_{\epsilon 5}$	5.02
$C_{\epsilon 6}$	0.5
c_1	2.5

본 저레이놀즈수 2차 모멘트 난류모형에 대한 모형계수 식은 Table 5와 같다. 본 연구에서는 4가지 평균변형률 모형을 시험하였는데 그것은

- (1) IP 모형 (Isotropic of Production model)
- (2) IQ 모형 (IP model+Quadratic terms)
- (3) IPC 모형 (IP model+Cubic terms)
- (4) CQI 모형 (IP model+Quadratic terms+Cubic terms)

이다. IP (Isotropic of Production) 모형은 Table 4의 ϕ_{i2} 모형 중 우변 제 1항만 고려한 모형이고, IQ 모형은 IP 모형에 2차항인 우변 3항을 함께 고려한 모형이며, IPC 모형은 IP 모형에 입방항인 우변 4항을 함께 고려한 모형이다. 이와 같이 3가지 모형을 비교한 이유는 ϕ_{i2} 모형중 1차, 2차, 3차항 각각이 유동장에 미치는 영향을 분석하기 위함이다.

레이놀즈응력방정식을 원통좌표계에서 유도한 후 Table 4, Table 5에 의해서 모형화하였으며, 유도된 대수응력방정식은 부록에 수록하였다.

2.3 경계조건

벽면에서 U, V, W, k 에 대해서는 No-Slip 조건을 사용하고 ϵ 에 대해서는 등방성 소멸률이 0이 되는 $\tilde{\epsilon}=0$ 조건을 사용하였다. 그리고, 대칭축에서는 Neumann 조건을 적용하였다. 즉, 즉, 벽면에서

$$U=0, V=0, W=0, k=0$$

$$\epsilon=2\nu\left(\frac{\partial\sqrt{k}}{\partial y}\right)^2, \overline{uv}, \overline{uw}=0 \quad (8)$$

으로, 대칭축에서는

$$U=0, \frac{\partial\phi}{\partial x}=0 \quad (\phi=V, W, k, \epsilon, \overline{vw}) \quad (9)$$

으로 적용하였다.

2.4 입출구조건

2.4.1 입구조건

정사각단면을 갖는 180° 곡덕트유동에 대한 수치 해석은 180° 곡덕트의 상류쪽 $1D_H$ 부터 시작하여

180°곡덕트가 끝난 후 $5D_H$ 가 되는 지점까지 수행하였다. 계산이 시작되는 면에서의 평균속도 U , V , W , 난류운동에너지 k 그리고 난류운동에너지 소멸률 ϵ 은 입구조건으로 주어지며 이들에 대한 설명은 다음과 같다. 입구 평균속도는 Melling and Whitelaw⁽²²⁾가 $36.8D_H$ 의 완전확립된 유동에서 측정된 값을 사용하였다. 난류운동에너지 k 는 Melling & Whitelaw에 의해 보고된 주 레이놀즈 응력을 합산하여 2로 나누어 구하였으며, 난류운동에너지 소멸률 ϵ 은 다음 식으로 계산하였다.

$$\epsilon = C_{Df_{D1}} \frac{k^{1.5}}{L_D} + C_{1d}^2 f_{D2} \frac{kV}{L_D^2} \quad (10)$$

여기서,

$$\begin{aligned} f_{D1} &= 1 - \exp(-0.045 \text{Re}_k) \\ f_{D2} &= \exp(-0.125 \text{Re}_k) \\ \text{Re}_k &= \frac{L_D k^{0.5}}{\nu} \\ C_D &= C_\mu^{0.75} \\ C_{1d} &= \sqrt{2\chi} \end{aligned} \quad (11)$$

이다. 식 (10)에서 소멸률 길이척도는 다음과 같이 규정한다.

$$L_D = \min[xy, 0.85D_H] \quad (12)$$

여기서,

$$\begin{aligned} y &= \text{벽면까지의 최단거리} \\ \chi &= \text{von Karman 상수} (\equiv 0.4187) \\ C_\mu &= 0.09 \end{aligned}$$

이다. 식 (10)은 Tselepidakis⁽²³⁾가 DNS 자료를 이용하여 제안한 식을 본 연구에서 채널유동에 대한 DNS 자료를 이용하여 새로이 수정한 식이다.

레이놀즈응력에 대한 입구의 값은 U , V , W , k , ϵ 에 대한 입구값을 이용하여 Boussinesq의 난류모형으로 계산하였다. 입구에서의 레이놀즈응력 분포의 계산식은 다음과 같다.

$$-\overline{u_i u_j} = \nu_t \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} k \delta_{ij} \quad (13)$$

2.4.2 출구조건

계산영역 끝인 출구조건은 유선방향의 압력구배 분포가 최종 직선 격자면에서의 조건과 같다고 가정하여 다음과 같이 적용하였다.

$$\left(\frac{\partial P}{\partial z} \right)_{ijk} = \left(\frac{\partial P}{\partial z} \right)_{ijk-1} \quad (14)$$

여기서, k' 는 출구평면이며 속도항 및 난류항에 대한 출구조건은 구배를 0으로 가정하였다.

2.5 수치해석

본 연구에서는 정사각단면을 갖는 180° 곡덕트유동을 유한체적법에 의해 수치해석하였으며, 수치해의 안정성과 정확성을 높이기 위하여 사용한 방법들은 다음과 같다.

- (1) 준타원형 해법(semi-elliptic procedure)
- (2) QUICKER 해법
- (3) SIMPLER 해법
- (4) 미세격자법
- (5) 모의 와점성계수 텐서와 잔류응력텐서

본 해석에 사용한 전산 프로그램은 Gosman과 Ideriah⁽²⁴⁾의 TEACH-2E 프로그램을 본 유동해석에 적합하도록 변형시킨 것이다. 이 프로그램에서 운동량방정식을 푸는 방법은 Patankar와 Spalding⁽²⁵⁾의 SIMPLER해법을 Pratap과 Spalding⁽²⁶⁾이 부분포물선형(partially parabolic)유동을 해석할 수 있도록 수정한 방법을 사용하였다.

이 해법에서 특이한 것은 주유동 방향속도와 압력의 수정을 압력수정방정식으로 하지 않고, Pratap⁽²⁷⁾이 제안한 평균압력 수정(bulk pressure correction) 방법으로 하는 것이다.

본 해석에서도 운동량방정식을 차분화할 때 2차 유동의 대류항에 대하여 QUICK 해법을 비균일 격자계에 대하여 Kuo와 Park⁽²⁸⁾이 확장적용한 QUICKER(QUICK Efficiently Revised) 해법을 적용하였다. 또한, 보통의 QUICK 해법이 중심차분법을 근간으로 하여 적용되어 왔는데, 이 경우 계수들이 음의 값을 갖을 가능성이 있기 때문에 본 해석에서는 혼성(hybrid) 해법을 근간으로 하는 보다 수정된 QUICKER 해법을 적용하였다.

본 해석에서는 유동단면을 거친격자 구역과 미세격자 구역으로 나누어 전 구역에서 U , V , W 방정식과 P 방정식 그리고 k , ϵ 방정식을 완전히 풀었다. 벽면으로부터 $y^+ \leq 80$ 의 미세격자 구역에는 20개의 격자를 배치시켰고, 벽면으로부터 첫 번째 위치한 격자는 $y^+ \leq 0.5$ 가 되게 하였는데 그 이유는 ϵ 의 벽면 경계조건을 보다 타당성있게 적용하기 위해서이다. 전 유동장에 대해 사용한 격자수는 $52 \times 80 \times 140$ 개이다. 이와 같이 미세격자를 사용한 이유는 정사각단면의 180° 곡덕트 난류유동에서는

2차유동이 강력히 일어나 2차유동의 최대속도점이 벽면에 인접해 있으므로 벽면합수법을 적용하기 어렵기 때문이다.

거친 격자구역에서 점성에 의한 확산항은 레이놀즈응력에 의한 확산항보다 매우 작다. 와점성계수 모형에서와 같이 레이놀즈응력을 와점성계수의 변형률이 곱해진 항으로 대치하면 큰 문제가 없으나, 그렇지 않은 경우에 원천항이 다른 항보다 커져서 이 식으로 이산화방정식을 해석하면 발산하게 된다. 따라서 대수응력 모형의 경우에도 레이놀즈응력을 다음과 같이 모의 와점성계수 텐서에 속도변형률이 곱해진 항과 잔류응력항으로 나누어 수치해석하면 발산을 방지할 수 있다.

$$\overline{u_i u_j} = -\nu_{ij} \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \widetilde{u_i u_j} \quad (15)$$

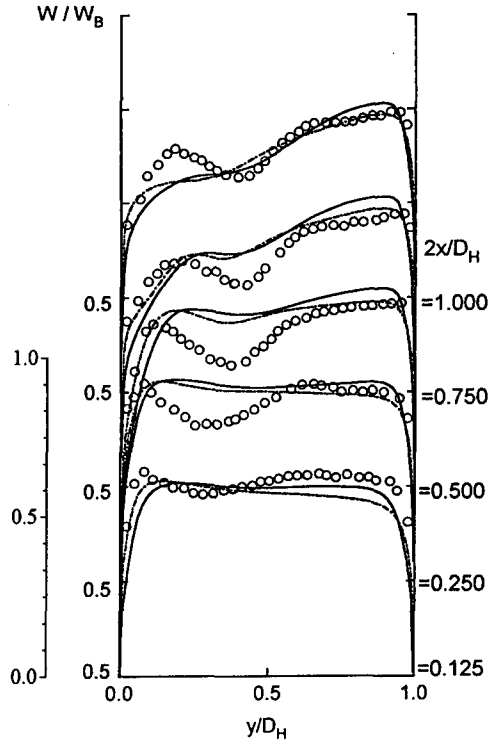
여기서 ν_{ij} 는 모의 와점성계수 텐서(pseudo-viscosity tensor)이고, $\widetilde{u_i u_j}$ 는 잔류응력텐서(residual stress tensor)이다.

