

〈논 문〉

DNS 자료에 의한 저레이놀즈수 2차 모멘트 난류모형의 개발

신종근* · 최영돈**
(1995년 8월 17일 접수)

Development of Low-Reynolds-Number Second Moment Turbulence Closure by DNS Data

J. K. Shin and Y. D. Choi

Key Words : Low-Reynolds-Number (저레이놀즈수), Flatness Parameter (편평계수), Reynolds Stress (레이놀즈응력), Pressure-Strain Correlation (압력-변형 상관관계), Two Component Turbulent Limit (2-성분 난류극한)

Abstract

A low-Reynolds-number second moment turbulence closure was developed with the aid of DNS data. Model coefficients of nonlinear return-to-isotropy term were derived by use of Cayley-Hamilton theorem and two component turbulence limit condition as the functions of invariances of anisotropy and turbulent Reynolds number. Launder and Tselepidakis' cubic mean pressure-strain model was modified to fit the predicted pressure-strain components to the DNS data. Two component turbulence limit condition was the precondition to be satisfied in developing the second moment turbulence closure for the realizable Reynolds stress prediction. But the satisfactions of Reynolds stress level and pressure-strain level of each component were compromised because the satisfaction of both levels was impossible.

기 호 설 명	
A	레이놀즈응력의 불변항, 편평계수 ($\equiv 1 - 9(A_2 - A_3)/8$)
A_2	레이놀즈응력의 2차 불변항 ($\equiv a_{ij}a_{ji}$)
A_3	레이놀즈응력의 3차 불변항 ($\equiv a_{ij}a_{jk}a_{ki}$)
a_{ij}	레이놀즈응력의 비등방성 텐서 ($\equiv \overline{u_i u_j} / k - 2\delta_{ij}/3$)
C_1, C_2	모형상수
C'_1	모형상수
C_1'', C_2''	모형상수
$C_{\epsilon 3}, C'_{\epsilon 3}$	모형상수
C_k	모형상수
C_s	모형상수
C_{ij}	대류텐서
c_l	모형상수
d_{ij}	확산텐서
d_{ij}^p	압력확산텐서
d_{ij}^t	난류확산텐서
d_{ij}^v	점성확산텐서
e_{ij}	비등방성 소멸률 텐서
f_s, f_c	천이함수
H	평판의 넓이

*회원, 고려대학교 대학원 기계공학과

**회원, 고려대학교 기계공학과

k	: 난류운동에너지
k^*	: 무차원 난류운동에너지 ($\equiv k/u_i^2$)
l, l_D	: 난류 길이척도
n	: 벽에 수직인 단위벡터
P_k	: 난류운동에너지 생성률
P_k^*	: 무차원 난류에너지 생성률
$P_\epsilon^1, P_\epsilon^2, P_\epsilon^3, P_\epsilon^4$: 난류운동에너지 소멸률 방정식의 생성률
P_{ij}	: 레이놀즈응력 생성률 텐서
r	: ϕ_{ij2} 모형의 3차항 계수
Re	: 평균속도에 의한 레이놀즈수 ($\equiv UH/\nu$)
Re_τ	: 벽마찰 속도에 의한 레이놀즈수 ($\equiv u_\tau H/(2\nu)$)
R_i	: 난류레이놀즈수 ($\equiv k^2/(\nu\epsilon)$)
T_k, T_ϵ	: 난류수송률
U	: x 방향의 국부 평균속도
u	: x 방향의 요동속도
u_i, u_2	: x, y 방향 요동속도
u_i	: i 방향 요동속도
$\overline{uv^+}$: 무차원 레이놀즈응력 ($\equiv \overline{uv}/u_i^2$)
$\overline{u_i u_j}$: 레이놀즈응력
u_τ	: 벽마찰속도 ($\equiv \sqrt{\tau_w/\rho}$)
V	: y 방향 국부 평균속도
v	: y 방향 요동속도
x_i	: 직교좌표
y^+, Y^+	: 벽면으로부터 무차원 거리 ($\equiv yu_\tau/\nu$)
y, Y	: 벽에 수직인 방향좌표

그리스문자

α	: 모형상수
α_1, α_2	: 모형상수
β	: 모형상수
γ	: 모형상수
δ_{ij}	: Kronecker delta
ϵ	: 난류운동에너지 소멸률
$\tilde{\epsilon}$: 등방성 난류운동에너지 소멸률
ϵ_{ij}	: 레이놀즈응력의 소멸텐서
ϵ_{ij}^*	: 벽면 저층에서 레이놀즈응력의 소멸 텐서
ϵ_w	: 벽면에서의 ϵ 값
ϵ^+	: 무차원 난류운동에너지 소멸률 ($\equiv \nu\epsilon/u_i^2$)

η	: 모형상수
κ	: von Karman의 상수
μ	: 점성계수
ν	: 동점성계수
Π_k, Π_ϵ	: 압력확산율
ρ	: 유체의 밀도
Γ	: ϵ 의 소멸률
ϕ_{ij}	: 압력변형률 텐서
ϕ_{ij1}	: 저속 등방성회귀 성분
ϕ_{ij2}	: 고속 평균변형 성분
ϕ_{ij1}^w	: ϕ_{ij1} 의 벽 반사항
ϕ_{ij2}^w	: ϕ_{ij2} 의 벽 반사항

1. 서 론

전산유체역학의 실용화가 확대됨에 따라 복잡한 3차원 난류유동의 해석에서 해의 정확성과 일반성을 보장해 줄 수 있는 난류모형의 개발이 요구되고 있다. 과거에는 실제 유동의 해석에서 전산비용과 전산시간의 감축을 위해서 $k-\epsilon$ 모형과 벽함수법을 널리 사용해 왔으나 전산기 성능의 지속적인 발달에 따라 복잡한 난류유동을 좀 더 정확히 해석해 줄 수 있는 2차 모멘트 난류모형의 사용이 더 각광을 받게 되었다. 뿐만 아니라 난류유동의 해석에서 벽인접부의 복잡한 난류거동을 정확히 묘사하는 것이 해의 정확성에 가장 큰 영향을 주는 것임이 밝혀짐에 따라 벽부근을 미세격자로 나누고 저 레이놀즈수 2차 모멘트 난류모형을 적용하는 연구가 활발히 진행되어 왔다.⁽¹⁻⁴⁾

벽인접부는 점성효과와 벽인접효과가 난류특성에 함께 영향을 주는 구역이다. 벽에 접근함에 따라 점성효과는 점차 증대하여 모든 난류 수송현상에 영향을 주게 되고 벽은 난류성분을 선택적으로 감쇄시켜 난류구조를 편평화시키고 비등방성을 크게 하는 벽인접효과가 나타난다. 벽은 압력의 요동을 반사시켜 난류요동의 재분배에 큰 영향을 주기도 한다. 그러나 점성효과와 벽인접효과는 엄연히 다른 현상이기 때문에 하나의 변수로써 나타내기 어렵다. 2 방정식 모형은 구조적으로 이 두 현상을 분리해서 고려하기 어려운 반면 2차 모멘트 모형은 이 두 현상을 분리하여 고려하기 쉽다.

벽인접부는 난류의 비등방성이 가장 큰 구역이며 벽에 접근함에 따라 벽에 수직인 난류성분이 더 급

속히 감소되어 난류구조가 편평화되어 2차원 난류 구조로 변한다. 이 난류구조의 특성은 편평계수 (flatness parameter, A)로 나타내지며 벽에서 A 는 0이고 등방성난류에서는 1이 된다. 벽에서 난류가 2차원 난류가 되는 2-성분극한조건(two component limit condition)은 2차 모멘트 난류모형의 개발에서 만족시켜야 할 가장 중요한 조건으로 이 조건을 만족시키지 않으면 난류의 실현가능성(realizability)조건이 만족되지 않아서 음의 레이놀즈 수응력을 발생시키게 된다. 벽인접부의 점성효과는 난류레이놀즈수 $R_i(\equiv k^2/(\nu\epsilon))$ 의 크기에 의해서 잘 나타내진다. 그러나 R_i 는 난류의 비등방성과 2-성분극한조건을 잘 묘사할 수 없는 변수이기 때문에 난류모형계수 관계식을 만들 때 R_i 를 과다 사용하는 것을 자제해야 하며 레이놀즈응력의 비등방성 텐서의 불변항들인 A , $A_2(\equiv a_{mn}a_{nm})$, $A_3(\equiv a_{mk}a_{kn}a_{nm})$ 를 함께 사용하는 것이 바람직하다.⁽⁵⁾

이론적인 배경을 갖는 저레이놀즈수 2차 모멘트 난류모형에 대한 연구는 Shih와 Lumley⁽⁶⁾에 의해서 처음으로 제기되었다. 그들은 2차 모멘트 난류모형은 실현가능성조건⁽⁷⁾을 만족시켜야 한다고 하였으며, 실현가능성조건을 만족시키는 압력-변형률의 저속항 모형을 제안함으로써 벽인접부에서도 사용가능하게 하였다. 그러나 그들은 벽인접부에서는 벽함수를 사용하였고, 단순한 난류경계층 유동에서만 그 모형을 시험하였다. Shih와 Mansour⁽⁸⁾도 실현가능성조건을 만족시키는 2차 모멘트 모형을 제안하였다. 그러나 그들은 난류모형계수들을 벽차찰 속도, 경계층 두께, 편평계수 그리고 난류레이놀즈수 등의 많은 매개변수들을 사용한 복잡한 관계식으로 나타내었기 때문에 실제 유동해석에서 실용성이 떨어지고 있다.

Launder와 Shima⁽⁹⁾는 편평계수 A 와 난류레이놀즈수 R_i 를 사용하여 Gibson과 Launder⁽¹⁰⁾의 2차 모멘트 모형을 저레이놀즈수 구역까지 확장하였다. So 등⁽¹¹⁾은 완전발달된 평판유동에서 현존하는 저레이놀즈수 2차 모멘트 모형들을 DNS자료와 비교하였다. 그들은 Launder와 Shima⁽⁹⁾모형과 Lai와 So⁽¹²⁾모형이 가장 우수하다고 하였으나 제시된 어느 모형도 각 레이놀즈수 응력들의 배분항(budget)들과 난류운동에너지 소멸률 분포 등을 정확히 예측하지 못하였다.

저레이놀즈수 2차 모멘트 난류모형 개발에서 가장 중요하게 고려할 사항은 다음과 같다.

- (1) 2-성분 극한조건과 실현가능성 조건
- (2) 압력-변형률 성분 분포의 정확한 예측
- (3) 레이놀즈응력 성분 분포의 정확한 예측

이 조건들을 만족시키는 일반성 있는 난류모형을 개발하기 위해서는 벽인접부에서 레이놀즈응력과 압력-변형률 성분에 관한 정확한 실험자료가 있어야 한다. 그러나 현재 압력-변형률 성분은 실험적으로 측정할 수 없으며, 레이놀즈응력도 벽인접부에서는 정확한 측정이 어렵다. 따라서 이러한 자료들의 부족은 그동안 저레이놀즈수 2차 모멘트 난류모형 개발연구에 가장 큰 장애요소로 되어 왔었다. 그러나 최근 직접수치모사(Direct Numerical Simulation; DNS)에 의한 유동해석으로써 벽인접부의 압력-변형률 성분과 레이놀즈응력성분의 자료가 발표됨에 따라^(13, 14) 저레이놀즈수 난류모형 개발이 다시 활기를 띠게 되었다.

최근의 저레이놀즈수 2차 모멘트 난류모형에 관한 연구는 주로 비선형 압력-변형률 관계식을 적용하는데 관한 연구이다. Lumley⁽⁷⁾는 압력-변형률항의 저속항(slow term)에 대한 비선형 모형을 제안하였고, Sarkar와 Speziale⁽¹⁵⁾는 비선형항의 모형 상수를 결정하기 위한 이론을 제시하였다. 고속항(rapid term)에 대한 연구로는 Speziale, Gatski와 Sarkar,⁽¹⁶⁾ Shih와 Lumley,⁽¹⁷⁾ Launder와 Tselepidakis⁽¹⁸⁾ 등이 비선형 모형의 도입에 관한 연구를 하였다.

본 연구에서는 압력-변형률의 저속항에 대한 모형계수 관계식을 이론적으로 유도하는 연구를 수행하여 그 이론적 근거에 바탕하여 실제유동해석에서 사용할 수 있는 모형계수식을 제안하였다. 뿐만 아니라 Launder와 Tselepidakis⁽¹⁸⁾가 제안한 입방형 고속항 모형의 모형계수를 DNS자료를 이용하여 최적화하려는 연구를 수행하였고, Hallböck 등⁽¹⁹⁾의 레이놀즈응력의 비등방성 소멸률 이론을 이용하여 벽인접부에 적용할 수 있는 저레이놀즈수 레이놀즈응력의 소멸률 모형을 제안하였다.

2. 저레이놀즈수 2차 모멘트 난류 모형의 개발

2.1 레이놀즈응력 방정식

비압축성 유동에서 $\overline{u_i u_j}$ 의 수송방정식은 다음과

같이 나타내진다.

$$\begin{aligned} \frac{D\overline{u_i u_j}}{Dt} = & - \left\{ \overline{u_i u_k} \frac{\partial U_j}{\partial x_k} + \overline{u_j u_k} \frac{\partial U_i}{\partial x_k} \right\} + \frac{d_{ij}^v}{\partial x_k} \left\{ \nu \frac{\partial \overline{u_i u_j}}{\partial x_k} \right\} - \frac{d_{ij}^t}{\partial x_k} \left\{ \overline{u_i u_j u_k} \right\} - \frac{d_{ij}^p}{\partial x_k} \left\{ \frac{\overline{p u_i}}{\rho} \delta_{jk} + \frac{\overline{p u_j}}{\rho} \delta_{ik} \right\} \\ & + \frac{p}{\rho} \left\{ \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_i} \right\} - 2\nu \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_k} \frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_k} \\ & \frac{\phi_{ij}}{\epsilon_{ij}} \end{aligned} \quad (1)$$

여기서 대문자 U 는 평균속도를 소문자 u 는 요동속도를 나타내고, C_{ij} 는 대류항, P_{ij} 는 생성항, ϕ_{ij} 는 압력-변형률항, ϵ_{ij} 는 소멸률항을 나타낸다. 이 중 C_{ij} , P_{ij} , d_{ij}^v 는 모형화가 필요하지 않고 d_{ij}^t , d_{ij}^p , ϕ_{ij} , ϵ_{ij} 는 모형화가 필요하다.

2.2 압력-변형률항의 모형

Chou⁽²⁰⁾에 의하면 압력-변형률항은 다음과 같이 3개항의 합으로 나타내진다.

$$\phi_{ij} = \phi_{ij1} + \phi_{ij2} + \phi_{ij}^{\text{ss}} \quad (2)$$

여기서 ϕ_{ij1} 항은 요동속도 성분들 사이의 비선형 내부작용으로부터 기인하고 보통 “등방성 회귀 (return-to-isotropy)” 혹은 “저속 (slow)”항이라고 불리워진다. 이에 반해 ϕ_{ij2} 항은 어떠한 평균변형 변화에 급속하게 반응하기 때문에 “평균변형 (mean-strain)” 혹은 “고속 (rapid)”항이라고 한다. ϕ_{ij}^{ss} 는 ϕ_{ij1} 과 ϕ_{ij2} 의 역 반사효과를 나타내는 항이다.

2.2.1 저속 등방성회귀항의 모형

ϕ_{ij1} 항은 Rotta⁽²¹⁾에 의해 제안된 다음의 모형이 일반적으로 사용되어 왔다.

$$\phi_{ij1} = -C_1 a_{ij} \epsilon \quad (3)$$

여기서

$$a_{ij} = \frac{\overline{u_i u_j}}{k} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \quad (4)$$

이다. Rotta는 ϕ_{ij1} 를 비등방성 텐서 a_{ij} 의 선형항으로 나타내었으나 실제과정은 분명히 비선형과정이므로 비선형 모형으로 나타내져야 한다. Lumley⁽⁷⁾는 Cayley-Hamilton원리⁽¹⁹⁾를 이용하여 다음과 같이 ϕ_{ij1} 에 대한 비선형 모형을 제안하였다.

$$\begin{aligned} \phi_{ij1} &= -\phi_{ij}^{\text{e}} \\ &= -C_1 \left[a_{ij} + C_1 \left(a_{ik} a_{kj} - \frac{1}{3} \delta_{ij} A_2 \right) \right] \epsilon \end{aligned} \quad (5)$$

이 모형은 여러 연구자들에 의해 시험되었는데, 문제가 되는 것은 Launder와 Tselepidakis⁽¹⁸⁾는 비선형항의 모형상수 C_1 을 전산최적화에 의해서 $C_1 = 0.7$ 을 제안한 반면 Sarkar와 Speziale⁽¹⁵⁾는 레이놀즈응력의 실현가능성 (realizability) 조건으로부터 $C_1 = -2/3$ 임을 이론적으로 유도하였다. 이 두 결과는 서로 반대부호의 C_1 을 제안하였으나, 이에 대한 적부를 판명할 연구가 없어서 실제 유동해석에 적용할 때 혼란을 야기하고 있다.

본 연구에서는 Hallbäck 등⁽¹⁹⁾이 소멸률 비등방성 텐서 e_{ij} 를 대칭성조건과 trace가 0인 조건을 이용하여 급수형 텐서식으로 유도해 낸 것과 같이 ϕ_{ij}^{e} 를 다음의 식으로 나타내었다.

$$\begin{aligned} \phi_{ij}^{\text{e}} &= b_1 a_{ij} + b_2 \left(a_{ik} a_{kj} - \frac{1}{3} A_2 \delta_{ij} \right) \\ &+ b_3 \left(a_{ik} a_{kj} a_{ij} - \frac{1}{3} A_3 \delta_{ij} \right) \\ &+ b_4 \left(a_{ik} a_{kl} a_{lm} a_{mj} - \frac{1}{3} A_4 \delta_{ij} \right) \\ &+ b_5 \left(a_{ik} a_{kl} a_{lm} a_{mn} a_{nj} - \frac{1}{3} A_5 \delta_{ij} \right) + \dots \end{aligned} \quad (6)$$

여기서 $A_2 = a_{ik} a_{ki}$, $A_3 = a_{ik} a_{kl} a_{li}$, $A_4 = a_{ik} a_{kl} a_{lm} a_{mn} a_{ni}$ 등은 a_{ij} 의 고차 불변항이다. 계수 b_k 는 a_{ij} 의 불변항들의 함수가 아닌 난류레이놀즈수나 그 밖의 유동특성과 관련된 함수들로 구성되어야 한다. 식 (6)에 Cayley-Hamilton 원리⁽¹⁹⁾를 적용하면

$$\begin{aligned} \phi_{ij}^{\text{e}} &= \left(b_1 + \frac{b_3}{2} A_2 + \frac{b_4}{3} A_3 + \frac{b_5}{4} A_4^2 + \dots \right) a_{ij} \\ &- \left(b_2 + \frac{b_4}{2} A_2 + \frac{b_5}{3} A_3 + \dots \right) \\ &\left(a_{ik} a_{kj} - \frac{1}{3} A_2 \delta_{ij} \right) \end{aligned} \quad (7)$$

으로 나타내 질 수 있다. 이 식에서 $k \geq 2$ 에 대해 $b_k = 0$ 이면 $\phi_{ij}^{\text{e}} = b_1 a_{ij}$ 가 되어 결국 $\phi_{ij1} = -b_1 a_{ij} \epsilon$ 의 Rotta 모형이 된다.

김과 정⁽²²⁾은 $k \geq 6$ 에 대해 $b_k=0$ 으로 하는 5차모형에 2-성분 난류극한조건을 만족시키는 다음과 같은 새로운 모형을 제안하였다.

$$\phi_{ij}^s = \left[X a_{ij} - Y \left(a_{ik} a_{kj} - \frac{1}{3} A_3 \delta_{ij} \right) \right] \quad (8)$$

여기서

$$X = f(R_t) \left[\frac{a_1}{2} - \frac{1}{56} (15a_1 - 2a_2) A_2 + \frac{3}{448} (3a_1 + a_2) (20A_3 - 9A_2^2) \right] \quad (9)$$

$$Y = f(R_t) \left[\frac{a_2}{4} - \frac{9}{224} (3a_1 + a_2) (5A_2 - 2A_3) \right] \quad (10)$$

이다. 위 식들에서 계수 a_1 , a_2 를 전산 최적화하여 각각 4.0과 5.5로 사용하였고, 식 (9), (10)의 $f(R_t)$ 은

$$f(R_t) = \left(1 + \frac{1.32}{\sqrt{R_t}} + \frac{2.95}{R_t} \right)^{-1} \quad (11)$$

으로 난류레이놀즈수 $R_t = 4k^2 / (9\nu\varepsilon)$ 의 함수이다. 그러나 위의 모형에는 전산최적화해야 할 두 개의 계수 a_1 , a_2 가 있고, 복잡한 경험식 $f(R_t)$ 을 사용함으로써 이 모형의 일반성을 떨어뜨리고 있다.

한편, 신⁽²³⁾도 김과 정⁽²²⁾이 제안한 방법과 유사하게 5차 모형을 시도하였다. 이러한 고차항의 고려는 저속 등방성회귀항의 각 성분보다 유리한 방향으로 작용하여 레이놀즈력 성분에서의 개선이 기대되기 때문이다. 신⁽²³⁾은 2-성분 극한조건과 고레이놀즈수 극한조건⁽¹⁵⁾을 이용하여 식 (8)을 다음과 같이 이론적으로 나타내었다.

$$X = C_1^\infty \left(1 - A_2 + \frac{3}{4} A_3 \right) + \frac{1}{4} A_2 - \frac{3}{4} A_3 - b_5 \left(\frac{25}{81} A_2 + \frac{2}{27} A_3 - \frac{1}{4} A_2^2 \right) \quad (12)$$

$$Y = \frac{3}{2} (C_1^\infty - 1) \left(1 - \frac{3}{4} A_2 \right) - b_5 \left(\frac{1}{3} A_3 - \frac{1}{9} A_2 \right) \quad (13)$$

신⁽²³⁾은 식 (12), (13)만으로는 벽면부근에서 DNS 자료와 잘 일치하는 저속 등방성모형을 얻지 못하였기 때문에, 평판유동에 대한 DNS 자료를 이용하여 최종적으로 다음과 같은 식을 제안하였다.

$$X = f(A) \left[C_1^\infty \left(1 - A_2 + \frac{3}{4} A_3 \right) + \frac{1}{4} A_2 - \frac{3}{4} A_3 \right. \\ \left. - b_5 \left(\frac{25}{81} A_2 + \frac{2}{27} A_3 - \frac{1}{4} A_2^2 \right) \right] \quad (14)$$

$$Y = f(A) \left[\frac{3}{2} \eta (C_1^\infty - 1) \left(1 - \frac{3}{4} A_2 \right) - b_5 \left(\frac{1}{3} A_3 - \frac{1}{9} A_2 \right) \right] \quad (15)$$

여기서

$$f(A) = 1 + 0.84 \exp(-8A^2) \quad (16)$$

인데, 이는 벽면부근에서 DNS 자료와 비교하면서 얻어진 경험적인 관계식이다. 식 (14), (15)에서 $\eta = 0.6362$, $C_1^\infty = 2.67$, $b_5 = 1$ 이다. 이와같이 신⁽²³⁾이 수정함수의 매개변수로 김과 정⁽²²⁾이 사용한 R_t 과는 달리 편평계수 A 를 사용한 이유는 R_t 은 벽에 접근함에 따라 점성효과를 잘 나타내지만, 압력-변형율이 벽인접부에서 점성의 직접적인 영향을 받는지는 아직 알려지지 않았으나 A 는 벽이 레이놀즈 응력을 선택적으로 감소시키는 현상과 압력-변형율을 반사하는 벽인접효과를 가장 잘 나타내는 변수로 알려져 있기 때문이다.⁽²⁴⁾

Fig. 1~2는 ϕ_{ij} 의 예측값들을 DNS자료와 비교한 그림이다. ϕ_{111} 에 대한 DNS자료는 $y^+ < 6$ 에서 양의 값을 가지며 y^+ 가 30부근에서 최저값을 갖다가 다시 상승하고, ϕ_{221} 은 $y^+ < 10$ 에서 음의 값을 갖다가 y^+ 가 그보다 크면 양의 값을 갖게 된다. 이것은 역등방성회귀 현상으로 Launder와 Tselepidakis⁽¹⁸⁾모형은 이를 예측하고 있지 못하지만 신⁽²³⁾의 모형은 잘 예측하고 있다. 이와 같이 벽인접부에서 역등방성회귀 현상이 나타나는 것은 벽의 최인접부에서 벽에 수직방향 요동($\overline{v^2}$)이 급격히 감소하여 그 에너지가 유동방향 요동($\overline{u^2}$)과 횡방향 요동($\overline{w^2}$)으로 배분되기 때문에 일어난다.

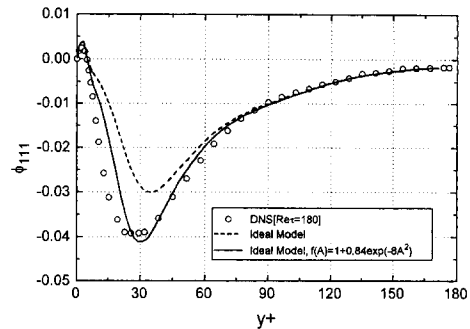


Fig. 1 Ideal return-to-isotropy component ϕ_{111} profiles compiled from DNS data.

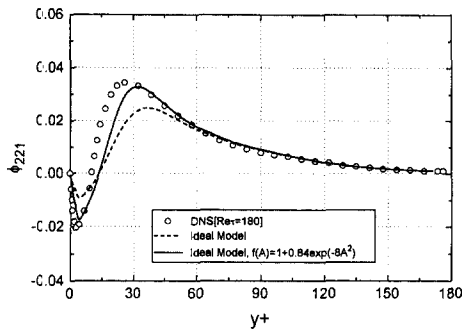


Fig. 2 Ideal return-to-isotropy component ϕ_{221} profiles compiled from DNS data.

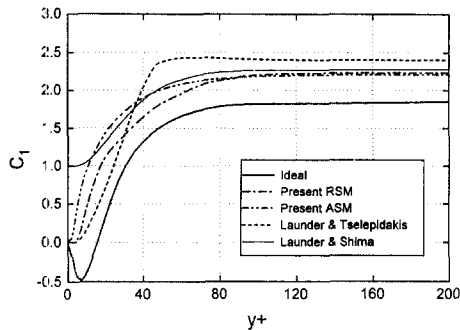


Fig. 3 Model coefficient C_1 profiles compiled from DNS data.