3. 고찰 및 검토

정사각단면의 180° 곡덕트 유동해석에 적용한 난류모형들의 성능을 시험할 수 있는 가장 좋은 현상은 곡덕트의 곡률 원심력에 의해 발생한 2차 유동의 형태 변화를 각 난류모형들이 얼마나 잘 예측할 수 있는가를 살펴보는 것과 2차 유동의 와류가 여러 개의 군소 와류로 나누어질 때 형성한 주유동방향 속도분포의 2중 극대현상을 얼마나 잘 예측하는가를 살펴보는 것이다.

고레이놀즈수의 정사각단면 180° 곡덕트유동에서는 곡률 원심력에 의해서 $\theta=90^\circ$ 부근까지 2차 유동이 단일 와류(vortex)로 그 강도가 점점 증가하다가 $\theta=90^\circ$ 이후 와류의 강도가 강해지면서 와류유로에 굴곡이 발생하여 4, 5개의 군소 와류로 나누어진다. 이 군소 와류들은 주유동 방향의 속도변화에 따라 변형을 받아 위치에 따라 와류신장(vortex stretching)과 와류수축(vortex contraction)을 계속하면서 2차유동 형태에 굴곡을 일으켜 주유동 속도분포에 2중 극대 속도분포를 야기시킨다. 그러나 $\theta=180^\circ$ 인 곡덕트 출구에 가까워지면 출구부 직덕트의 영향을 받아 2차 유동의 강도가 약해지며 주유동 속도분포의 2중 극대 현상도 감소한다.

본 연구에서는 2차 유동의 분포가 가장 복잡하고



- : Measurements, Chang et al.⁽¹⁴⁾
- : Prediction by Launder and Shima model⁽¹¹⁾
- : Prediction by Shin and Choi's $k-\epsilon$ model⁽¹⁹⁾

Fig. 2 Comparison of predicted and measured normalized W velocity profile at $\theta=135^\circ$.

가장 여러 개의 군소 와류로 나누어지는 위치인 $\theta=135^\circ$ 에서 각 난류모형의 성능을 비교하였다. Fig. 2는 신과 최⁽¹⁹⁾가 개발한 저레이놀즈수 $k-\epsilon$ 모형과, Launder와 Shima⁽¹¹⁾의 저레이놀즈수 2차모멘트 모형을 적용하여 예측한 결과를 Chang 등⁽¹⁴⁾의 실험결과와 비교한 그림이다. Chang의 측정자료는 $\theta=135^\circ$ 의 덕트의 중심부 영역에서 큰 2중 극대 속도분포를 보여주고 있으며 속도분포가 극소로 되는 골깊이가 대단히 큰 것을 알 수 있다. 그러나 신과 최⁽¹⁹⁾의 저레이놀즈수 $k-\epsilon$ 모형이나 Launder-Shima의 저레이놀즈수 2차 모멘트 난류모형을 적용한 예측 결과는 2중 극대 속도분포를 잘 예측하고 있지 못하다. 본 연구에서 적용한 신과 최의 저 레이놀즈수 $k-\epsilon$ 모형은 평판유동이나 원판유동에서 시험할 때는 어느 2차 모멘트 난류모형보다 속도분포, 레이놀즈응력 등의 예측에서 탁

월함을 보여주었으나 3차원 유동 예측에 적용한 결과 그 정확성이 크게 떨어지는 것을 알 수 있다. 따라서 이것은 난류모형 검증에 2차원 평판유동이나 원판유동에서 검증하는 것은 난류모형의 개발에서 필요조건은 되지만 그것이 3차원 유동 예측에서의 정확성을 보장해주지 못함을 나타내준다. 따라서 새로 개발한 난류모형을 3차원의 복잡한 유속에 적용하기 위해서는 그에 적합한 3차원 모형유동의 개발이 필요하며, 본 연구에서 사용한 정사각단면의 180° 곡덕트유동은 가장 이상적인 검증 유동의 하나로 분류될 수 있음을 본 연구는 나타내 주고 있다.

Fig. 3, Fig. 5와 Fig. 6는 새로운 저레이놀즈수 2 차 모멘트 난류모형의 최적화를 위해 예측 결과를 비교한 그림이다.

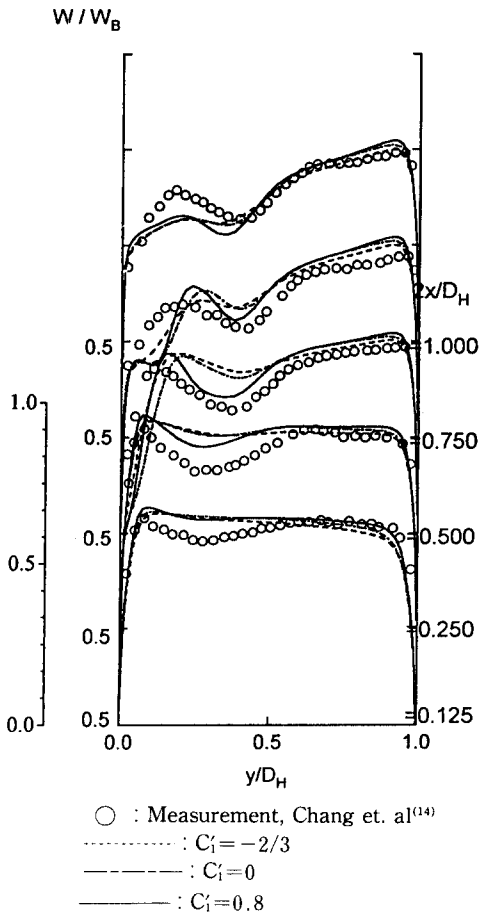


Fig. 3 Comparison of predicted and measured normalized W velocity profile at $\theta=135^\circ$

Fig. 3은 비선형 등방성 회귀항의 모형상수 C_i 을 변화시키며 $\theta=135^\circ$ 에서 주유동 속도분포를 비교한 그림이다. Sarkar와 Speziale⁽²¹⁾는 평균속도구배가 없는 균질유동에서의 레이놀즈응력의 소멸에 대한 이론에서 $C_i=-2/3$ 를 유도하였다. 그러나 Tselepidakis⁽²³⁾는 평판유동에서의 시험에서 $C_i=0.7$ 이 최적임을 발표하여 서로 상반된 결과를 보였다. 그러나 신과 최⁽¹¹⁾는 비선형 등방성 회귀모형에 대한 연구에 의해서 Fig. 4에서 보여주는 바와 같이 C_i 이 2차원 평면 유동의 중심에서는 $-2/3$ 이다가 벽에 인접하면 큰 양의 값으로 변하는 것을 밝혔다. 따라서 본 연구에서는 C_i 에 대한 평균값으로 0과 $-2/3$, 그리고 양의 값을 변화시키며 180° 곡덕트유동에서 시험해 본 결과 C_i 가 $-2/3$ 보다는 0이, 또 0보다는 양의 값을 갖는 것이 속도분포를 잘 예측해 줌을 보여주었고, 최적의 값은 Tselepidaskis가 경험적으로 얻은 0.7에 가까운 0.8을 얻었다. Fig. 4에서 나타난 바와 같이 비선형항이 비등방성 회귀항에 영향을 미치는 것은 벽 인접부이므로 C_i 의 평균값으로 양의 값을 사용한 것이 더 좋은 결과를 보여줄 것으로 판단된다.