식 (12), (13)으로 나타내지는 이론적 모형은 Fig. 1~2에서 점선으로 나타내진 것인데 DNS 자료보다 그 절대치가 전체적으로 작게 나타나고 있다. 식 (12), (13)을 보면 X , Y 는 비등방성 불변항인 A_2 , A_3 의 함수로 나타내져 있음을 알 수 있다. 평판유동에 대한 DNS 자료와 편평계수 A 의 함수인 식 (16)을 곱해주어 수정한 X , Y 의 식 (14), (15)는 Fig. 1~2에서 실선으로 나타내져 있으며 ϕ_{111} , ϕ_{221} 를 DNS 자료에 잘 일치시켜 준다. 이 결과는 저속항의 모형계수들은 비등방성불변항인 A_2 , A_3 뿐만 아니라 편평계수 A 의 함수가 되어야 하는 것을 나타내 준다. C_1 이 항상 양의 값을 갖는 기존의 Rotta형 모형이나 비선형 모형으로는 이 현상을 예측할 수 없다. 식 (14)에서 X 는 식 (5)의 C_1 과 같은 것이며, Fig. 3에서 볼 수 있는 바와 같이, $y^+ > 15$ 에서 음의 값을 갖는다. 이 음의 C_1 값이 역등방성회귀 현상을 발생시킨다는 것을 알 수 있다.

식 (14)에서 X 로 표시된 식 (5)의 C_1 모형은 압

력-변형률 저속항의 주성분들을 DNS자료에 잘 일치시켜 주나 이 모형이 실제유동을 가장 잘 예측해 줄 것이라고 생각할 수는 없다. 왜냐하면 레이놀즈응력 방정식에서 모형화가 필요한 항은 확산항 (d_{ij}), 소멸항 (ε_{ij}) 압력-변형률항 (ϕ_{ij}) 등인데, 기존의 확산항과 소멸항의 모형이 정확할 경우 정확한 압력-변형률항 모형의 값이 나타난다. 그러나 확산항과 소멸항의 모형이 부정확하면 정확한 압력-변형률항 모형의 값이 나타나지 않는다. 따라서 실제 유동해석에 적용할 C_1 모형을 얻기 위해서는 이상적 C_1 모형의 형태를 유지하며 레이놀즈응력 성분분포의 수준을 고려하여 C_1 모형을 수정하여야 한다.

Launder와 Tselepidakis⁽¹⁸⁾는 Champagne 등,⁽²⁵⁾ Harris 등⁽²⁶⁾의 전단균질유동에 대한 실험값들과의 비교로부터 다음과 같은 C_1 모형을 제안하였다.

$$C_1 = 6.3AF^{0.5}(1-f_s) \quad (17)$$

여기서 $f_s = \max[(1-R_t/140), 0]$, $F = \min[0.6, A_2]$ 이다. Fig. 3은 C_1 에 대한 이상형 모형과 Launder-Tselepidakis⁽¹⁸⁾ 모형 그리고 본 레이놀즈응력 방정식 모형 (Reynolds Stress equation Model; RSM), 본 대수응력모형 (Algebraic Stress Model; ASM), Launder-Shima⁽⁹⁾ 모형을 비교한 그림이다. 그림에서 알 수 있듯이 Launder-Tselepidakis모형은 이상형 모형과 그 변화상태가 상당히 다른 것을 알 수 있다. 본 모형 개발과정에서 레이놀즈응력 분포의 수준을 DNS 자료와 비교해본 결과 $y^+ \rightarrow \infty$ 에서 C_1 은 1.8로 하는 것보다 2.2 정도로 하는 것이 레이놀즈응력 분포를 더 잘 예측해 주었으므로 본 모형에서는 $y^+ \rightarrow \infty$ 에서 C_1 값으로 2.2를 택하였다. 그리고 y^+ 가 40이하에서는 C_1 이 양의 값을 갖으며 이상형 모형과 같은 형태로 변하도록 모형식을 택하였고, 2-성분 극한조건의 만족과 벽인접부 효과의 고려를 위하여 R_t 의 지수함수를 수정하였다.

레이놀즈응력 방정식 모형에서는

$$C_1 = 2.5A^{0.25}[1 - \exp(-(0.006R_t)^2)] \quad (18)$$

으로, 대수응력 모형에서는

$$C_1 = 2.5A^{0.25}[1 - \exp(-0.1 R_t^{5/8})] \quad (19)$$

를 사용하였다. $y^+ < 80$ 영역에서 대수응력 모형의 C_1 값을 레이놀즈응력 방정식 모형에서 보다 크게

해준 것은 대수응력 모형은 대류와 확산효과를 고려치 않고 대수적으로 레이놀즈응력 성분을 계산하기 때문에 등방성 회귀를 실제보다 더 크게 해주어야 벽면점부의 $\overline{v_2}$ 의 분포가 정확히 예측될 수 있기 때문이다.

Launder와 Shima⁽⁹⁾는 저레이놀즈수 2차 모멘트 모형에서 레이놀즈응력 소멸률 모형도 등방성 모형인

$$\varepsilon_{ij} = \frac{2}{3} \varepsilon \delta_{ij} \quad (20)$$

$$C_1' = -\frac{Y}{X} = -\frac{3}{2} \frac{(C_1^\infty - 1)(1 - 0.75A_2)}{X} - \frac{1}{9} \frac{[X - C_1^\infty(1 - A_2 + 0.75A_3) - 0.25A_2 + 0.75A_3](3A_3 - A_2)}{\left[\frac{25}{81}A_2 + \frac{2}{27}A_3 - \frac{1}{4}A_2^2\right]X} \quad (21)$$

위 식에 식 (18)의 C_1 을 X 대신 대입하고 $y \rightarrow \infty$ 에서 $C_1' = -2/3$ 극한조건⁽¹⁵⁾을 사용하면 $C_1^\infty = 2.5$ 가 얻어진다. 이 값을 식 (21)에 대입하고 DNS자료에서 얻어진 A_2 , A_3 , A 그리고 R_1 값을 이용하여 C_1' 를 y^+ 함수로 나타내 보면 Fig. 4와 같다. 이 그림은 C_1' 에 대한 대단히 흥미로운 결과를 보여준다. C_1' 이 $y^+ \rightarrow \infty$ 이면 Sarkar와 Speziale⁽¹⁵⁾의 이론과 같이 $-2/3$ 로 수렴하지만 C_1' 은 $y^+ = 18$ 부근에서 특이점을 갖고 벽에 접근함에 따라 대단히 큰 값으로 상승한다. 이 그림은 Launder와 Tselepidakis⁽¹⁸⁾가 실제 유동에서 C_1' 를 이론적인 값인 $-2/3$ 를 사용하지 않고 0.7을 사용하는 것이 더 적합하다고 한데 대한 이론적 근거를 제시해 준다. 왜냐하면 Fig. 4는 실제유동에 가장 큰 영향을 주는 벽면점부에서 C_1' 이 양으로 큰 값을 갖기 때문에 C_1' 값을 이와같은 변수로 사용하지 않고 평균적인 상수로 간주할 경우 양의 값을 사용하는 것

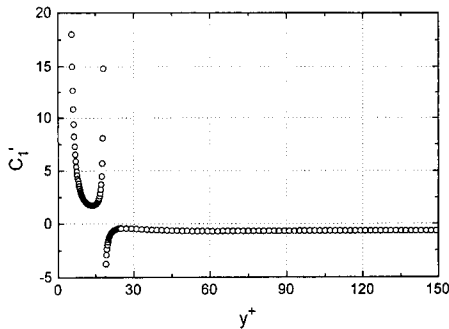


Fig. 4 Model coefficient C_1' profiles compiled from DNS data.

를 사용하였기 때문에 레이놀즈응력 방정식의 균형을 위해 C_1 이 벽면에서 0으로 수렴하지 않고 1로 수렴해야 한다. Fig. 3을 보면 Launder-Shima의 C_1 모형은 벽에서 1로 수렴하는 것을 제외하면 본 모형과 잘 일치하는 것을 알 수 있다.

C_1 모형을 식 (14)의 X 를 사용하지 않고 식 (18)이나 식 (19)를 사용하는 경우 식 (12), (13)의 X , Y 식에서 b_5 를 소거시켜 C_1' 의 관계식을 다음과 같이 이론적으로 유도할 수 있다.

이 더 합당하다는 결론이 추출된다. 신⁽²³⁾은 정사각 단면의 180° 곡덕트유동해석에서 C_1' 의 상수값을 변화시키며 해석결과를 Chang 등⁽²⁷⁾의 실험결과와 비교한 결과 C_1' 의 크기가 유동해석 결과에 큰 영향을 주며 $C_1' = 0.8$ 정도가 최적임을 발견하였다. 이 결과도 본 연구 결과의 타당성을 입증해 준다.

2.2.2 고속 평균변형률의 모형

고속평균변형률 ϕ_{ij2} 는 국부 평균변형에 급속 반응하는 항으로 속도구배 $\partial U_k / \partial x_i$ 와 4차 2점 속도-구배 상관관계 텐서의 곱으로 나타내어진다. ϕ_{ij2} 의 모형으로 Launder 등⁽²⁸⁾은 다음과 같은 준-등방성(Quasi-Isotropic; QI)모형을 제안하였다.

$$\begin{aligned} \phi_{ij2} = & -\frac{\gamma+8}{11} \left(P_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} P_{kk} \right) \\ & - \frac{(30\gamma-2)}{55} k \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \\ & - \frac{(8\gamma-2)}{11} \left(D_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} D_{kk} \right) \end{aligned} \quad (22)$$

여기서

$$D_{ij} \equiv - \left(\overline{u_i u_k} \frac{\partial U_k}{\partial x_j} + \overline{u_j u_k} \frac{\partial U_k}{\partial x_i} \right) \quad (23)$$

이다. 그러나 Launder와 Morse⁽²⁹⁾는 이 모형은 축대칭 제트유동에서 선회유동의 효과를 잘못 예측하고 있어서 이보다 단순한 IP(Isotropic of Production)모형이 오히려 실용적이라고 하였다. IP모형은 Naot 등⁽³⁰⁾에 의해서 제안되었으며 다음과 같이 나타내진다.

$$\phi_{ij2} = -C_2 \left(P_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} P_{kk} \right) \quad (24)$$

여기서 $C_2=0.6$ 인 경우 이 식은 Crow⁽³¹⁾의 고속 뒤틀림 이론(rapid distortion theory)을 만족한다. 그러나 식 (24)는 2차 모멘트 난류모형에서 가장 중요한 2-성분 극한 조건은 만족시키지 못하여 레이놀즈 주응력이 어느 경우나 양의 값을 가져야 할 난류의 실현가능성 조건을 만족시키지 않기 때문에 벽인접부 저레이놀즈수 구역에서 정확성이 떨어진 다. 따라서 복잡한 난류유동의 해석에 적용할 일반성이 크고 실현가능성 조건을 만족하는 고속항 모형을 얻으려면 비등방성 모형의 도입이 요구된다.

Reynolds⁽³²⁾, Shir와 Lumley⁽¹⁷⁾는 ϕ_{ij2} 를 평균속도 변형률과 레이놀즈응력의 2차(quadratic)함수로 나타냄으로서 2-성분 극한조건을 만족시킬 수 있음을 보여주었고, Tselepidakis⁽³³⁾는 ϕ_{ij2} 를 3차항(cubic)의 함수로 나타내어 2-성분 극한조건을 만족시키도록 하였다. Tselepidakis⁽³³⁾가 유도한 입방 준-등방형(Cubic Quasi-Isotropic; CQI)모형인 ϕ_{ij2} 모형은 현재 가장 일반성이 큰 모형으로 판단되며 다음과 같이 나타내진다.

$$\begin{aligned} \phi_{ij2} = & -0.6 \left(P_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} P_{kk} \right) + 0.3 \varepsilon a_{ij} \left(\frac{P_{kk}}{\varepsilon} \right) \\ & - 0.2 \left[\frac{u_k u_j}{k} \frac{u_i u_l}{k} \left(\frac{\partial U_k}{\partial x_l} + \frac{\partial U_l}{\partial x_k} \right) \right. \\ & \left. - \frac{u_i u_k}{k} \left(\frac{u_j u_l}{k} \frac{\partial U_j}{\partial x_l} + \frac{u_j u_k}{k} \frac{\partial U_l}{\partial x_l} \right) \right] \\ & - r \left[A_2 (P_{ij} - D_{ij}) + 3 a_{ik} a_{kj} (P_{ik} - D_{ik}) \right] \\ & + t \left\{ \left(\frac{7}{15} - \frac{A_2}{4} \right) \left(P_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} P_{kk} \right) \right. \\ & + 0.1 \varepsilon \left[a_{ij} - \frac{1}{2} \left(a_{ik} a_{kj} - \frac{1}{3} \delta_{ij} A_2 \right) \right] \frac{P_{kk}}{\varepsilon} \\ & - 0.05 a_{ij} a_{ik} P_{ik} \\ & + 0.1 \left[\left(\frac{u_i u_l}{k} P_{ij} + \frac{u_j u_l}{k} P_{ii} \right) - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{u_l u_k}{k} P_{ik} \right] \\ & + 0.1 \left[\frac{u_i u_l u_k u_j}{k^2} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \frac{u_l u_m}{k^2} \frac{u_k u_m}{k^2} \right] \left[6 D_{ik} \right. \\ & \left. + 13 k \left(\frac{\partial U_l}{\partial x_k} + \frac{\partial U_k}{\partial x_l} \right) \right] \\ & \left. - 0.2 \frac{u_i u_l}{k^2} \frac{u_k u_j}{k^2} (P_{ik} - D_{ik}) \right\} \quad (25) \end{aligned}$$

위 식에서 경험적으로 결정해야 할 계수는 r 과 t 이다. 식 (25)에서 우변 제1항은 선형항이고 제2항과 제3항은 2차항, 제4항과 제5항은 3차항인데 제5항은 계산하기에 식이 너무 복잡하고 길어서 일

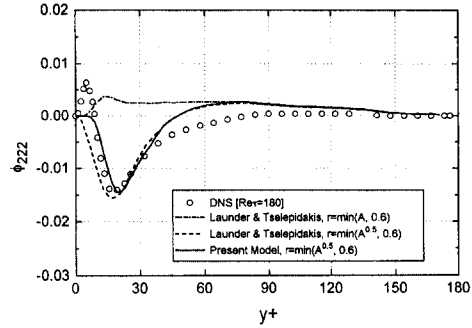


Fig. 5 Cubic Quasi-Isotropic ϕ_{222} profiles compiled from DNS data.

반적으로 사용하지 않는다.

식 (25)의 모형에서 계수 r 을 결정하는 것이 가장 어려운 문제이다. 계수를 결정하는 방법은 r 을 변화시키며 모형식을 계산하여 ϕ_{ij2} 에 대한 DNS자료들과 비교함으로써 적절한 계수를 찾는 것이다. Tselepidakis는 벽면에 수직인 성분이 유동에 가장 큰 영향을 준다고 생각하여 ϕ_{222} 의 모형식 계산결과를 DNS자료와 비교함으로써 다음 모형을 제안하였다.

$$r = \min[0.6, A] \quad (26)$$

그러나 이 모형계수를 사용하여 ϕ_{ij2} 를 계산하면 Fig.5에서 보는 바와 같이 DNS 자료와는 달리 전 영역에서 양의 값으로 되는 것을 볼 수 있다. 본 연구에서는 식 (26)에서 A 를 $A^{0.5}$ 로 대체하면 ϕ_{222} 분포가 DNS 자료와 더 잘 일치함을 발견하였다.

$$r = \min[0.6, A^{0.5}] \quad (27)$$

그러나 본 연구에서 제시한 모형계수 r 을 사용하면 Fig.6에서 보는 바와 같이 전단응력에 관계

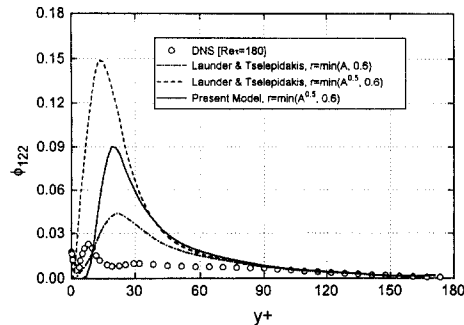


Fig. 6 Cubic Quasi-Isotropic ϕ_{122} profiles compiled from DNS data.

되는 성분 ϕ_{122} 가 너무 커지는 문제점이 있다. 이를 극복하기 위해서 본 연구에서는 식 (25)에서 우변 제 5항을 생략한 후 ϕ_{ij2} 에 대한 DNS 자료와 모형식을 더 잘 일치시키기 위해서 A , A_2 , R_t 함수로 나타내지는 수정계수 C_2 를 전체식에 곱하여 식 (28)과 같이 나타내어 사용하였다.

$$\begin{aligned} \phi_{ij2} = & -C_2 \left\{ \left(P_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} P_{kk} \right) - \frac{1}{2} \varepsilon a_{ij} \left(\frac{P_{kk}}{\varepsilon} \right) \right. \\ & + \frac{1}{3} \left[\frac{\overline{u_k u_j} \overline{u_i u_i}}{k} \left(\frac{\partial U_k}{\partial x_i} + \frac{\partial U_i}{\partial x_k} \right) \right. \\ & \left. - \frac{\overline{u_i u_k}}{k} \left(\frac{\overline{u_i u_k} \partial U_j}{\partial x_i} + \overline{u_j u_k} \frac{\partial U_i}{\partial x_i} \right) \right] \\ & \left. + \frac{r}{0.6} [A_2 (P_{ij} - D_{ij}) + 3a_{ii} a_{kj} (P_{ik} - D_{ik})] \right\} \end{aligned} \quad (28)$$

만약 이 식에서 $C_2=0.6$ 을 사용하면 Tselepidakis의 모형과 같아지는데 벽인접부에서 ϕ_{122} 성분이 너무 커지기 때문에 본 연구에서는 C_2 를 벽에서 0으로 부터 유동중심부로 갈수록 점차 증가시켜 고레이놀즈수 영역에서는 0.6으로 접근하는 모형을 고안하였다. 본 연구에서 비등방성 텐서의 불변항들과 난류레이놀즈수의 함수로 구성된 새로운 모형계수 C_2 는 다음과 같다.

$$C_2 = 0.95 (AA_2)^{0.25} [1 - \exp(- (0.0055 R_t)^4)] \quad (29)$$

이 모형계수는 고레이놀즈수 구역에서는 0.6으로 접근하기 때문에 고레이놀즈수 극한조건도 만족한다.

2.2.3 벽 반사효과

벽은 난류 압력요동을 반사시켜 레이놀즈응력의 재분배에 영향을 준다. 이 벽 반사효과는 식 (2)의 ϕ_{ij}^w 로 나타내진다. ϕ_{ij}^w 에 대해서 현재까지 가장 많이 사용하는 모형은 Gibson과 Launder⁽¹⁰⁾가 제안한 다음의 모형이다.

$$\begin{aligned} \phi_{ij1}^w = & C_1^w \frac{\varepsilon}{k} \left(\overline{u_k u_m} n_k n_m \delta_{ij} - \frac{3}{2} \overline{u_k u_i} n_k n_j \right. \\ & \left. - \frac{3}{2} \overline{u_k u_j} n_k n_i \right) f \left(\frac{l}{n_k \Gamma_k} \right) \end{aligned} \quad (30)$$

$$\begin{aligned} \phi_{ij2}^w = & C_2^w \left(\phi_{km2} n_k n_m \delta_{ij} - \frac{3}{2} \phi_{ki2} n_k n_j \right. \\ & \left. - \frac{3}{2} \phi_{kj2} n_k n_i \right) f \left(\frac{l}{n_k \Gamma_k} \right) \end{aligned} \quad (31)$$

여기서

$$f \left(\frac{l}{n_k \Gamma_k} \right) = \frac{k^{1.5}}{2 C_l \varepsilon x_n} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{47.4}{R_t}} \right) \quad (32)$$

으로 본 연구에서는 사용하였고,⁽²³⁾ C_l 은 2.5이다. 식 (30), (31)에서 r 은 위치벡터이고 i 은 난류 길이 척도이며, n_k 는 k 방향 단위벡터이다.

Launder와 Tselepidakis⁽¹⁸⁾는, ϕ_{ij1} 의 반사효과를 ϕ_{ij1} 에 흡수되어 있으므로 ϕ_{ij2} 만 고려해야 한다고 하였다. 그러나 본 연구에서 시험해 본 결과 ϕ_{ij1} 이나 ϕ_{ij2} 모형 하나만으로는 DNS 자료가 제시한 벽 반사효과를 나타낼 수 없어서 두 항을 모두 고려하였다. 본 연구에서는 모형계수 C_1^w , C_2^w 를 다음과 같이 편평계수 A 와 난류레이놀즈수 R_t 의 함수로 나타내어 ϕ_{ij}^w 의 계산 결과와 DNS 자료를 비교하여 결정하였다.

$$C_1^w = 4.5 f_{cw1} \exp \left[- \left(\frac{R_t}{123} \right)^{2.5} \right] + 0.3 A^{0.25} \quad (33)$$

$$C_2^w = 0.3 A^{0.25} \quad (34)$$

여기서 $f_{cw1} = 1 - \exp(-R_t^2)$ 이다. Fig. 7은 ϕ_{22}^w 에 대한 모형식의 계산결과와 DNS 자료를 비교한 것이다.

C_1^w 계수의 모형을 A 만의 함수로 나타낼 수 있으나 이 경우 무차원 레이놀즈 응력 $\overline{u_i u_j}/k$ 의 예측치가 레이놀즈수의 변화에 따른 변화경향이 나타나지 않았고 R_t 를 변수로 사용하면 이 경향을 포착할 수 있었다. 따라서 압력-변형률 지속항의 벽 반사효과는 벽 인접효과 만의 영향을 받는 것이 아니라 점성효과의 영향을 받는다는 것을 알 수 있었다.

대수응력모형에서는 난류확산항과 대류항을 고려하지 않고 레이놀즈응력을 대수적으로 계산한다. 모형계수들에 대한 선정기준은 예측되는 레이놀즈

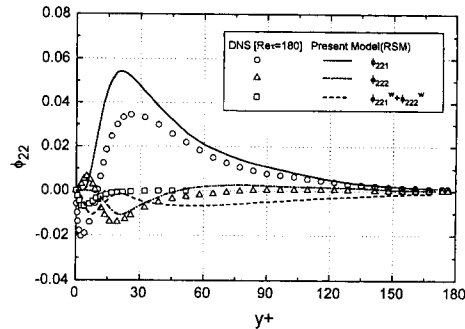


Fig. 7 Pressure-Strain correlation component ϕ_{22} profiles compiled from DNS data.

응력 성분들과 압력-변형률 성분들을 동시에 정확하게 예측되도록 하는 것이 가장 이상적이나 이 두 조건들을 동시에 만족시킬 수 없다. 따라서 본 대수응력모형에서는 레이놀즈응력 방정식 모형에서 유도한 것과 유사하게 압력-변형률 성분을 가능한 DNS 자료에 맞추면서 레이놀즈응력 수준을 비교적 정확히 예측하게 하는 방향으로 연구를 진행하였다. 이를 위해 대수응력모형에서는 C^w 를 레이놀즈응력 방정식 모형에서 결정된 식 (33)을 다음과 같이 수정하여 사용하였다.

$$C^w = 4.5 f_{cw1} \exp(-14A) + 0.6 A^{0.25} \quad (35)$$

이다. 여기서 $f_{cw1} = 1 - 0.95 \exp(-0.954 R_i^{0.25})$ 이고, C_2 및 C^w 는 레이놀즈응력 방정식 모형에서와 같게 사용하였다. 식 (35)의 C^w 식은 식 (33)의 레이놀즈응력 방정식 모형보다 큰 값을 보여준다. 이것은 식 (19)의 C_1 모형이 식 (18)의 C_1 모형보다 벽부근에서 큰 값을 취함으로써 더 큰 벽 반사효과를 나타내 주어야 전체적 균형이 이루어지기 때문이다.

$$\epsilon_{ij}^* = \frac{\frac{\epsilon}{k} \{ \overline{u_i u_j} + \overline{u_i u_k n_j n_k} + \overline{u_j u_k n_i n_k} + \overline{u_k u_l n_l n_j} \}}{1 + \frac{3}{2} \frac{\overline{u_p u_q n_p n_q}}{k}} \quad (38)$$

$$f_\epsilon = \exp(-20A^2) \quad (39)$$

이고 ϵ_{ij}^0 는 고레이놀즈수 구역에서의 ϵ_{ij} 값으로

$$\epsilon_{ij}^0 = \epsilon_{ij}^{iso} \quad (40)$$

을 사용하였다. 그러나 주유동방향에 있는 실제유동은 등방성이 될 수 없으므로 식 (37)에서 $\epsilon_{ij}^0 = 2\delta_{ij}\epsilon/3$ 으로 가정하면 고레이놀즈수 구역의 ϵ_{ij} 를 정확히 모사하지 못할 것이다. 따라서 Launder와 Tselepidakis도 ϵ_{ij}^{iso} 에 대한 새로운 모형도입이 필요하다고 주장하였다. Hallbäck 등⁽¹⁹⁾은 ϵ_{ij} 텐서를 레이놀즈응력의 비등방성 텐서의 급수로 전개하고 Cayley-Hamilton 원리를 이용하여

$$\epsilon_{ij}^0 = \epsilon_{ij}^{iso} + \epsilon \left\{ \left[1 + \alpha \left(\frac{1}{2} A_2 - \frac{2}{3} \right) \right] a_{ij} - \alpha \left(a_{ik} a_{kj} - \frac{1}{3} A_2 \delta_{ij} \right) \right\} \quad (41)$$

을 유도하였다. 여기서 $\alpha = 0.75$ 이다.

본 연구에서는 ϵ_{ij}^0 모형으로 식 (41)을 사용하였고 f_ϵ 모형으로는 식 (39) 대신 Lai와 So⁽¹²⁾가 제안한

2.3 소멸률 텐서 모형

레이놀즈응력 방정식 모형의 정확성에 큰 영향을 주는 것의 하나는 레이놀즈응력 소멸률 ϵ_{ij} 모형이다. 고 레이놀즈수 2차 모멘트 모형에서는 일반적으로 등방성 가정모형인

$$\epsilon_{ij} = \epsilon_{ij}^{iso} = \frac{2}{3} \delta_{ij} \epsilon \quad (36)$$

을 사용하나 ϵ_{ij} 는 실제로 벽인접부에서 비등방성이 크기 때문에 저레이놀즈수 2차 모멘트 모형에서는 이에 대한 모형이 필요하다. Launder와 Tselepidakis⁽¹⁸⁾는 ϵ_{ij} 에 대한 모형으로 벽 극한조건을 만족시키는 소멸률 관계식 ϵ_{ij}^* 와 등방성 소멸률 ϵ_{ij}^{iso} 를 천이함수를 이용하여 보간한

$$\epsilon_{ij} = f_\epsilon \epsilon_{ij}^* + (1 - f_\epsilon) \epsilon_{ij}^0 \quad (37)$$

을 사용함으로써 벽 극한조건과 고레이놀즈수 극한조건을 모두 만족시키는 ϵ_{ij} 모형을 얻었다.

여기서

$$f_\epsilon = \exp \left[- \left(\frac{R_t}{150} \right) \right] \quad (42)$$

을 사용하였다.