Fig. 5는 $\theta=135^\circ$ 에서 등방성 회귀항의 비선형 모형상수 C_i 를 0으로 한 경우, 즉 Rotta의 선형 등방성 회귀모형을 사용할 경우 평균변형항의 어떤 항들이 주유동의 2중 극대현상의 발생에 영향을 주는지 알아보기 위한 그림이다. 이 그림에서 IP모형은 Table 3의 ϕ_{i2} 식에서 첫번째항만을 사용한 경우이고, IQ 모형은 네번째항만을 제외한 선형항과 2차항만으로 구성된 경우이다. IPC 모형은 첫번째항과 입방항인 네번째항만을 사용한 경우이다. 이 결과는 평균변형항의 2차항 모형은 2중 극대 현

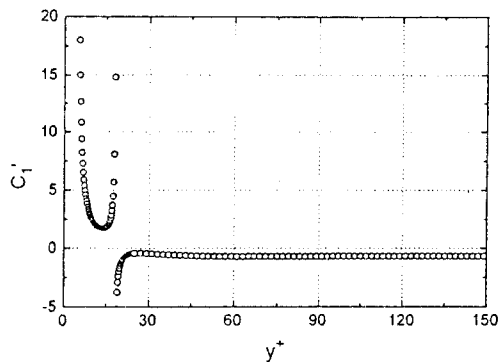


Fig. 4 Model coefficient C_i profiles taken from Shin and Choi.⁽¹¹⁾

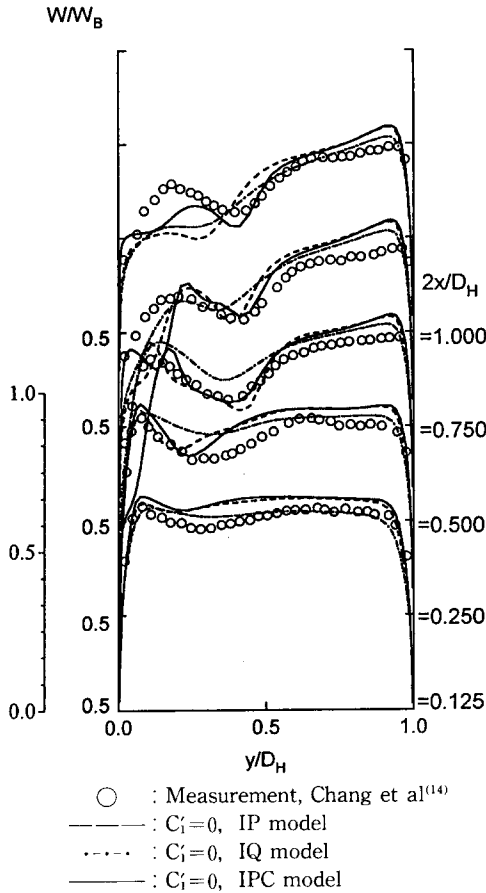


Fig. 5 Comparison of predicted and measured normalized W velocity profile at $\theta=135^\circ$

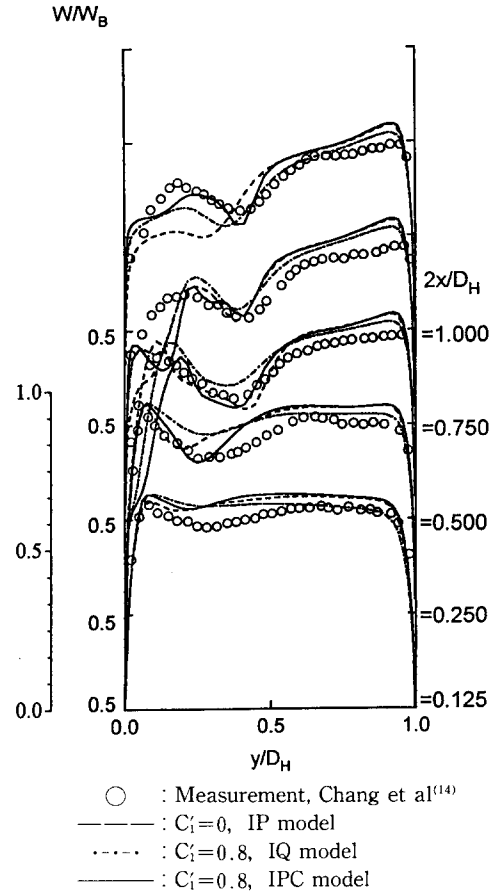


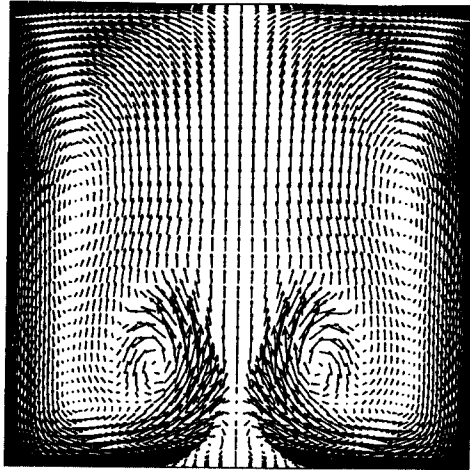
Fig. 6 Comparison of predicted and measured normalized W velocity profile at $\theta=135^\circ$

상의 발생을 억제한다는 것을 알 수 있다. IP 모형을 사용한 경우는 $2x/D_H=0.5, 0.75$ 에서 다른 모형보다 실험치에 가까운 2중 극대 속도분포를 보이거나 $2x/D_H$ 에서는 오히려 다른 모형보다 2중 극대 속도 현상이 감소되는 현상을 보인다. 반면 IPC 모형은 $2x/D_H=0.5, 0.75$ 에서는 IP 모형보다 약간 못하나 $2x/D_H$ 에서는 2중 극대현상을 뚜렷이 예측해 주는 것을 알 수 있다. 그러나 그 원인은 그 자체만으로 판명하기 어렵고 2차유동 속도의 벡터선도를 고찰해 봄으로써 판명될 것이다.

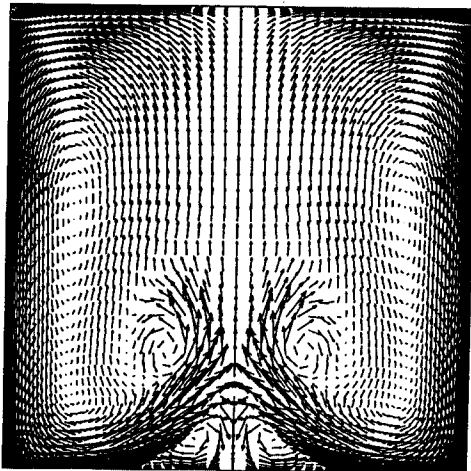
Fig. 6은 $\theta=135^\circ$ 에서 IPC 모형과 CQI 모형의 등방성 회귀항의 비선형 모형상수를 0.8로 한 경우의 주유동 속도분포이다. C_1 를 0.8로 함으로써 평균변형항에 입방항을 포함시킴으로써 인해 $2x/D_H=1.0$ 에서 2중 극대현상이 뚜렷이 예측되는 것을 보여주고 있으며 다른 부분에서도 유동 중심부

의 2중 극대현상을 실험값에 가깝게 예측하는 것을 알 수 있다. IPC 모형이 다른 모형보다 모든 $2x/D_H$ 위치에서 2중 극대 속도분포를 실험치에 가장 가깝게 예측하고 있으며, 특히 $2x/D_H=1.0$ 에서는 IPC 모형과 IP 모형의 예측치에 큰 차이가 있어서 입방항이 관로 중심부에서의 유동 특성에 큰 영향을 주었음을 알 수 있다. 위에서 살펴본 주유동 속도분포의 2중 극대현상은 관로 곡률에 의해 발생한 2차 유동의 형상 변화에 기인된 것인데 그 원인을 명확히 분석하려면 2차 유동의 벡터선도와 주유동 속도의 3차원 속도선도를 잘 고찰해 보아야 한다.

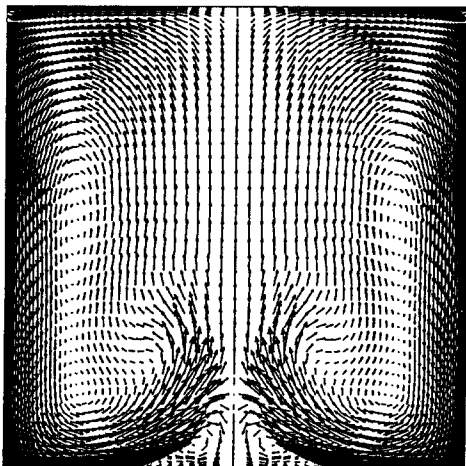
Fig. 7(a)는 $C_1=0$ 과 평균변형률 모형으로 IP 모형을 사용하여 예측한 $\theta=90^\circ$ 에서의 2차유동의 벡터선도이다. 강한 2차유동이 측면에 밀착하여 하강하여 내벽면을 따라서 대칭면을 향해 이동하다가 대칭면에서 충돌하여 반사되는 분류의 형상을 나타



(a) $C_1=0$, IP model



(b) $C_1=0.8$, IPC model



(c) $C_1=0.8$, CQI model

Fig. 7 Secondary flow vector diagram at $\theta=90^\circ$

낸다. 그에 따라 분류가 $2x/D_H$ 가 약 0.6되는 거리에서 윗방향으로 휘어져 돌아오면서 $2x/D_H=0.65$, $y/D_H=0.2$ 부근에 뚜렷한 와류의 눈을 형성함을 알 수 있다. 그러나 이 대칭형의 2차유동 분류가 대칭면까지 침투하여 충돌하지 못하고 대칭면에서 떨어진 거리에서 휘어지는 현상이 특이하다.

Fig. 7(b)는 등방성 회귀항의 비선형계수를 0.8로 하고 IP 평균변형률 모형에 입방항을 부가하여 해석한 경우에 대한 벡터선도이다. Fig. 7(a)와 비교하면 특이하게 차이가 나는 것은 대칭형 2차유동 분류가 대칭면까지 깊숙히 침투하여 충돌한 후 반사되어 나가는 것이다. 그에 따라 분류의 반사각이 작아지고 와류의 강도가 약해진 반면 내벽과 대칭면이 만나는 구석영역에 또 하나의 와류를 형성했음을 알 수 있다. 대칭면에서의 분류의 충돌은 입방항의 부가에 의해서 발생한 것이다. 그 영향을 주유동 속도분포를 도시한 Fig. 5에서 비교하면 IP 모형인 경우 $2x/D_H=1.0$ 에서 2중 극대 속도가 나타나지 않는 반면 IPC모형인 경우 2중 극대현상이 나타난 것은 2차유동 분류가 대칭면에서 충돌하여 주유동 속도의 증가를 유발시킨 것 때문으로 보여진다.

Fig. 7(c)는 C_1 을 0.8로 하고 평균변형률 모형으로는 IP 모형에 2차항과 입방항을 모두 포함시킨 경우에 대한 벡터선도이다. Fig. 7(a), Fig. 7(b)와 비교해보면 2차유동에 의한 분류의 대칭면으로의 침투는 Fig. 7(a)와 Fig. 7(b)의 중간정도이나 분류의 반향에 의해 뚜렷한 와류의 눈은 형성되지 않음을 알 수 있다. 결국 평균변형률 모형에서 2차항은 분류의 대칭면으로의 침투와 와류눈의 형성을 저해하는 방향으로 작용했다고 생각할 수 있다. 평균변형률 모형에서 입방항과 2차항이 물리적으로 어떤 과정을 통해서 분류의 대칭면으로의 침투와 와류눈 형성에 영향을 주는지를 알아보기 위해서 Fig. 8(a), (b), (c), (d)에 평균변형률 항에서 선형항과 비선형항의 크기를 ϕ_{11} 과 ϕ_{22} 에 대해서 도시해 보았다. 이 그림들의 비교에 의하면 입방항의 상대적 크기가 커지는 것은 벽면접부임을 알 수 있어서 결국 입방항이 2차 유동에 미치는 영향은 측면에 인접하여 하강하는 분류형 유동의 강도를 강하게 하여 결국 대칭면으로의 침투를 크게 한 것으로 판단되었다.

Fig. 9(a), (b), (c)는 Fig. 7(a), (b), (c)에 해당하는 주유동 속도분포의 3차원 선도이다. 두 그

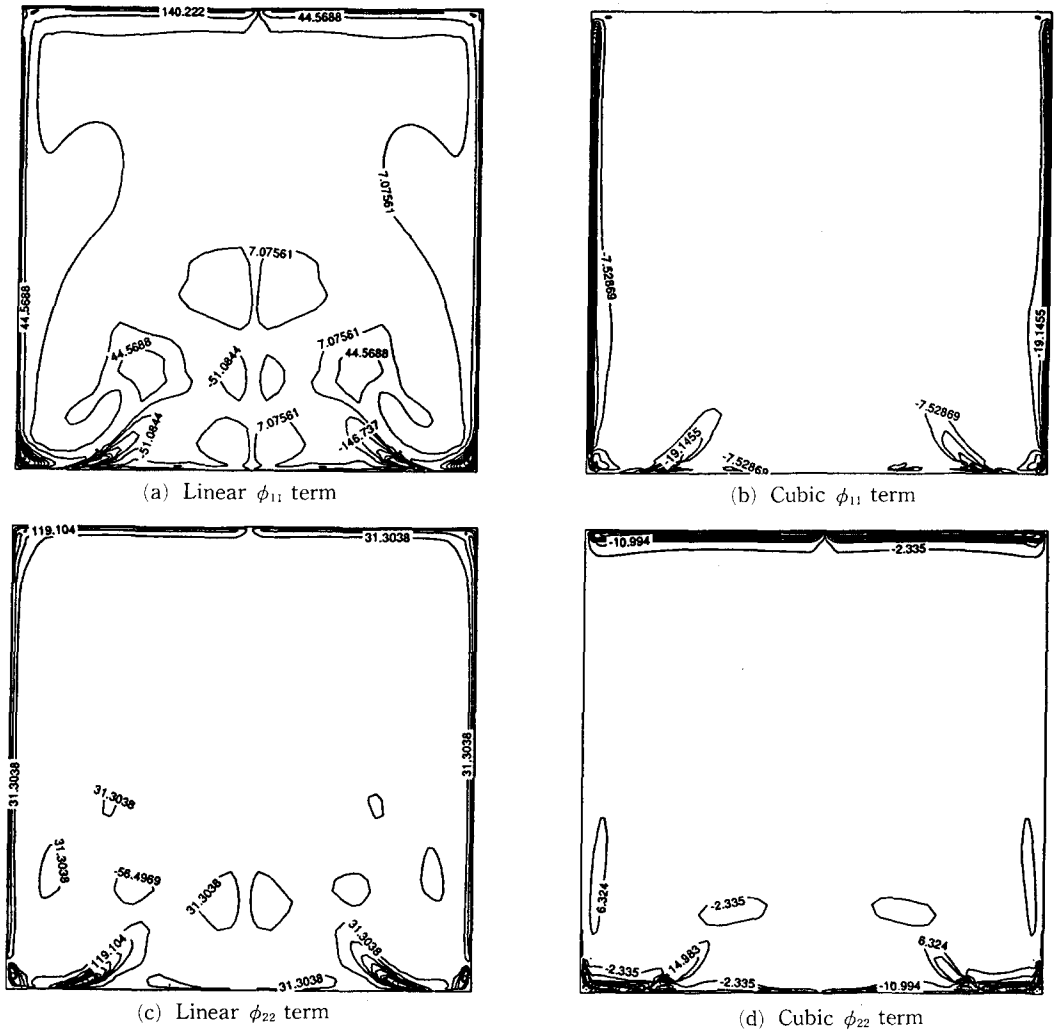


Fig. 8 Distribution of rapid pressure strain terms at $\theta=135^\circ$

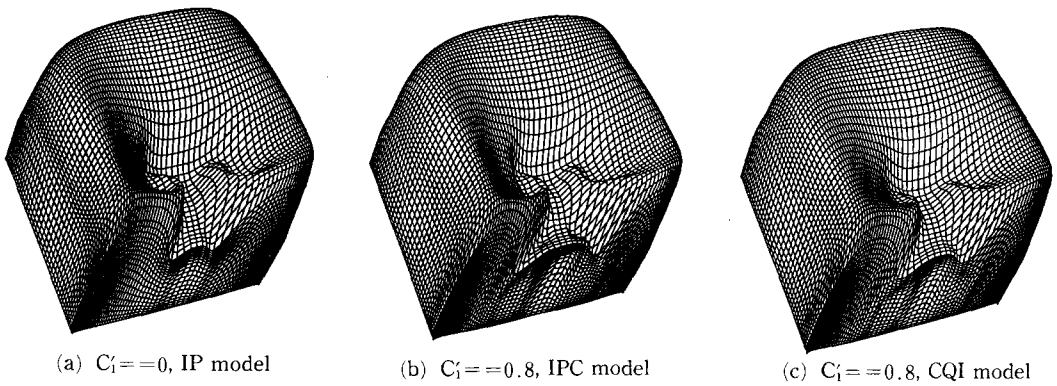
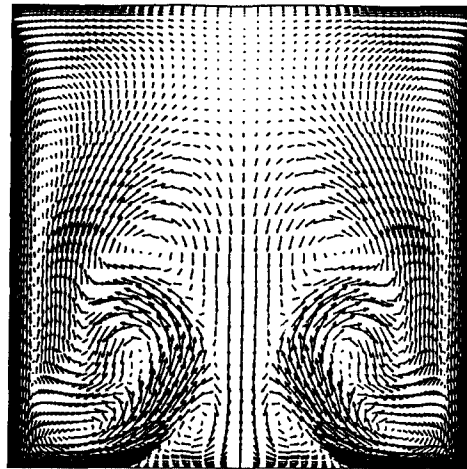


Fig. 9 Three dimensional diagram of W velocity profile at $\theta=90^\circ$

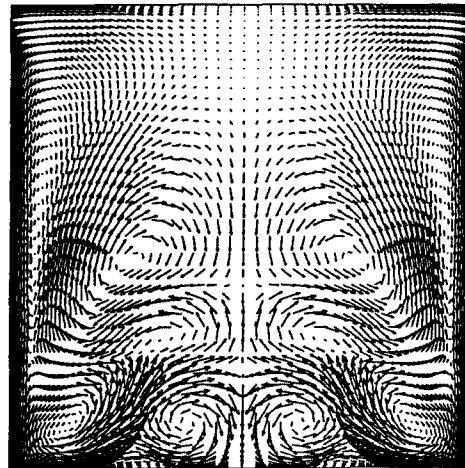
림의 비교로 알 수 있는 것은 2차유동이 밀집하여 흐르는 곳은 주유동 속도가 크고 와류에는 주유동 속도의 골이 형성됨을 알 수 있으며 2차 유동에 의한 원심력으로 유동이 벽쪽으로 치우쳐 흐름으로서 벽인접부의 주유동 속도가 증가되었고 내벽쪽 중심부분의 속도가 낮아졌음을 알 수 있다. Fig. 7(a), (b), (c) 선도에서 와류눈에서의 와류강도가 클수록 Fig. 9(a), (b), (c)에서 주유동 속도의 골이 깊어지는 것을 알 수 있다. 이는 와류강도가 클수록 와류에 의한 원심력이 커져 유동이 바깥쪽으로 이동하였기 때문이다.