Fig. 8은 ν/u^2 으로 무차원화된 ϵ_{11} 값에 대한 Launder와 Tselepidakis⁽¹⁸⁾모형, 단순모형 $\epsilon_{ij} = (\epsilon/k) \overline{u_i u_j}$, 본 모형을 비교한 그림이다. 모든 모형이 $y^+ < 7$ 에서 같은 곡선상에 있으며 DNS 자료와 비교적 잘 일치하나 $y^+ > 7$ 에서는 차이가 크다. Launder와 Tselepidakis 모형은 $y^+ > 10$ 에서

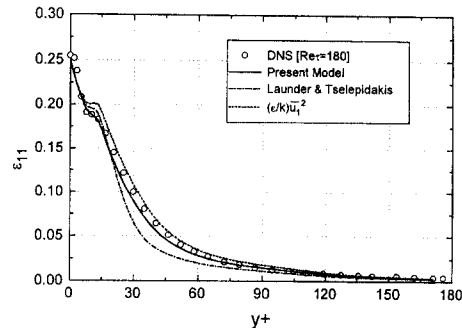


Fig. 8 ϵ_{11} profiles compiled from DNS data

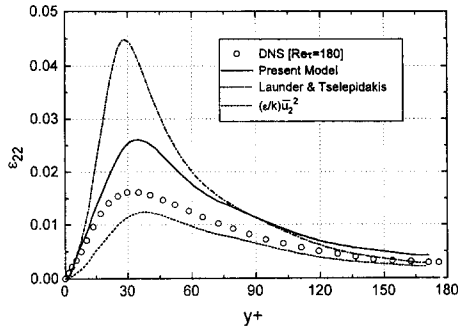


Fig. 9 ε_{22} profiles compiled from DNS data

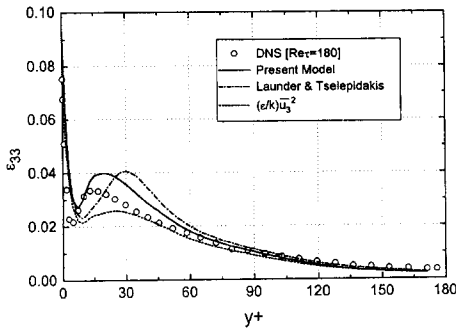


Fig. 10 ε_{33} profiles compiled from DNS data

DNS 자료보다 상당히 작은 값을 예측하고 있고, 단순모형은 DNS 자료보다 약간 큰 값을 예측해 준다. 본 ε_{ij} 모형은 $15 < y^+ < 70$ 에서 DNS 자료보다 약간 작은 예측값을 주었으나 다른 모형보다 DNS 자료에 잘 일치하였다.

Fig. 9는 ε_{22} 모형에 대한 비교도이다. 단순모형은 전 구역에서 DNS 자료보다 작은 예측값을 주었고 본 모형에서는 DNS 자료보다 큰 값을 예측해주었다. Launder와 Tselepidakis 모형은 DNS 자료보다 대단히 큰 값을 알 수 있다. 그러나 본 모형은 $y^+ < 15$ 에서 벽 극한조건을 가장 잘 만족시킴을 알 수 있다.

Fig. 10은 ε_{33} 의 예측곡선에 대한 비교도이다. $10 < y^+ < 60$ 에서 세 모형이 모두 DNS 자료와 큰 차이를 보이지만 본 모형의 변화형상이 DNS 자료와 가장 잘 일치하며 특히 y^+ 가 15까지 벽인접부 특성이 DNS 자료와 가장 잘 일치한다.

2.4 확산수송 모형

레이놀즈응력 확산과정은 3부분으로 구성되는데 이것은 점성(viscous) 확산, 난류(turbulent) 확산

그리고 압력(pressure) 확산이 그것이다. 물론 점성 확산 d_b^* 는 2차 모멘트 닫힘문제에서 모형화가 요구되지 않는다. 본 연구에서는 난류확산 d_t^* 는 Daly와 Harlow⁽³⁴⁾가 제안한 일반화된 구배확산 가정(Generalized Gradient Diffusion Hypothesis: GGDH)이라고 불리는 다음과 같은 모형을 사용한다.

$$d_b^* = \frac{\partial}{\partial x_k} \left(C_s \frac{k}{\varepsilon} u_k u_i \frac{\partial u_i u_j}{\partial x_l} \right) \quad (43)$$

여기서 확산계수 C_s 는 보통 Launder와 Morse⁽²⁹⁾에 의해 추천된 0.22의 값을 사용한다.

본 연구에서는 Daly와 Harlow 모형에서 확산계수 C_s 를 적절히 선택하기 위하여 벽인접부 유동에서 다음과 같은 방법을 사용하였다. 주응력들의 확산항에 대한 성분들을 합하면 난류운동에너지 방정식의 확산항에 해당하는 다음의 식이 얻어진다.

$$T_k^+ = \left(C_s \frac{k^+}{\varepsilon^+ \nu^{+2}} k_2^+ \right)_2 \quad (44)$$

식 (44)는 ν/u^* 으로 무차원화되어 있다. 이 식을 적분하면 확산계수 C_s 를 다음과 같이 구할 수 있게 된다.

$$C_s = \frac{\int_0^{y^+} T_k^+ dy^+}{\frac{k^+}{\varepsilon^+ \nu^{+2}} \frac{dk^+}{dy^+}} \quad (45)$$

본 연구에서는 완전발달된 평판유동 $Re_\tau=180$ 에 대해 Mansour 등⁽¹⁴⁾이 사용한 DNS 자료를 식 (45)에 대입하여 확산계수 C_s 를 구하였다. 이렇게 구한 값은 벽부근에서 Launder와 Morse⁽²⁹⁾에 의해 추천된 값 0.22보다 상당히 큰 값을 가지므로 Hanjalic⁽³⁵⁾이 벽인접부에서 C_s 를 증가시키는 방향으로 변경시킬 필요성이 있다고 한데 대한 타당성을 확인할 수 있었다. 특히, 벽면에 매우 가까운 곳에서는 상당히 그 변화가 심한 것을 알 수 있는데, 이는 이곳에서 k^+ 의 구배 dk^+/dy^+ 가 영이 되기 때문에 생기는 것이므로 실제성이 없다고 할 수 있다. 따라서 본 연구에서는 고레이놀즈수 구역에서 벽면으로 접근할 때 확산계수 C_s 가 서서히 상승하도록 다음과 같은 계수를 사용하였다.

$$C_s = \frac{0.22}{0.5 \left[1 + \left(\tanh \left(\frac{y^+}{220} \right) \right)^2 \right]} \quad (46)$$

Fig. 11은 본 모형과 DNS 자료에 의한 값들을

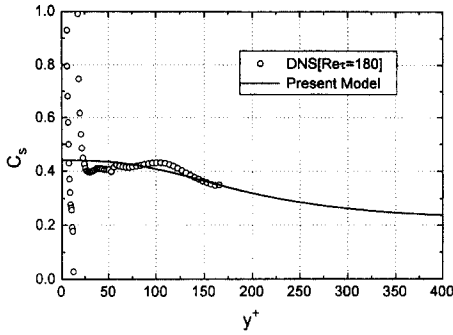


Fig. 11. Distribution of diffusion coefficient C_s compiled from DNS data.

함께 도시한 것인데 벽면을 지나 유동중심부로 갈수록 그 변화모양이 서로 유사한 것을 볼 수 있다.

압력확산은 보통 무시되거나 난류확산 모형에 포함시켜 고려되었다. 그러나 벽면에 접근할 때 속도에 관련된 3차 상관관계는 압력-속도 상관관계보다 빠르게 사라지게 된다(요동속도와는 다르게 요동압력은 벽면에서 사라지지 않기 때문이다). 만약 벽면유동에서 응력성분들 $\overline{v^2}$ 가 \overline{uv} 에 대한 방정식들이 벽면에서 평형을 이루기 위해서는 점성확산과 같은 형태의 난류확산의 포함이 필요하다는 것을 Table 1은 보여주고 있다. 따라서 $\overline{v^2}$ 과 \overline{uv} 방정식의 벽면 영향에 관한 항이 정확히 평형을 이룬다면 압력확산은 벽인접부에서 영이 되지 않을 것이다.

Lumley⁽⁷⁾는 약한 비등방성 난류의 극한에서 압력확산은 속도의 3차 상관관계에 대응하고 또 이에 의해 점차적으로 등방성 수송으로 되는 것을 보여주었다. Lumley와 유사하게 Launder와 Tselepidakis⁽¹⁸⁾도 벽인접부의 압력확산에 대해서는 난류 압력요동에 의해 등가 점성확산(effective viscous diffusion)은 줄어들고 점차 등방성이 될 것이라고 생각하였다. 이러한 관점에서 그들은 점성효과에 의한 압력확산 모형을 다음과 같이 제시하였다.

$$d_{ij}^p = -\frac{1}{3}(d_{ik}^p n_k n_j + d_{jk}^p n_k n_i) + \frac{1}{3}\delta_{ij} d_{ki}^p n_k n_i \quad (47)$$

식 (47)에 의한 압력확산 모형은 벽인접부에서 Table 1에서 보여준 바와 같이 $\phi_{22} + d_{22}^p = -4\nu\overline{c_2^2}y^2$ 의 벽인접 거동을 정확히 만족시키므로 본 연구에서도 그대로 사용하였다.

2.5 저속항의 비선형 모형계수의 고레이놀즈수 극한조건에 대한 고찰

Sarkar와 Speziale⁽¹⁵⁾는 레이놀즈응력의 실현가능성조건을 이용하여 고레이놀즈수 구역에서 $C_i = -2/3$ 이 최적임을 유도하였다. 그러나 그들은 이식을 유도하는 과정에서 고레이놀즈수 구역에서 레이놀즈응력의 소멸율 모형으로 $\epsilon_{ij}^p = 2\delta_{ij}\epsilon/3$ 의 등방성 모형을 사용하였다. 본 연구에서는 식 (41)의 Hallbäck 등⁽¹⁹⁾의 모형을 사용하였으므로 C_i 의 극한조건을 다시 유도하여 볼 필요가 있다.

평균속도 구배가 없는 균질유동에서 레이놀즈응력 방정식은

$$\overline{u_i u_j} = \phi_{ij} - \epsilon_{ij}^p \quad (48)$$

이다. 여기서 ϵ_{ij}^p 에 Hallbäck 등의 모형을 쓰면

$$\epsilon_{ij}^p = \left[\frac{2}{3}\delta_{ij} + \beta a_{ij} - \frac{3}{4}(a_{ik}a_{kj} - \frac{1}{3}A_2\delta_{ij}) \right] \epsilon \quad (49)$$

$$\beta = 1 + \frac{3}{4}\left(\frac{A_2}{2} - \frac{2}{3}\right) \quad (50)$$

이다. α 를 주축(principal axis)방향이라 할 때 실현가능성 조건을 만족하려면 $\overline{u_a u_a} = 0$ 일 때 $\frac{\overline{u_a u_a}}{u_a u_a} \geq 0$ 이어야 한다. 이 조건을 식 (48)에 적용하면

$$(C_1 + \beta) a_{aa} + \frac{2}{3} \leq \left(-C_1 C_i + \frac{3}{4}\right) \left(a_{2a}^2 - \frac{A_2}{3}\right) \quad (51)$$

Table 1 Near-wall behaviour of processes in the Reynolds-stress equations.

	P_{ij}	d_{ij}^p	d_{ij}^v	$\phi_{ij} + d_{ij}^p$	ϵ_{ij}
$\overline{u^2}$	$O(y^3)$	$2\nu\overline{b_1^2} + 12\nu\overline{b_1 c_1}y + \dots$	$O(y^3)$	$-4\nu\overline{b_1 c_1}y + \dots$	$2\nu\overline{b_1^2} + 8\nu\overline{b_1 c_1}y + \dots$
$\overline{v^2}$	0	$12\nu\overline{c_2^2}y^2 + \dots$	$O(y^5)$	$-4\nu\overline{c_2^2}y^2 + \dots$	$8\nu\overline{c_2^2}y^2 + \dots$
$\overline{w^2}$	0	$2\nu\overline{b_3^2} + 12\nu\overline{b_3 c_3}y + \dots$	$O(y^3)$	$-4\nu\overline{b_3 c_3}y + \dots$	$2\nu\overline{b_3^2} + 8\nu\overline{b_3 c_3}y + \dots$
\overline{uv}	$O(y^4)$	$6\nu\overline{b_1 c_2}y + \dots$	$O(y^4)$	$-2\nu\overline{b_1 c_2}y + \dots$	$4\nu\overline{b_1 c_2}y + \dots$

이고 $\overline{u_a u_a} = 0$ 일 때 $a_{aa} = -2/3$ 이므로

$$(C_1 + \beta) - 1 \geq \left(-C_1 C_i + \frac{3}{4} \right) \left(\frac{A_2}{2} - \frac{2}{3} \right) \quad (52)$$

이 된다. 식 (52)의 우변 최대값은 A_2 가 최대일 때이므로 $(A_2)_{\max} = 8/3$ 을 대입하면 식 (52)는

$$(C_1 + \beta) - 1 \geq \left(-C_1 C_i + \frac{3}{4} \right) \left(\frac{2}{3} \right) \quad (53)$$

이 된다. 한편 β 는 0.5~1.5의 값을 갖는데 C_i 의 극한조건을 위해서는 $\beta_{\min} = 0.5$ 을 대입하여 C_i 를 구하면

$$C_i = -\frac{3}{2} (C_1 - 1) \quad (54)$$

이 되고 C_1 의 등방성 극한값 1.8을 대입하면

$$C_i = -\frac{2}{3} \quad (55)$$

가 되어 Sarkar와 Speziale⁽¹⁵⁾가 $\epsilon_v^0 = 2\delta_v \epsilon / 3$ 을 사용하여 유도한 경우와 같은 결과가 얻어진다.