Fig. 9(c)는 CQI 모형을 사용하여 예측한 $\theta=135^\circ$ 에서의 2차 유동 벡터선도이다. 측벽면을 타고 내려와 하벽면에 밀착하여 흐르던 2차유동이 내벽에서 박리되어 분류형태로 대칭면을 향해서 흐를 때 Fig. 9(a)의 IP 모형인 경우보다 내벽 쪽에 더 큰 와류를 형성하였으며 분류의 강도는 IP 모형의 것보다 약하고 대칭면으로부터의 반사작용으로 방향을 회전한 후 그 속도가 급격히 약화되어 Fig. 9(a)에서의 뚜렷이 나타난 와류눈의 생성이 보이지 않는다. 그에 따라 Fig. 9(a)의 경우보다 와류눈의 수가 1개 감소되었음을 알 수 있다. 이 결과로부터 평균변형률에서의 2차항은 2차유동의 강도를 약화시키고 2차유동이 균소와류로 나누어 지는 것을 억제하는 역할을 함으로써 결국 와류의 수를 감소시켰다고 할 수 있다. 이것은 주유동속도의 2중 극대 속도현상에서 속도골의 깊이를 적게하여 실험치에 맞지 않는 방향으로 2차유동의 형상을 변화시켰다. 그에 따라 평균변형률 모형에서 2차항은 난류모형의 정확성을 약화시키는 결과를 초래했다.

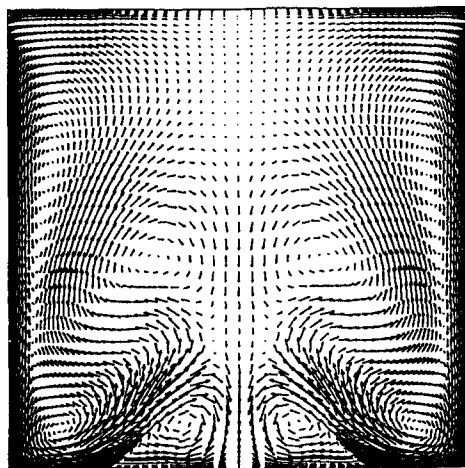
Fig. 10(a), (b), (c)는 $\theta=135^\circ$ 에서 IP 모형, IPC 모형, CQI 모형에 의해 예측한 2차유동의 벡터선도를 나타낸다. Fig. 7(a)와 Fig. 10(a)를 비교하면 측벽과 내벽면을 타고 흘러와 형성된 2차유동의 분류는 대칭면에서 더 먼 곳에서 반향되어 측벽 쪽으로 돌아 상승된다. 이때 2차유동의 굴곡은 더 심하여져 주와류는 주위에 1개의 와류가 더 생기고 하면에 2개의 와류가 생겨 측벽을 따라 생긴 긴 와류와 합쳐 5개의 와류가 형성되었다. 반면 주와류 눈에서의 와류강도는 Fig. 6에 비해서 약해졌다. 이것은 Fig. 4에 나타난 주유동 속도의 2중극대 현상에서의 속도골의 깊이가 얕아지는 원인이 된다. 뿐만아니라 Fig. 4의 $2x/D_H=1.0, y/D_H<4.0$ 에서 IP모형에 의한 W/W_b 의 예측결과가 실험결과보다



(a) $C_1=0$, IP model



(b) $C_1=0.8$, IPC model



(c) $C_1=0.8$, CQI model

Fig. 10 Secondary flow vector diagram at $\theta=135^\circ$.

매우 낮은 것을 보여주는데 이것은 2차유동 분류의 대칭면으로의 침투가 전혀 일어나지 않는데 기인함을 알 수 있다.

Fig. 10(b)는 $\theta=135^\circ$ 에서 IPC 모형을 사용했을 때 주유동 속도분포의 3차원 선도이다. 대칭면 주변에 2중 극대현상과 속도골의 발생을 잘 나타내고 있다. 그러나 IPC 모형에서는 대칭면과 내벽면 사이의 구석에 발생한 와류가 너무 커서 이 부분의 주유동 속도를 실험치보다 낮게 예측하고 있다. 이것은 결국 전체적으로 2차유동 강도가 실제보다 약간 약하게 예측되는데 기인한다고 판단된다. 2차유동 강도가 전체적으로 약간 상승되면 2차유동에 의해 발생하는 분류가 강해지면서 대칭면 쪽으로 향하는 속도가 좀 더 강해져 대칭면과 내측면 사이 구석의 와류가 증대되어 실험치에 더 접근하는 주유동 속도분포를 예측하였을 것으로 판단된다.

Fig. 10(a)와 Fig. 10(b)를 비교해 보면 IPC 모형을 사용한 경우 2차유동의 대칭면으로의 침투가 확실히 이루어졌으며 분류가 중심면에서 충돌후 다시 위아래로 나누어져 홀리 굴곡이 매우 심해지고 4개의 와류는 생성이 뚜렷이 보인다.

Fig. 10(b)의 벡터선도를 좀 더 자세히 고찰하기 위해서 전산해석의 단면의 격자수를 64×80 으로 증가시켜 계산한 결과는 Fig. 11에 나타나 있다. Fig. 10(b)에서는 나타나지 않는 새롭게 발생한 현상은 외측벽과 대칭면이 만나는 구석부분에 작은 와류가 1개 더 형성된 것이며 결국 와류의 수가 모두 6개

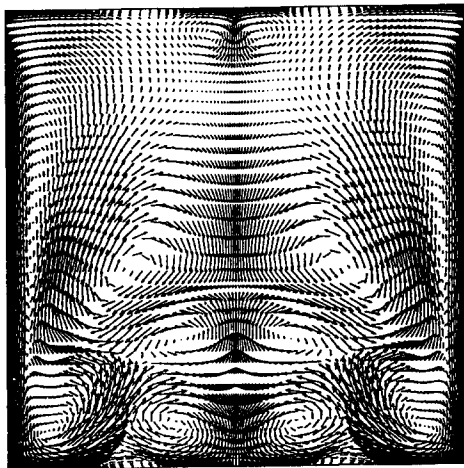


Fig. 11 Secondary flow vector diagram at $\theta=135^\circ$ for refined grid system

입을 나타내 주고 있다. 특히 흥미있는 현상은 대칭면을 따라서 속도변화를 살펴보면 $y/D_H=0.2$ 에서 대칭적으로 접근하는 2차유동의 분류가 충돌하여 위 아래로 나뉘어 흐르며 $y/D_H=0.4$ 부근에서 대칭면을 따라서 위에서 내려오는 유동과 아래서 올라오는 유동이 다시 부딪쳐 양쪽으로 퍼져 나가는 현상을 볼 수 있다. $y/D_H=0.2$ 에서의 2차유동의 충돌을 Fig. 5와 비교해 보면 극대속도점에 해당하고 $y/D_H=0.4$ 의 위치는 속도골인 극소속도점을 나타냄을 알 수 있다. 결국 IPC 모형이 대칭면 상에서 주유동 속도의 2중 극대 속도분포와 같은 속도의 골을 잘 예측한 것은 2차유동의 분류가 중심면까지 침투하여 강하게 충돌하여 상하로 나뉘어 다시 $y/D_H=0.4$ 의 위치에서 다시 충돌하여 나뉘는 현상을 잘 예측했다는 점이다. Fig. 8(a), Fig. 8(c)의 IP모형이나 CQI모형은 이러한 현상을 예측하지 못하고 2차유동이 대칭면에서 순전히 하강 유동으로만 예측하고 있어서 이 위치의 주유동 속도 분포를 부정확하게 했다고 할 수 있다. 결국 각 난류모형은 2차유동에 의한 분류의 대칭면으로의 침투성을 변화시킨다는 결론을 얻었다. 이것이 어떤 과정을 통해서 일어나는지에 대한 물리적 의미는 아직 명확히 밝혀지고 있지 않아서 이 분야에 대한 연구가 더욱 요구된다.