2.6 난류운동에너지 방정식 및 소멸률 방정식 모형

레이놀즈응력 방정식 모형에서는 난류운동에너지가 $k \equiv \overline{u_i u_i} / 2$ 로 계산되기 때문에 별도의 난류운동에너지 방정식을 풀 필요는 없지만, 대수응력모형에서는 레이놀즈응력들로부터 난류운동에너지가 정확히 알려지지 않기 때문에 난류운동에너지 방정식을 해석해야만 한다. 대수응력모형에서 사용한 난류운동에너지 방정식은 일반적으로 사용하는 표준형 모형과 같으나 본 연구에서는 압력확산항을 고려하였다.

압력확산항은 전체적인 크기는 작지만 벽인접부에서 영향이 크기 때문에 이 항을 정확히 고려해야 타당성 있는 난류운동에너지 배분항들을 얻을 수 있다. 이 항에 대해서는 신과 최⁽³⁶⁾가 저레이놀즈수 $k-\epsilon$ 모형의 개발에서 사용한 다음 식을 적용하였다.

$$\Pi_k = -\frac{\partial}{\partial x_k} \left(0.5 \nu f_{wk} \frac{k}{\epsilon} \frac{\partial \epsilon}{\partial x_k} \right) \quad (56)$$

여기서 $f_{wk} = \exp[-(y^+ / 9.0)]$ 이다. 한편, 난류확산항에 대해서는 식 (46)으로 주어진 C_s 모형계수를 적용하였다.

난류운동에너지 소멸률 ϵ 방정식은 2 방정식 모

형과 2차 모멘트 모형 모두에서 난류의 길이척도에 관한 관계식으로 반드시 해석되어야 하는 식이다. ϵ 방정식 모형은 신과 최⁽³⁶⁾에 의해서 개발된 저레이놀즈수 다중 생성물 모형을 수정하여 사용하였다.

2방정식 모형과 2차 모멘트 모형에 적용되는 ϵ 방정식은 궁극적으로 난류확산항과 구배생성항 P_ϵ^2 을 처리하는데 있어서 약간의 차이가 있다. 저레이놀즈수 $k-\epsilon$ 모형에서 난류확산항 모형은 일반적으로 Boussinesq의 구배형 모형을 사용하고 난류프란틀수는 $\sigma_\epsilon = 1.3\sigma_k$ 를 사용한다. 한편, 2차 모멘트 모형에서는 Daly와 Harlow⁽³⁴⁾의 제안에 따라

$$T_\epsilon = -\frac{\partial}{\partial x_k} \left(C_\epsilon \frac{k}{\epsilon} \overline{u_k u_i} \frac{\partial \epsilon}{\partial x_i} \right) \quad (57)$$

으로 사용하였다. 이 경우 C_ϵ 는 Launder 등⁽²⁹⁾이 제시한 0.18을 보통 사용하여 왔다. 그러나 이 값은 고레이놀즈수 구역에서 타당한 값이므로, 본 연구에서는 난류운동에너지 방정식의 난류확산항 모형을 고려하여

$$C_\epsilon = \frac{0.18}{0.5[1 + (\tanh(y^+ / 220))^3]} \quad (58)$$

과 같이 모형화 하였다.

구배생성항 P_ϵ^2 는 Rodi와 Mansour⁽³⁷⁾의 모형식을 확장하여 다음의 식을 사용하였다.

$$P_\epsilon^2 = \nu \frac{k}{\epsilon} \left[C_{\epsilon 3}^2 \overline{u_k u_i} U_{i,j} + C_{\epsilon 3}^2 (k_{,i} U_{i,j} + k_{,j} U_{i,i}) \right] U_{i,k} \quad (59)$$

완전 발달된 평판유동에서 식 (59)는

$$P_\epsilon^2 = C_{\epsilon 3}^2 \nu \frac{k}{\epsilon} \overline{v^2} (U_{,yy})^2 + C_{\epsilon 3}^2 \nu \frac{k}{\epsilon} k_{,y} U_{,y} U_{,yy} \quad (60)$$

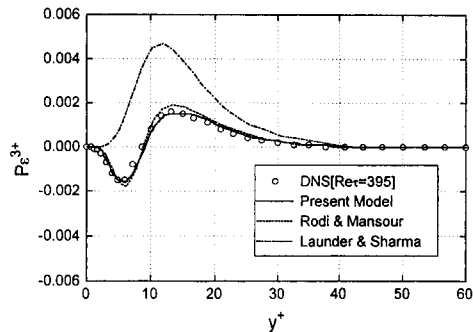


Fig. 12 Comparison of P_ϵ^2 production model in channel flow.

와 같이 된다. 그런데 벽면 즉, $y \rightarrow 0$ 이면 식 (60)의 우변 첫째항은 $(y^+)^6$ 에 비례하고, 두번째 항은 $(y^+)^3$ 에 비례하게 된다. 저레이놀즈수 $k-\epsilon$ 모형에서와 같이 벽극한조건을 만족시켜주기 위하여 두번째항의 계수 $C_{\epsilon 3}^2$ 를 $C_{\epsilon 3}^2/[1-\exp(-y^+/C_d)]$ 로 수정하면 식 (60)은 $y \rightarrow 0$ 에서 $(y^+)^2$ 에 비례하게 된다. DNS 자료들을 이용하여 계수들을 선정하면 $C_{\epsilon 3}^1=0.16$, $C_{\epsilon 3}^2=0.004$, $C_d=4.0$ 이 된다. Fig. 12는 식 (60)에 의한 구배생성항 P_ϵ^3 모형을

나타내는데 비교적 DNS 자료에 잘 일치하는 것을 볼 수 있다. 따라서 본 연구의 2차 모멘트 모형에 사용되는 난류운동에너지 소멸률 방정식은 이론적인 배경이 다른 모형들보다 분명하고, 모형화된 항들의 일반성도 충분하기 때문에 3차원 유동장으로서의 확장도 가능하다는 것을 알 수 있다.

본 연구에서 사용한 저레이놀즈수 ϵ 방정식 모형을 요약하면 Table 2와 같다.

Table 3 Present low-Reynolds-number ϵ equation model.

Process	Model
ϵ	$\frac{D\epsilon}{Dt} = D_\epsilon + \Pi_\epsilon + T_\epsilon + P_\epsilon^1 + P_\epsilon^2 + P_\epsilon^3 + P_\epsilon^4 - \Gamma$
Π_ϵ	$C_{\epsilon 6} \nu \frac{\partial}{\partial x_k} \left[(1 - f_{wk}) \frac{\epsilon}{k} \frac{\partial k}{\partial x_k} \right] f_{wk} f_{we}$
T_ϵ	$\frac{\partial}{\partial x_k} \left(C_\epsilon \frac{k}{\epsilon} \overline{u_k u_l} \frac{\partial \epsilon}{\partial x_l} \right)$
P_ϵ^1	$\frac{2f_{w1}}{1 + 1.5 u_2^2/k} \frac{P_k \epsilon}{k}$
P_ϵ^2	$C_{\epsilon 2} [1 - \exp(-y^+/4.7)] \frac{P_k \epsilon}{k}$
P_ϵ^3	$\nu \frac{k}{\epsilon} [C_{\epsilon 3}^1 \overline{u_k u_l} U_{i,l} + C_{\epsilon 3}^2 (k_{,j} U_{i,k})] U_{i,kj}$
P_ϵ^4	$C_{\epsilon 4} [1 - \exp(-y^+/4.6)]^3 f_{e1}(R_t) \frac{\epsilon^3}{k}$
Γ	$C_{\epsilon 5} [\tanh(y^+/7.2)]^2 f_{e1}(R_t) f_{e2}(R'_p) \frac{\epsilon^2}{k}$

where ;

$$f_{e1}(R_t) = 1 - 0.3 \exp[-(R_t/6)^2]$$

$$f_{e2}(R'_p) = \exp(R'_p{}^3)$$

$$R'_p = \frac{P_k/\epsilon(1+0.47f_{w2})}{0.3R_t^{0.5}}$$

$$f_{w2} = \frac{2f_{w1}}{1 + 1.5 u_2^2/k}$$

$$f_{w1} = \exp[-(R_t/83)^2]$$

$$f_{wk} = \exp[-(y^+/9.0)^2]$$

$$f_{we} = 1 - 1.3 \exp(-y^+/0.4)$$

이때 사용된 모형계수들은 Table 3과 같다.

Table 3 Coefficients of the low-Reynolds-number ϵ equation model

$C_{\epsilon 2}$	$C_{\epsilon 3}^1$	$C_{\epsilon 3}^2$	$C_{\epsilon 4}$	$C_{\epsilon 5}$	$C_{\epsilon 6}$
1.44	0.16	$0.004/[1-\exp(-y^+/4.0)]$	3.1	5.02	0.6

4. 저레이놀즈수 2차 모멘트 난류모형의 검증을 위한 유동해석

4.1 검증을 위한 유동

새로 개발된 저레이놀즈수 2차 모멘트 난류모형 즉, 레이놀즈응력 방적식 모형(이후는 RSM)과 대수응력모형(이후는 ASM)의 정확성을 시험하기 위한 유동으로 본 연구에서는 완전 발달된 2차원 평행 평판유동을 선정하였다. 이 유동장에 본 연구에서 개발된 모형들과 기존의 난류모형들을 적용하여 평균속도, 레이놀즈응력, 난류운동에너지 그리고 난류운동에너지 소멸률 분포 등을 해석하여 비교하였다. 한편, 이 유동은 DNS 자료들을 이용해 개발된 난류모형이 2차원 유동에서 평균속도 분포와 레이놀즈응력 분포를 정확히 예측해줄 수 있는지의 여부와 난류모형들이 벽인접부에서 적절히 거동하는지 살펴보기 위한 시험이 된다.

Fig. 13은 완전 발달된 2차원 평행 평판유동 형상과 좌표계를 나타낸다. 이 평판유동에서는 주유동방향 속도를 U , 벽면에 수직한 방향 속도를 V , 지면에 수직한 방향속도를 W 라 하였다. 본 연구에서는 해석결과들을 DNS 자료와 비교하기 위하여 레이놀즈수를 $Re_\tau=180$ 과 395 로 변환시키며 해석하였다. 여기서 $Re_\tau (\equiv u_\tau H / (2\nu))$ 는 벽마찰속도와 평판넓이의 반을 근간으로 한 레이놀즈수이며, 일반적으로 사용되는 평균속도와 평판의 넓이를 기준으로했을 때 $Re_\tau=180$ 과 395 는 각각 $Re=11,200$ 과 $27,500$ 에 해당한다.

4.2 레이놀즈수 2차 모멘트 모형의 검증

저레이놀즈수 2차 모멘트 모형으로 완전 발달된 2차원 평판유동을 해석하여 얻어진 k^+ 분포, ϵ^+ 분포, $\overline{uv^+}$ 분포 등은 저레이놀즈수 $k-\epsilon$ 모형으로 얻은 것보다 잘 맞지 않는다. 그것은 $k-\epsilon$ 모형에서

는 압력-변형률 항이 0이 되어 이 항을 모형화할 필요가 없으나 2차 모멘트 모형에서는 이 항들을 모형화해야 하는데, 비록 개선된 모형이라도 이를 정확히 모형화할 수 없고 또 부가하여 ϵ_{ij} 모형도 필요한데 이 또한 정확히 모형화하기 어렵기 때문이다. 2차원유동에서 2차 모멘트 모형이 $k-\epsilon$ 모형과 같이 정확한 유동해석 결과를 주지 않는다 하더라도 이것은 큰 문제가 안된다. 왜냐하면 저레이놀즈수 2차 모멘트 난류모형은 복잡한 3차원 유동 해석을 위해서 만들어졌기 때문이다. 난류유동 구조의 특성상 $k-\epsilon$ 모형은 복잡한 3차원 유동을 정확히 예측할 수 없기 때문에 2차 모멘트 모형의 적용은 복잡한 유동에서 그 가치가 드러난다. 그러나 이와 같이 복잡한 3차원 유동에서 난류모형을 시험하기 전에 2차원 유동에서 그 모형계수들을 확정할 필요가 있다. 본 2차원 유동해석은 난류모형계수의 확정에 그 의의를 두고 있으며 실제적 모형검증은 3차원 시험유동에서 시행되어야 한다. 신⁽²³⁾은 3차원 난류유동의 대표적인 시험유동인 정사각단면의 180° 곡덕트 유동해석에 본 연구에서 개발된 저레이놀즈수 2차 모멘트 난류모형이 저레이놀즈수 $k-\epsilon$ 모형보다 월등히 우수함을 보여주었다.

본 연구에서는 레이놀즈응력 분포에 가장 큰 영향을 미치는 압력-변형률항의 난류모형계수 C_1 과 C_2 가 벽인접부에서 모두 변하게 되어 있다. 본 해석결과와 비교를 위해 선택한 모형은 Launder와 Shima⁽⁹⁾ (이후는 LSh), Lai와 So⁽¹²⁾(이후는 LSo) 모형인데, 이 모형들 역시 난류모형계수 C_1 과 C_2 가 벽인접부에서 변하게 되어 있다. 이 두 모형은 1990년 이전까지 제시된 모형들 중에서 정확성과 일반성이 가장 뛰어난 모형들이라고 평가받고 있다.