Fig. 12, Fig. 13는 $\theta=90^\circ$ 에서 레이놀즈응력 $\overline{w^2}$

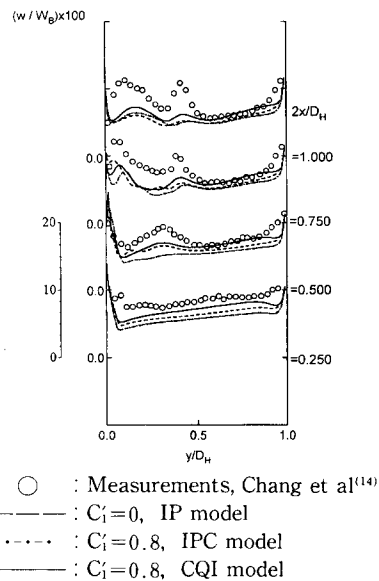


Fig. 12 Comparison of predicted and measured normalized Reynolds stress $\overline{w^2}$ at $\theta=90^\circ$

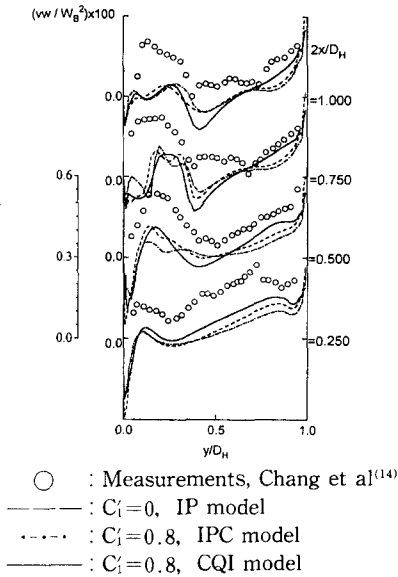


Fig. 13 Comparison of predicted and measured normalized Reynolds stress \overline{vw} at $\theta=90^\circ$

과 \overline{vw} 를 W_b^2 으로 무차원하여 나타낸 그림들이다. 앞에서 고찰한 3개의 난류모형에 대해서 비교해 본 결과 모두 CQI 모형이 다른 모형보다 실험치에 가장 접근하는 형상을 보여주었다. $\sqrt{w^2}/W_b^2 \times 100$ 선도의 $2x/D_H=1.0$ 에서 레이놀즈응력의 극대현상이 일어나는 것은 흥미로운 일이다. 해석결과는 실험과 같이 완전한 극대현상을 보이지 않고 약한 극대현상을 보인다. Fig. 7(b)의 주유동 속도 3차원 선도를 살펴보면 $\sqrt{w^2}/W_b^2 \times 100$ 의 극소점은 주유동 속도의 극소점과 일치하며 극대점은 주유동 속도의 속도구배가 최대인 점과 일치한다. 결국 레이놀즈응력의 극대현상은 2차유동이 대칭면에서 충돌하여 주유동 속도의 2중 극대현상을 일으킬 때 발생하는 큰 속도구배 때문에 발생하는 것으로 인식된다. CQI 모형이 레이놀즈응력 예측에서는 IPC 모형보다 우수하나 주유동 속도분포의 예측에서는 좋지 않은 결과를 나타내 주어서 이 두 모형에 대해서 좀 더 다른 유동조건에서의 비교 연구가 요구되고 있다.

앞에서 살펴본 바와 같이 정사각단면의 곡덕트유동에서 2차유동의 분류가 대칭면에서 반사되어 방향을 급변화하여 와류의 눈이 발생하고 그후 2차유동에 굴곡이 생겨나 여러 개의 군소와류로 나누어져 각 와류들은 각 위치의 주유동 속도의 변형률에 따라 신장(vortex stretching)과 수축(vortex con-

traction)을 받아 와류의 크기와 형상에 급격한 변화를 나타낸 것으로 나타났다. $\theta=180^\circ$ 에서 다시 직관으로 변하기 때문에 2차유동이 급감하면서 와류의 눈들도 사라지게 된다. 그러나 곡관이 계속되면 군소 와류가 어떠한 변화를 나타낼 것인지 흥미로운 일이며 완전확립된(fully developed) 2차유동 분포가 어느 곳에서 발생할 것인지 의문시 된다. 따라서 이에 대한 수치해석적, 실험적 연구가 더욱 요구된다.

4. 결론

본 연구에서는 정사각단면의 $\theta=180^\circ$ 곡덕트에서의 난류유동 해석에 4개의 저레이놀즈수 2차 모멘트 모형을 적용하여 각 모형의 적정성 여부를 비교하였고 난류모형의 변화가 2차유동의 변화과정과 주유동 속도분포에 미치는 영향을 알아보았으며 그 결과 다음과 같은 결론을 얻었다.

- (1) 곡관의 곡률 원심력에 의해 발생한 2차유동은 $\theta=90^\circ$ 부근에서 최대의 강도를 가지며 그후 와류가 불안정해져 $\theta=135^\circ$ 부근에서 4~6개의 군소 와류로 나누어 진다.
- (2) 와류의 눈에서 주유동 속도의 극소점이 나타난다.
- (3) 난류모형의 차이는 2차유동에 의해 발생한 분류형 유동이 대칭면에서 반사될 때 대칭면으로의 침투하는 정도에 큰 영향을 주며 이는 $\theta=90^\circ$ 부근에서 발생한 큰 와류가 군소 와류로 나뉘어질 때 군소 와류의 수와 형상에 큰 영향을 준다.
- (4) IPC 모형은 $\theta=135^\circ$ 에서 6개의 가장 많은 군소 와류를 발생시키고 있으며 주유동 속도분포의 예측에서도 가장 정확하다.
- (5) 레이놀즈응력 분포예측에서는 CQI 모형이 가장 우수한 것으로 나타났다.

후 기

본 연구는 1994년도 연암문화재단 해외 교수파견 계획과 1994, 1995년 G7 차세대 자동차 기술연구비 지원으로 이루어진 것이며, 이에 감사한다.

참고문헌

- (1) Launder, B. E. and Shima, N., 1989, "Second

- Moment Closure for the Near-Wall Sublayer : Development and Application," *AIAA Journal*, Vol. 27, pp. 1319~1325.
- (2) Shima, N., 1989, "A Reynolds-stress Model for Near Wall and Low Reynolds Number Regions," *ASME Journal of Fluid Engineering*, Vol. 110, pp. 38~44.
- (3) Launder, B. E. and Tselepidakis, D. P., 1991, "Directions in Second-Moment Modelling of Near-Wall Turbulence," *AIAA Paper 91-0219*, 29th Aerospace Science Meeting, Reno, Nevada.
- (4) Launder, B. E. and Tselepidakis, D. P., 1994, "Application of a New Second Moment Closure to Turbulent Channel Flow Rotating in Orthogonal Mode," *Int., J. Heat and Fluid Flow*, Vol. 15, No. 1, pp. 2~10.
- (5) Kim, J., Moin, P. and Moser, R. D., 1987, "Turbulence Statistics in Fully Developed Channel Flow at Low Reynolds Number," *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 177, pp. 133~186.
- (6) Mansour, N. N., Kim, J. and Moin, P., 1988, "Reynolds-Stress and Dissipation-Rate Budgets in a Turbulent Channel Flow," *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 192, pp. 15~44.
- (7) Lumley, J. L. 1978, "Computational Modelling of Turbulent Flows," *Advances in Applied Mechanics*, Vol. 18, pp. 123~176.
- (8) 김승기, 정명균, 1993, "저속등방부귀 난류모형의 개발," 대한기계학회 춘계학술대회 논문집 (II), pp. 317~320.
- (9) Speziale, C. G., Sarkar, S. and Gatski, T. B., 1994, "Modelling the Pressure-Strain Correlation of Turbulence : An Invariant Dynamical System Approach," *J. of Fluid Mechanics*, Vol. 227, pp. 245~272.
- (10) Shih, T. -H. and Lumley, J. L., 1986, "Influence of Timescale on Scalar Flux Relaxation : Modelling Sirivat and Warhaft's Homogeneous Passive Scalar Fluctuations," *J. of Fluid Mechanics*, Vol. 162, pp. 211~222.
- (11) 신중근, 최영돈, 1996, "DNS 자료에 의한 저레이놀즈수 2차 모멘트 난류모형의 개발," 대한기계학회논문집, 제20권, 제8호
- (12) Hallb ck, M., Groth, J. and Johansson, A. V., 1990, "An Algebraic Model for Nonisotropic Turbulent Dissipation Rate in Reynolds Stress Closures," *The Physics of Fluids A*, Vol. 2 pp. 1859~1866.
- (13) Choi, Y. D., Iacovides, H. and Launder, B. E., 1989, "Numerical Computation of Turbulent Flow in a Square-Sectioned 180 Deg. Bend," *ASME Journal of Fluid Engineering*, Vol. 111, pp. 59~68.
- (14) Chang, S. M., Humphrey, J. A. C and Modavi, A., 1983, "Turbulent Flow in a Strongly Curved U-Bend and Downstream Tangent of Square Cross Sections," *PCH Physico Chemical Hydrodynamics*, Vol. 4, pp. 243~269.
- (15) Choi, Y. D., Moon, C. and Yang, S. H., 1990, "Measurement of Turbulent Flow Characteristics of Square Duct with a 180 deg. Bend by Hot Wire Anemometer," *Proc. of the Int. Symposium on Engineering Held in Dubrovnik, Yugoslavia*, pp. 429~438.
- (16) Johason, R. W., 1984, "Turbulent Convecting Flow in a Square Duct with a 180o Bend ; an Experimental and Numerical Study," Ph. D. Thesis, Faculty of Technology, Universty of Manchester.
- (17) Van Driest, E. R., 1956 "On Turbulent Flow Near a Wall," *Journal of Aerospace Science*, Vol. 23, p. 1007.
- (18) Launder, B. E., 1989, "Second-Moment Closure : Present . . . and Future?," *Int. J. Heat and Fluid Flow*, Vol. 10, No. 4, pp. 282~299.
- (19) 신중근, 최영돈, 1996, "저레이놀즈수 $k-\epsilon$ 모형에서 DNS 자료에 의한 ϵ 방정식의 다중생성률 모형," 대한기계학회논문집, 제20권, 제1호
- (20) Nagano, Y. and Shimada, M., 1993, "Modelling the Dissipation Rate Equation for Wall Shear Flows," *Trans. of JSME*, Vol. 59, pp. 78~85.
- (21) Sarkar S. and Speziale C. G., 1990, "A Simple Nonlinear Model for the Return to Isotropy in Turbulence," *The Physics Fluids A*, Vol. 2, pp. 84~93.
- (22) Mellng, A. and Whitelaw, J. H., 1976, "Turbulence Flow in a Rectangular Duct," *J. of Fluid*