LSh는 압력-변형률항 모형으로써 표준모형들 즉, ϕ_{i1} 은 식 (3), ϕ_{i2} 는 식 (24), ϕ_{i1}^* 과 ϕ_{i2}^* 는 식 (30)과 (31)를 사용하였으며 그 모형계수들은 다음과 같이

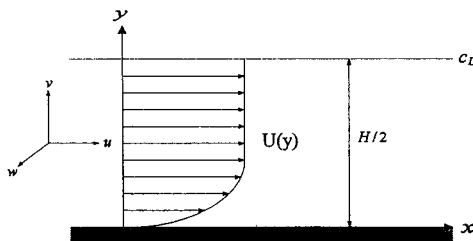


Fig. 13 Geometry of a tested channel flow

$$C_1 = 1 + 2.58AA_2 \frac{1}{4} [1 - \exp(- (0.0067R_\tau)^2)] \quad (61)$$

$$C_2 = 0.785A^{\frac{1}{2}} \quad (62)$$

$$C_1^* = -\frac{2}{3}C_1 + 1.67 \quad (63)$$

$$C_2^* = \max \left[\frac{2}{3}(C_2 - 1) + 0.5, 0 \right] / C_2 \quad (64)$$

으로 사용하였으나, LSh 모형은 2-성분 난류극한 조건을 만족시키지 못하는 것으로 알려져 있다.

LSo는 비등방성 텐서의 불변항들을 사용하지 않고, 압력-변형률항을

$$\phi_{ij}^* = \phi_{ij1} + \phi_{ij2} + \phi_{ij}^{*LS} \quad (65)$$

$$\begin{aligned} \phi_{ij}^{*LS} = & \phi_{ij1} - \frac{\epsilon}{k} (\overline{u_i u_k n_k n_j} + \overline{u_j u_k n_k n_i}) \\ & + \alpha^* \left(P_{ij} - \frac{2}{3} \delta_{ij} P \right) \end{aligned} \quad (66)$$

으로 사용하였다. 여기서 ϕ_{ij1} 은 식 (3), ϕ_{ij2} 는 식 (22)와 같다.

식 (65)을 사용하면 난류모형계수 C_1 과 C_2 결국

$$C_1 = 1 - f_{wi}^{*LS} \quad (67)$$

$$C_2 = \alpha \left(1 - \frac{\alpha^*}{\alpha} f_{wi}^{*LS} \right) \quad (68)$$

과 같이 되어 C_1 과 C_2 가 벽 부근에서 변하는 형상을 갖는다. 식 (67), (68)에서 $f_{wi}^{*LS} = \exp[-(R_i/150)^2]$, $\alpha = (8 + \gamma_2)/11$, $\alpha^* = 0.45$, $\gamma_2 = 0.4$ 이다.

평판유동에 대한 시험검증은 $Re_\tau = 395$ 와 180에 대해 수행하였고, 그 결과들을 DNS 자료와 비교하여 본 2차 모멘트 모형 연구에서 주목적으로 하고 있는 이론적으로 새로 모형화된 항들이 실제유동장에서 적절히 거동하는지 알아보았다. 또한, LSh와 LSo의 레이놀즈응력 방정식 모형에 의한 해석결과와 비교하여 본 2차 모멘트 모형의 타당성 여부를 검토하였다.

Fig. 14는 $Re_\tau = 395$ 인 경우 본 RSM으로 예측된 $\overline{u^2}/k$, $\overline{v^2}/k$, $\overline{w^2}/k$ 을 나타낸다.

$\overline{v^2}/k$ 을 제외하고 $\overline{u^2}/k$ 와 $\overline{w^2}/k$ 는 DNS 자료와 다소 차이를 나타내고 있음을 볼 수 있다. 즉, 앞에서 유도된 모형계수들에 의해서 해석을 수행하면

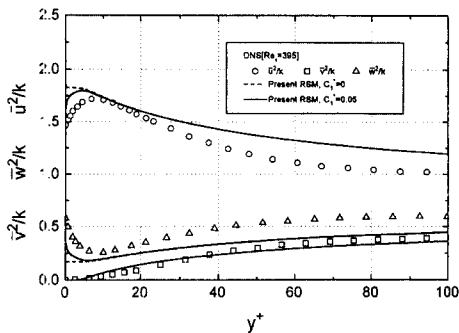


Fig. 14 Normal Reynolds stresses normalized by k

그림에서 점선과 같은 결과를 얻는다. 본 모형에 대한 이러한 예측결과는 x 와 z 방향 사이에서 발생하는 수송효과에 의해 발생한다고 추측된다. 이 문제를 해결하기 위하여 본 연구에서는 Launder와 Tselepidakis⁽¹⁸⁾가 제안한 것처럼 레이놀즈응력 방정식에 다음과 같은 항을 포함시켰다.

$$\begin{aligned} & -C_1^* [2a_{ij} + (a_{pq} n_p n_q \delta_{ij} - \frac{3}{2} a_{pi} n_p n_j \\ & - \frac{3}{2} a_{pj} n_p n_i)] (\epsilon - \tilde{\epsilon}) \end{aligned} \quad (69)$$

여기서 $\tilde{\epsilon} = \epsilon - 2\nu(\partial\sqrt{k}/\partial x_i)^2$ 으로 벽에서는 영이지만 $y^+ > 10$ 에서는 ϵ 과 거의 같아지기 때문에 식 (69)에 의한 항은 벽인접부에서만 타당하다는 것을 곧 알 수 있다. 본 연구에서는 $C_1^* = 0.05$ 로 하여 Fig. 14에서 실선으로 보여진 것과 같이 DNS 자료에 의한 변화 형상과 유사한 예측값을 얻을 수 있었다.

Fig. 15는 무차원 난류운동에너지 k^+ 분포를 나타낸다. DNS 자료와 비교할 때 본 RSM에 의한 예측값은 $y^+ \leq 10$ 에서 DNS 자료와 잘 일치하고 있으나 $y^+ \geq 30$ 에서는 그 분포가 DNS 자료보다 크게 예측되고 있다. 본 ASM에 의한 결과 역시 전반적으로 본 RSM에 의한 결과와 유사하나 $10 < y^+ < 20$ 에서 DNS 자료에 보다 접근되어 있음을 알 수 있다. LSh 모형은 $y^+ < 30$ 에서는 DNS 자료보다 작게 분포하지만 그 이후에 DNS 자료에 잘 일치하고 있고, LSo 모형은 전반적으로 차이가 크게 나타난다.

본 ASM으로 유동해석을 하는 경우에 있어서는 난류운동에너지 방정식을 필히 해석해야 되는데,

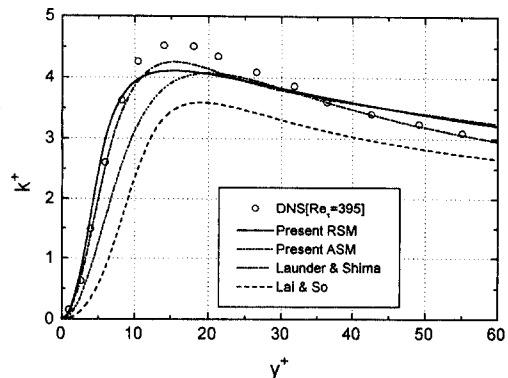


Fig. 15 Comparison of the distribution of k^+ for $Re_\tau = 395$.

본 연구에서는 난류확산항 모형계수로써 식 (46)을 난류운동에너지방정식에 그대로 사용하였다. 따라서 본 ASM에 의한 해석결과를 DNS 자료와 비교해 볼 때 모형계수 식 (46)은 비교적 타당성이 있음을 알 수 있었다.

Fig. 16은 신과 최⁽³⁶⁾가 제안한 다중 생성물 모형에 의한 ϵ 방정식을 2차 모멘트 모형에 알맞게 수정하여 예측한 무차원 난류운동에너지 소멸율 ϵ^+ 을 도시한 것이다. 본 RSM에 의한 해석결과는 $y^+ < 10$ 에서는 DNS보다 다소 크게, $10 \leq y^+ \leq 40$ 에서는 다소 작게 예측되지만 LSh와 LSo모형이 나타내지 못한 DNS 형상을 그대로 따르고 있다. DNS 자료와의 차이는 레이놀즈응력 방정식 모형의 정확성 결여에서 오는 것이라고 판단할 수 있다. 한편, 본 ASM에 의한 예측값은 DNS자료와 거의 일치하는 형상을 나타내고 있어 2차 모멘트 모형에 알맞게 수정된 ϵ 방정식이 타당성이 있음을 보여준다. 따라서 신과 최⁽³⁶⁾에 의해 개발된 다중 생성물 모형에 의한 새로운 ϵ 방정식 모형은 저레이놀즈수

$k-\epsilon$ 모형뿐만 아니라 2차 모멘트 모형에서도 그대로 적용될 수 있음을 본 해석결과들은 입증해주고 있다.

Fig. 17은 레이놀즈응력 $-\overline{uv}^+$ 에 대한 예측결과들을 나타낸 것인데, 본 RSM에 의한 예측치가 $y^+ \leq 30$ 에서 전반적으로 크게 예측된 것을 볼 수 있다. 본 ASM에 의한 예측값은 비교적 DNS 자료에 잘 일치하나 $y^+ \approx 15$ 부근에서 다소 치지는 형상을 나타내며 전체적으로 매끄럽지 못한 곡선을 이루고 있으며, LSh 모형은 $y^+ \geq 10$ 에서 DNS 자료보다 작게 예측되고 있다.

Fig. 18은 $Re_\tau = 180$ 인 경우에 대한 벽인접부 k^+ 에 대한 분포이다. 본 ASM에 의한 예측값이 DNS 자료에 가장 근접해 있는 것을 볼 수 있다. 본 RSM에 의한 결과는 DNS 자료와 다소 차이가 있지만 벽인접부에서는 기존의 모형들보다 타당성 있는 예측값을 나타내고 있다.

Fig. 19는 $Re_\tau = 180$ 인 경우에 대한 벽인접부 ϵ^+ 에 대한 분포인데, $Re_\tau = 395$ 인 경우와 유사한 분

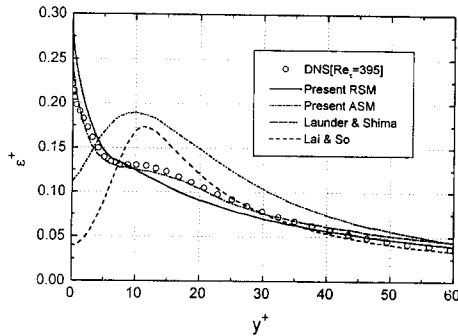


Fig. 16 Comparison of the distribution of ϵ^+ for $Re_\tau = 395$

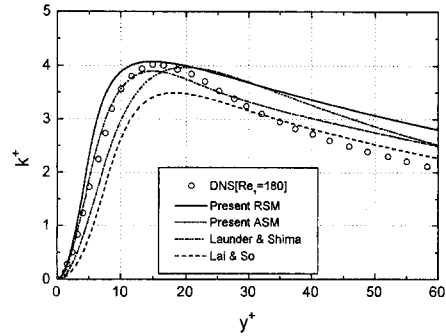


Fig. 18 Comparison of the distribution of k^+ for $Re_\tau = 180$

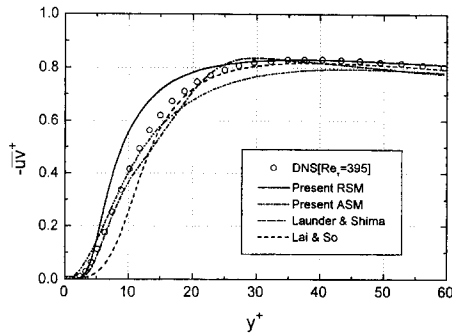


Fig. 17 Comparison of the distribution of $-\overline{uv}^+$ for $Re_\tau = 395$

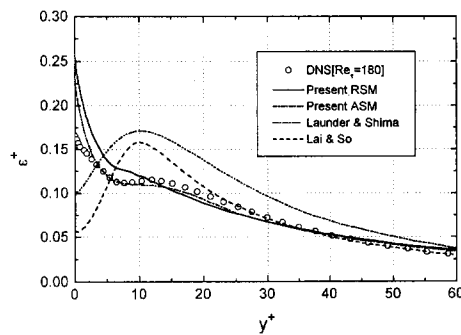


Fig. 19 Comparison of the distribution of ϵ^+ for $Re_\tau = 180$

포를 보여준다. 벽면에서 본 ASM과 RSM에 의한 예측값이 DNS 자료에 잘 일치하는 것을 알 수 있다.

$Re_\tau=180$ 의 난류특성치들에 대한 결과는 본 ASM에 비해 RSM에 의한 예측값이 전반적으로 DNS 자료와 차이가 있는 것을 볼 수 있다. 그러나 두 모형에 의해 예측된 값들이 $Re_\tau=180$ 의 DNS 자료를 추종하는 분포를 보여주고 있기 때문에 본 연구의 2차 모멘트 모형은 레이놀즈수의 변화에 대해 그 추종성을 충분히 가지고 있다고 판단된다.

Fig. 20은 현재까지 본 RSM에 의해 예측된 난류 특성치들을 이용한 $\epsilon_{ij}/\overline{u_i u_j} \epsilon$ 분포를 $Re_\tau=180$ 인 유동장 전구역에서 도시한 것이다. 우선 벽면 즉, $y^+=0$ 에서 본 해석에 의한 결과들은 정확하게 벽 극한거동을 만족시키고 있음을 보여준다.