Mechanics, Vol. 78, p. 289

- (23) Tselepidakes, D., 1991, "Development and Application of a New Second-Moment Closure for Turbulent Flow Near Walls," Ph. D. Thesis, Faculty of Technology, University of Manchester.
- (24) Gosman, A. P. and Ideriah, F. J. K., 1976, "TEACH-2E: A General Computer Program for Two Dimensional Turbulent Recirculating Flows," Dept. Mech. Engineering, Imperial College, London.
- (25) Patankar, S. V. and Spalding, D. B., 1972, "A Calculation Procedure for Heat and Momentum Transfer in Three Dimensional Parabolic Flows," *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. 15, pp. 1787.
- (26) Pratap, V. S. and Spalding, D. B., 1975, "Numerical Computations of the Flow in Curved Ducts" *The Aeronautical Quarterly*, Vol. 26, pp. 219.
- (27) Pratap, V. S., 1975, "Flow and Heat Transfer in Curved Ducts", Ph. D. Thesis, Imperial College, University of London.
- (28) Kuo, H. M. and Pack, S. O., 1991, "Extension and Application of the Quicker Scheme to a Non-Uniform Rectangular Grid System," *Communications in Applied Numerical Methods*, Vol. 7, pp. 111~122.
- (29) Launder, B. E. and Samaraweera, D. S. A., 1979, "Application of a Second Moment Turbulence Closure to Heat and Mass Transfer in Thin Shear Flows-I, Two-Dimensional Transport," *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. 22, pp. 1631~1643.

부 록

정사각단면의 180° 곡덕트유동에서의
대수응력 방정식

직교원통좌표계로 레이놀즈응력 방정식들을 유도한 다음, 이미 모형화한 압력변형을 상관관계 모형과 소멸텐서 모형을 대입하여 얻어지는 대수응력 모형 방정식은 다음과 같다.

$$\overline{u^2} = \frac{k}{\epsilon} \left[\Psi_{12} \overline{uv} - \Psi_{13} \overline{uw} + \Psi_{22} \overline{v^2} + \Psi_{23} \overline{vw} \right]$$

$$\begin{aligned} & - \Psi_{33} \overline{w^2} \\ & + \phi_6 \epsilon + \frac{2}{3} P_k + \Phi_{11} \Big/ \left[\frac{P_k}{\epsilon} - 1 + \phi_4 \right. \\ & \left. + (2\phi_1 + \phi_3) \frac{k}{\epsilon} \frac{\partial U}{\partial x} \right] \end{aligned} \quad (A1)$$

$$\Psi_{12} = (2\phi_2 - \phi_3) \frac{\partial V}{\partial x} - (2\phi_1 + \phi_3) \frac{\partial U}{\partial x}$$

$$\Psi_{13} = (2\phi_1 + \phi_3) \frac{\partial U}{r \partial \theta} + \phi_3 \frac{\partial W}{\partial r}$$

$$\Psi_{22} = (2\phi_2 - \phi_3) \frac{\partial V}{\partial r} + \phi_5 \frac{\epsilon}{k}$$

$$\Psi_{23} = (2\phi_2 - \phi_3) \left(\frac{\partial V}{r \partial \theta} \right)_c - \theta_3 \frac{\partial W}{\partial r}$$

$$\Psi_{33} = \phi_3 \left(\frac{\partial W}{r \partial \theta} \right)_c$$

$$\Phi_{11} = 2A_{11} P_k - B_{11} - C_{11}$$

$$\phi_1 = 1 - C_2 + 2C_2 C_2^w f_{13}$$

$$\phi_2 = 2C_2 C_2^w f_{24}$$

$$\phi_3 = \frac{2}{3} (C_2 - 1 - 2C_2 C_2^w f_{13} + C_2 C_2^w f_{24})$$

$$\phi_4 = C_1 + E_{11} f_\epsilon + 2C_1^w f_{13}$$

$$\phi_5 = C_1^w f_{24}$$

$$\phi_6 = \frac{2}{3} [C_1 + (f_\epsilon - 1) e_{11} - C_1 C_1 X_{11}]$$

$$A_{11} = C_{A1} [a_{11} - C_2^w (2a_{11} f_{13} - a_{22} f_{24})]$$

$$B_{11} = C_{A2} [Y_{11} - C_2^w (2Y_{11} f_{13} - Y_{22} f_{24})]$$

$$C_{11} = r' [Q_{11} - C_2^w (2Q_{11} f_{13} - Q_{22} f_{24})]$$

$$\begin{aligned} \overline{uv} = & - \frac{k}{\epsilon} \left\{ \phi_1 \left[\overline{u^2} \frac{\partial V}{\partial x} + \overline{v^2} \frac{\partial U}{\partial r} + \overline{vw} \frac{\partial U}{r \partial \theta} \right. \right. \\ & \left. \left. + \overline{uw} \left(\frac{\partial V}{r \partial \theta} \right)_c \right] + \phi_6 \epsilon + \Phi_{12} \right\} \Big/ \left[\frac{P_k}{\epsilon} - 1 + \phi_2 \right. \\ & \left. + \frac{k}{\epsilon} + \frac{k}{\epsilon} \phi_1 \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial r} \right) \right] \end{aligned} \quad (A2)$$

$$\Phi_{12} = A_{12} P_k - B_{12} - C_{12}$$

$$\phi_1 = 1 - C_2 + \frac{3}{2} C_2 C_2^w f_0$$

$$\phi_2 = C_1 + E_{12} f_\epsilon + \frac{3}{2} C_1^w f_0$$

$$\phi_6 = (f_\epsilon - 1) e_{12} - C_1 C_1 X_{12}$$

$$A_{12} = C_{A1}' a_{12} \left(1 - \frac{3}{2} C_2^w f_0 \right)$$

$$B_{12} = C_{A1}' Y_{12} \left(1 - \frac{3}{2} C_2^w f_0 \right)$$

$$C_{12} = r' Q_{12} \left(1 - \frac{3}{2} C_2^w f_0 \right)$$

$$\overline{uw} = - \frac{k}{\epsilon} \left\{ \phi_1 \left[\overline{u^2} \frac{\partial W}{\partial x} + \overline{uw} \frac{\partial W}{\partial r} + \overline{vw} \frac{\partial U}{\partial r} + \overline{w^2} \frac{\partial V}{r \partial \theta} \right] \right.$$

$$+ \phi_6 \varepsilon + \Phi_{13} \Big/ \left[\frac{P_k}{\varepsilon} - 1 + \phi_2 + \frac{k}{\varepsilon} \phi_1 \frac{\partial V}{\partial r} \right] \quad (\text{A3})$$

$$\Phi_{13} = 2A_{13}P_k - B_{13} - C_{13}$$

$$\phi_1 = 1 - C_2 + \frac{3}{2}C_2C_2^w f_{13}$$

$$\phi_2 = C_1 + E_{13}f_\varepsilon + \frac{3}{2}C_1^w f_{13}$$

$$\phi_6 = (f_\varepsilon - 1)e_{12} - C_1 C_1' X_{13}$$

$$A_{13} = C_{A1}' a_{13} \left(1 - \frac{3}{2}C_2^w f_{13} \right)$$

$$B_{13} = C_{A1}' Y_{13} \left(1 - \frac{3}{2}C_2^w f_{13} \right)$$

$$C_{13} = r' Q_{12} \left(1 - \frac{3}{2}C_2^w f_{13} \right)$$

$$\overline{v^2} = \frac{k}{\varepsilon} \left[\Psi_{11} \overline{u^2} + \Psi_{12} \overline{uw} + \Psi_{13} \overline{vw} - \Psi_{33} \overline{w^2} + \phi_6 \varepsilon + \frac{2}{3}P_k + \Phi_{22} \right] \Big/ \left[\frac{P_k}{\varepsilon} - 1 + \phi_4 + (2\phi_1 + \phi_3) \frac{k}{\varepsilon} \frac{\partial U}{\partial r} \right] \quad (\text{A4})$$

$$\Psi_{11} = (2\phi_2 - \phi_3) \frac{\partial U}{\partial x} + \phi_5 \frac{\varepsilon}{k}$$

$$\Psi_{12} = (2\phi_2 - \phi_3) \frac{\partial U}{\partial r} - (2\phi_1 + \phi_3) \frac{\partial W}{\partial x}$$

$$\Psi_{13} = (2\phi_2 - \phi_3) \frac{\partial U}{r \partial \theta} - \phi_3 \frac{\partial W}{\partial r}$$

$$\Psi_{23} = (2\phi_1 + \phi_3) \left(\frac{\partial V}{r \partial \theta} \right)_c + \phi_3 \frac{\partial W}{\partial r}$$