$\alpha=1, \beta=1$ 인 경우에는 본 예측값과 DNS 자료가 잘 일치하고 있으며, $\alpha=2, \beta=2$ 일 때는 그 크기는 차이가 있지만 그 변화 경향이 유사한 것을 보여준다. 가장 심한 차이를 보이는 것은 $\alpha=1, \beta=2$ 일 때인데 이는 앞서 ϵ_{12} 에 대한 소멸률 텐서 모형의 정확성이 떨어지기 때문에 이미 예견된 결과이다.⁽²³⁾ 이러한 결과는 본 연구에서 기존의 모형보다 비교적 고차의 ϕ_{ij} 모형과 ϵ_{ij} 모형을 도입하였지만, 이 모형들 자체의 한계에서 오는 결과라고 해석할 수 있다. 즉, 단순형태의 텐서적인 모형의 형태로는 벽면에서 발생하는 압력-변형률 성분들과 소멸률 텐서 성분들을 정확히 모두 예측하기는 불가능하다는 것을 암시하는 것이다. $\alpha=3, \beta=3$ 인 경우는 본 해석에서 예측된 $\overline{w^2}/k$ 분포가 DNS 자료보다 작게 분포하여 DNS 자료와 차이가

크게 나타난 것으로 해석된다. 그러나 완전 발달된 평판유동에서 가장 관심을 갖는 $\alpha=2, \beta=2$ 인 경우 DNS 자료와 흡사한 경향을 갖는다는 것은 본 연구에서 예측한 레이놀즈응력들의 분포가 DNS 자료와 다소 차이가 나는데 반해 소멸률 텐서 모형의 우수성 때문인 것으로 생각된다. 그러나 여기에 가장 큰 영향을 준 것은 벽부근에서 ϵ 분포가 DNS 자료를 따르기 때문에 얻어진 결과로 해석할 수 있다.

본 연구의 2차 모멘트 모형은 비등방성이 강한 복잡한 3차원 유동장에 적용하기 위한 기초 연구로써, 새로이 시도된 난류모형에 비등방성 효과가 충분히 반영되도록 저속 등방성회귀항에 비선형항을 그리고 고속 평균변형항에 2차항 및 3차항을 포함시키는 한편, 새로운 비등방성 소멸률 텐서 모형을 적용하여 2차원 유동장에서 시험검증하였다. 완전 발달된 2차원 유동장은 단순유동장이기 때문에 비등방성 효과를 고려해서 모형화한 항들에 의한 영향이 크게 나타나지 않아, 예측된 난류특성치들이 벽면접부에서 ϵ 분포를 제외하고 기존의 모형들과 큰 차이가 없었다. 또한 본 저레이놀즈수 2차 모멘트 모형들이 비록 고차 모형이지만 일부 저레이놀즈수 $k-\epsilon$ 모형에 의한 예측결과와 비교할 때에도 2차원 단순유동장에서는 정확성면에서 오히려 좋지 않은 결과들을 보여주었다. 그럼에도 불구하고 본 연구의 2차 모멘트 모형에서 새로이 모형화된 항들에 의해 예측된 결과들은 실제유동장에서 타당성을 갖기 때문에 비등방성이 강한 복잡한 3차원 유동장 해석에서는 기존의 저레이놀즈수 $k-\epsilon$ 및 2차 모멘트 모형들보다 분명히 우수한 예측결과를 나타낼 수 있다고 생각된다.

5. 결론

본 연구에서 새로 개발된 저레이놀즈수 2차 모멘트 난류모형들을 시험 검증하기 위하여 완전발달된 2차원 평판유동을 선정하였고, 평판유동에 대한 해석결과들을 기존의 난류모형들에 의한 해석결과와 현재 제시되어 있는 DNS 자료들과 비교하여 다음과 같은 결과를 얻었다.

(1) DNS 자료는 벽면접부에 역등방성회귀 현상이 일어나는 것을 보여주고 있으며 이를 모형화하기 위해서는 C_1 이 음의 값을 가져야 한다. 신⁽²³⁾이 제안한 이상적 C_1 모형은 이 현상을 잘 모사하

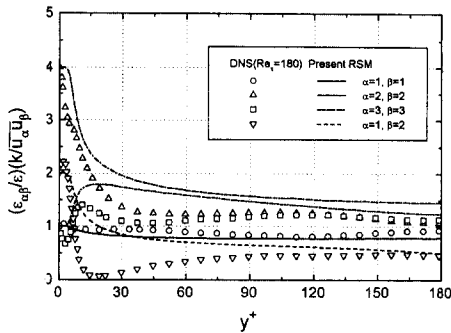


Fig. 20 Dissipation/stress profiles across the channel flow for present prediction.

이 모형을 실제 유동해석에 적용하면 음의 C_1 값 때문에 수렴성이 나빠진다. 따라서 본 연구에서는 C_1 모형으로 전 구역에서 양의 값을 가지며 그 변화형태가 이상형 모형과 같은 실용모형을 제안하였다.

(2) 비선형 등방성회귀 모형계수 C_i 은 $y \rightarrow \infty$ 에서 $-2/3$ 의 극한값을 가지나 벽부근에서는 변화하여 급격히 상승한다. 따라서 실제유동 해석에서 C_i 을 상수로 취급할 경우 $C_i=0.7\sim 0.8$ 정도의 양의 값을 택하는 것이 바람직하다.

(3) 대수응력모형에서는 대류항과 확산항을 고려하지 않고 레이놀즈응력을 대수적으로 계산하기 때문에 레이놀즈 응력 방정식 모형보다 C_1, C_2 값을 약간 크게 모형화하는 것이 레이놀즈응력 분포를 더 잘 예측해 준다.

(4) Hallbäck 등⁽¹⁹⁾의 레이놀즈응력 소멸률 모형을 유동중심부에서의 ϵ_{ij} 모형으로 사용하는 경우 기존의 등방성모형을 사용하는 경우보다 ϵ_{ij} 분포를 더 잘 예측해준다.

(5) 본 연구에서 개발한 저레이놀즈수 RSM 과 ASM은 k, ϵ 그리고 \overline{uv} 분포의 예측에서 일부 저레이놀즈수 $k-\epsilon$ 모형들보다 정확히 예측해주시지 못하였으나 기존의 2차 모멘트 모형들보다 개선된 결과를 보여주었다. 본 모형은 복잡한 비등방성 효과를 고려하여 모형화한 것인데 2차원 유동장은 비등방성 효과가 약하기 때문에 본 모형을 정확히 검증할 수 없다. 따라서 본 2차 모멘트 모형의 더 엄밀한 검증은 비등방성이 큰 복잡한 3차원 유동장에서 이루어져야 한다.

후 기

이 연구는 1994년 연암문화재단의 해외 교수과건 계획과 G7차세대 자동차 기술 개발 사업의 연구비 지원으로 이루어진 것이며 이에 대해 감사드린다.

참고문헌

- (1) Hanjalic, K. and Launder, B. E., 1976, "Contribution Towards a Reynolds-Stress Closure for Low-Reynolds-Number Turbulence", *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 74, pp. 593~610.
- (2) Prud'homme, M. and Elghobashi, S., 1983, "Prediction of Wall-Bounded Turbulent Flows with an Improved Version of a Reynolds-Stress Model", *Proc. 4th Turbulent Shear Flow Symposium*, Karlsruhe, 1.7.
- (3) Kebede, W., Launder, B. E. and Younis, B. A., 1985, "Large Amplitude Periodic Pipe Flow : a Second-Moment Closure Study", *Proc. 5th Turbulent Shear Flow Symposium*, Ithaca NY, 16.23
- (4) So, R. M. C. and Yoo, G. J., 1986, "On the Modelling of Low-Reynolds- Number Turbulence", *NASA CR-3994*.
- (5) Launder, B. E. and Tselepidakis, D. P., 1991, "Directions in Second-Moment Modelling of Near-Wall Turbulence", *AIAA Paper 91-0219*, 29th Aerospace Science Meeting, Reno, Nevada.
- (6) Shih, T. -H. and Lumley, J. L., 1986, "Second-Order Modelling of Near-Wall Turbulence", *The Physics of Fluids*, Vol. 29, pp. 971~975
- (7) Lumley, J. L. 1978, "Computational Modelling of Turbulent Flows", *Advances in Applied Mechanics*, Vol. 18, pp. 123~176.
- (8) Shih, T. -H and Mansour, N. N., 1990, "Modelling of Near-Wall Turbulence", *Proc. International Symposium on Engineering Turbulence Modelling and Measurements*, Dubrovnik Yugoslavia, 13.
- (9) Launder, B. E. and Shima, N., 1989, "Second-Moment Closure for the Near-Wall Sublayer : Development and Application", *AIAA Journal*, Vol. 27, pp. 1319~1325.
- (10) Gibson, M. M. and Launder, B. E., 1978, "Ground Effects on Pressure Fluctuations in the Atmospheric Boundary Layer", *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 86, pp. 491~511.
- (11) So, R. M. C., Lai, Y. G., Zhang, H. S. and Hwang, B. C., 1991, "Second-Order Near-Wall Turbulence Closures : a Review", *AIAA Journal*, Vol. 29, pp. 1819~1835.
- (12) Lai, Y. G. and So, R. M. C., 1990, "On Near-Wall Turbulent Flow Modelling", *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 221, pp. 641~673.
- (13) Kim, J., Moin, P. and Moser, R. D., 1987, "Turbulence Statistics in Fully Developed Channel Flow at Low Reynolds Number", *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 177, pp. 133~186.

- (14) Mansour, N. N., Kim, J. and Moin, P., 1988, "Reynolds-Stress and Dissipation-Rate Budgets in a Turbulent Channel Flow", *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 192, pp. 15~44.
- (15) Sarkar S. and Speziale C. G., 1990, "A Simple Nonlinear Model for the Return to Isotropy in Turbulence", *The Physics Fluids A*, Vol. 2, pp. 84~93.
- (16) Speziale, C. G., Gatski, T. B and Sarkar, S., 1992, "On the Testing for the Pressure-Strain Correlation of Turbulence Using Direct Simulations", *The Physics of fluids A*, Vol. 4, pp. 2287~2899.
- (17) Shin, T. -H. and Lumley, J. L., 1985, "Modeling of Pressure Correlation Terms in Reynolds Stress and Scalar Flux Equations", *Rep. FD-85-08*, Sigley School of Mech. & Aerospace Eng., Cornell Univ.
- (18) Launder, B. E. and Tselepidakis, D. P., 1991, "Process and Paradoxes in Modelling Near-Wall Turbulence", *Proc. 8th Turbulence Shear Flow Symposium*, Munich, 2, 29.1.1.
- (19) Hallbäck, M., Groth, J. and Johansson, A. V., 1990, "An Algebraic Model for Nonisotropic Turbulent Dissipation Rate in Reynolds Stress Closures", *The Physics of Fluids A*, Vol. 2 pp. 1859~1866.
- (20) Chou, P. Y., 1945, "On Velocity Correlations and the Solution of the Equations of Turbulent Fluctuation", *Quarterly of Applied Mathematics*, Vol. 3, pp. 38~54.
- (21) Rotta, J., 1951, "Statistische Theorie Nichthomogener Turbulenz", *Zeitschrift fur Physik*, Vol. 129, pp. 547~572.
- (22) 김승기, 정명균, 1993, "저속등방복귀 난류모형의 개발", 대한기계학회 춘계학술대회논문집 (II), pp. 317~320.
- (23) 신종근, 1995, "저레이놀즈수 2차 모멘트 난류모형의 개발 및 적용에 관한 연구", 고려대학교 박사학위 논문.
- (24) Launder B. E and Li S. -P., 1994, "On the Elimination of Wall-Topography Parameters from Second-Moment Closure", *The Physics of Fluids*, Vol. 6, pp. 999~1006.
- (25) Champagne, F. H., Harris, V. G. and Corrsin, S., 1970, "Experiments on Nearly Homogeneous Turbulent Shear Flow", *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 41, pp. 81~139.
- (26) Harris, V. G., Graham, J. A. and Corrsin, S., 1977, "Further Experiments in Nearly Homogeneous Turbulent Shear Flow", *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 18, pp. 657~687.
- (27) Chang, S. M., Humphrey, J. A. C. and Modavi, A., 1983, "Turbulent Flow in a Strongly Curved U-Bend and Downstream Tangent of Square Cross Sections", *PCH Physico Chemical Hydrodynamics*, Vol. 4, pp. 243~269.
- (28) Launder, B. E., Reece, G. J. and Rodi, W., 1975, "Progress in the Development of a Reynolds-Stress Turbulence Closure", *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 68, pp. 537~566.
- (29) Launder, B. E. and Morse, A. P., 1979, "Numerical Prediction of Axisymmetric Free Shear Flow with a Reynolds Stress Closure" in *Turbulent Shear Flow-1*, (ed. Durst et al), Springer Verlag. Heidelberg.
- (30) Noat, D., Shavit, A. Wolfshtein, M., 1970, "Interactions Between Components of the Turbulent Velocity Correlation Tensor", *Israel J. Tech.*, Vol. 8, pp. 259~269.
- (31) Crow, S. C., 1968, "Viscoelastic Properties of Fine-Grained Incompressible Turbulence", *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 33, pp. 1~20.
- (32) Reynolds, W. C., 1984, "Physical and Analytical Foundation, Concepts and New Directions in Turbulence Modelling and Simulation" in *Turbulence Models and their Applications*, Vol 2, (ed. Launder, Reynolds, Rodi), Eyrolles, Paris.
- (33) Tselepidakes, D., 1991, "Development and Application of a New Second-Moment Closure for Turbulent Flow Near Walls", Ph. D. Thesis, Faculty of Technology, University of Manchester.
- (34) Daly, B. J. and Harlow, F. H., 1970, "Transport Equations in Turbulence", *The Physics of Fluids*, Vol. 13, pp. 2634~2649.
- (35) Hanjalic, K., 1994, "Advanced Turbulence Closure Models: a View of Current Status and

- Future Prospects”, *Int. J. Heat and Fluid Flow*, Vol. 15, pp. 178~203.
- (36) 신종근, 최영돈, 1996, “저레이놀즈수 $k-\epsilon$ 모형에서 DNS 자료에 의한 ϵ 방정식의 다중생성율 모형”, *대한기계학회 논문집*, 제20권 제1호, pp. 304~320.
- (37) Rodi, W. and Mansour, N. N., 1993, “Low Reynolds Number $k-\epsilon$ Modelling with the Aid of Direct Simulation Data”, *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 250, pp. 509~529.