$$\Psi_{33} = \phi_3 \left(\frac{\partial W}{r \partial \theta} \right)_c$$

$$\Phi_{22} = 2A_{22}P_k - B_{22} - C_{22}$$

$$\phi_1 = 1 - C_2 + 2C_2C_2^w f_{24}$$

$$\phi_2 = C_2C_2^w f_{13}$$

$$\phi_3 = \frac{2}{3}(C_2 - 1 - 2C_2C_2^w f_{24} + C_2C_2^w f_{24})$$

$$\phi_4 = C_1 + E_{22}f_\varepsilon + 2C_1^w f_{24}$$

$$\phi_5 = C_1^w f_{13}$$

$$\phi_6 = \frac{2}{3}[C_1 + (f_\varepsilon - 1)e_{22} - C_1 C_1' X_{22}]$$

$$A_{22} = C_{A1}[a_{22} + C_2^w(a_{11}f_{13} - 2a_{22}f_{24})]$$

$$B_{22} = C_{A2}[Y_{22} + C_2^w(Y_{11}f_{13} - 2Y_{22}f_{24})]$$

$$C_{22} = r'[Q_{22} + C_2^w(Q_{11}f_{13} - 2Q_{22}f_{24})]$$

$$\overline{uw} = -\frac{k}{\varepsilon} \left\{ \phi_1 \left[\overline{v^2} \frac{\partial W}{\partial r} + \overline{uw} \frac{\partial W}{\partial x} + \overline{uw} \frac{\partial V}{\partial x} + \overline{w^2} \left(\frac{\partial V}{r \partial \theta} \right)_c \right] + \phi_6 \varepsilon + \Phi_{23} \right\} \Big/ \left[\frac{P_k}{\varepsilon} - 1 + \phi_2 + \frac{k}{\varepsilon} + \frac{k}{\varepsilon} \phi_1 \frac{\partial U}{\partial x} \right] \quad (\text{A5})$$

$$\Phi_{23} = 2A_{23}P_k - B_{23} - C_{23}$$

$$\phi_1 = 1 - C_2 + \frac{3}{2}C_2C_2^w f_{24}$$

$$\phi_2 = C_1 + E_{23}f_\varepsilon + \frac{3}{2}C_1^w f_{24}$$

$$\phi_6 = (f_\varepsilon - 1)e_{23} - C_1 C_1' X_{23}$$

$$A_{23} = C_{A1}' a_{23} \left(1 - \frac{3}{2}C_2^w f_{24} \right)$$

$$B_{23} = C_{A1}' Y_{23} \left(1 - \frac{3}{2}C_2^w f_{24} \right)$$

$$C_{23} = r' Q_{23} \left(1 - \frac{3}{2}C_2^w f_{24} \right)$$

$$\overline{w^2} = \frac{k}{\varepsilon} \left[\Psi_{11} \overline{u^2} + \Psi_{12} \overline{uw} + \Psi_{13} \overline{vw} + \Psi_{22} \overline{v^2} + \Psi_{33} \overline{vw} + \phi_6 \varepsilon + \frac{2}{3}P_k + \Phi_{33} \right] \Big/ \left[\frac{P_k}{\varepsilon} - 1 + C_1 + E_{33}f_\varepsilon (2\phi_1 + \phi_3) \left(\frac{\partial W}{r \partial \theta} \right)_c \right] \quad (\text{A6})$$

$$\Psi_{11} = (2\phi_2 - \phi_3) \frac{\partial U}{\partial x} + \phi_5 \frac{\varepsilon}{k}$$

$$\Psi_{12} = (2\phi_2 - \phi_3) \frac{\partial U}{\partial r} + (2\phi_4 - \phi_3) \frac{\partial V}{\partial x}$$

$$\Psi_{13} = (2\phi_2 - \phi_3) \frac{\partial U}{r \partial \theta} - (2\phi_1 + \phi_3) \frac{\partial W}{\partial x}$$

$$\Psi_{22} = (2\phi_4 - \phi_3) \frac{\partial V}{\partial r} + \phi_7 \frac{\varepsilon}{k}$$

$$\Psi_{23} = (2\phi_4 - \phi_3) \left(\frac{\partial V}{r \partial \theta} \right)_c - (2\phi_1 + \phi_3) \frac{\partial W}{\partial r}$$

$$\Phi_{33} = 2A_{33}P_k - B_{33} - C_{33}$$

$$\phi_1 = 1 - C_2$$

$$\phi_2 = C_2C_2^w f_{13}$$

$$\phi_3 = \frac{2}{3}(C_2 - 1 + C_2C_2^w f_0)$$

$$\phi_4 = C_2C_2^w f_{24}$$

$$\phi_5 = C_1^w f_{13}$$

$$\phi_6 = \frac{2}{3}[C_1 + (f_\varepsilon - 1)e_{33} - C_1 C_1' X_{33}]$$

$$\phi_7 = C_1^w f_{24}$$

$$A_{33} = C_{A1}[a_{33} + C_2^w(a_{11}f_{13} + a_{22}f_{24})]$$

$$B_{33} = C_{A2}[Y_{33} + C_2^w(Y_{11}f_{13} + Y_{22}f_{24})]$$

$$C_{33} = r'[Q_{33} + C_2^w(Q_{11}f_{13} + Q_{22}f_{24})]$$

식 (A1) ~ (A6)에서

$$\left(\frac{\partial W}{r \partial \theta} \right)_c = \frac{\partial W}{r \partial \theta} + \frac{V}{r} \quad (\text{A7})$$

$$\left(\frac{\partial V}{r \partial \theta} \right)_c = \frac{\partial V}{r \partial \theta} - \frac{W}{r} \quad (\text{A8})$$

이고, f_{13} , f_{24} 그리고 f_0 는 Fig. A.1에서 보는 바와

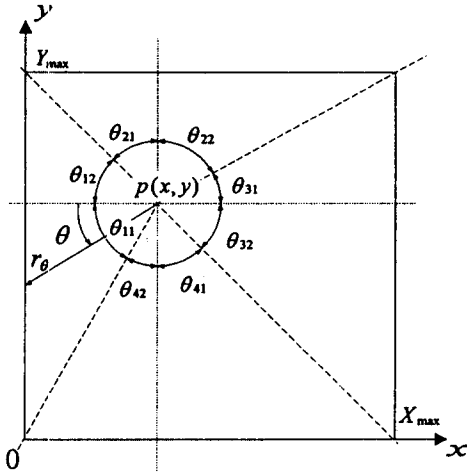


Fig. A1 Schematic showing a point in the cross section of a square duct

같이 정사각단면의 유동장내에 있는 한 점 P에 대해 각 벽면이 미치는 영향을 나타내기 위해서 Table 4에 제시되어 있는 식

$$f\left(\frac{l}{n_k r_k}\right) = \frac{k^{1.5}}{2 C_t \epsilon x_n} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{47.4}{R_t}}\right) \quad (A9)$$

에서 $1/x_n$ 을 Launder와 Samaraweer⁽²⁹⁾의 제안을 따라 $\frac{1}{2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} r(\theta) d\theta$ 로 치환하면 각 벽면에 대해

$$\begin{aligned} f &= \frac{\sin \theta_{12} + \sin \theta_{11}}{2} \min\left[\frac{l_D}{x}, 1\right] \\ f_2 &= \frac{\sin \theta_{22} + \sin \theta_{21}}{2} \min\left[\frac{l_D}{(Y_{\max} - y)}, 1\right] \\ f_3 &= \frac{\sin \theta_{32} + \sin \theta_{31}}{2} \min\left[\frac{l_D}{(Y_{\max} - x)}, 1\right] \\ f_4 &= \frac{\sin \theta_{42} + \sin \theta_{41}}{2} \min\left[\frac{l_D}{y}, 1\right] \end{aligned} \quad (A10)$$

로 유도된다. 여기서

$$l_D = \frac{k^{1.5}}{2 C_t \epsilon} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{47.4}{R_t}}\right) \quad (A11)$$

이다. 따라서

$$\begin{aligned} f_{13} &= f_1 + f_3 \\ f_{24} &= f_2 + f_4 \\ f_0 &= f_1 + f_2 + f_3 + f_4 \end{aligned} \quad (A12)$$

로 정의된다. 한편, E_{11} , E_{22} , E_{33} , E_{12} , E_{13} , E_{23} 는

$$E_{11} = \frac{1 + \frac{v^2}{u^2}}{1 + 1.5 \frac{v^2}{k}} \quad (A13)$$

$$E_{22} = \frac{4}{1 + 1.5 \frac{v^2}{k}} \quad (A14)$$

$$E_{33} = \frac{1 + \frac{v^2}{w^2}}{1 + 1.5 \frac{v^2}{k}} \quad (A15)$$

$$E_{12} = \frac{2}{1 + 1.5 \frac{v^2}{k}} \quad (A16)$$

$$E_{13} = \frac{1}{1 + 1.5 \frac{v^2}{k}} \quad (A17)$$

$$E_{23} = \frac{2}{1 + 1.5 \frac{v^2}{k}} \quad (A18)$$

이다. 또한, $C_{A1} = 1/2$, $C_{A2} = 1/3$ 이고, $r' = r/0.6$ 이며,

$$X_{ij} = a_{ik} a_{kj} - \frac{1}{3} A_2 \delta_{ij} \quad (A19)$$

$$e_{ij} = \left[1 + \frac{3}{3} \left(\frac{A_2}{2} - \frac{2}{3}\right)\right] a_{ij} - \frac{3}{4} X_{ij} \quad (A20)$$

를 나타낸다.