

〈논 문〉

등온가열 수평원관내 용해과정동안의 열적 불안정성

정재동* · 유호선** · 이준식***

(1996년 1월 19일 접수)

Thermal Instability during the Melting Process in an Isothermally Heated Horizontal Cylinder

Jaedong Chung, Hoseon Yoo and Joonsik Lee

Key Words : Melting(용해), Thermal Instability(열적 불안정성), Multi-Cellular Flow(다중셀 유동), Enthalpy Method(엔탈피 방법)

Abstract

The constrained melting inside an isothermally heated horizontal cylinder has been repeatedly investigated in many studies only for the moderate Rayleigh numbers. This study extends the range of Rayleigh numbers to systematically investigate the transition during melting processes, especially focusing on the complex multi-cellular flow pattern and thermal instability. The enthalpy-porosity formulation, with appropriate source terms to account for the phase change, is employed. For low Rayleigh numbers, initially developed single-cell base flow keeps the flow stable. For moderate Rayleigh numbers, even small disturbances in balance between thermal buoyance force and viscous force result in branched flow structure. For high Rayleigh numbers, Benard type convection is found to develop within a narrow gap between the wall and the unmelted solid. The marginal Rayleigh number and the corresponding wave number are in excellent agreement with those from linear stability theory.

————— 기 호 설 명 —————	
a	: 임계 파수
C_p	: 비열
d	: 임계 액상간격
f_i	: 액상분율
h	: 현열 엔탈피
h^-	: 무차원 엔탈피, $h^+ = \{ C_p (T - T_m) \} / \{ C_{pl} (T_w - T_m) \}$
h_{sf}	: 용해잠열
h_ξ, h_η	: 기하학적계수, $h_\xi = (x_\xi^2 + y_\xi^2)^{1/2}$, $h_\eta = (x_\eta^2 + y_\eta^2)^{1/2}$

J	: Jacobian
p	: 압력
Pr	: Prandtl 수, ν/α
R	: 반경방향좌표
R_w	: 원관의 반경
Ra	: Rayleigh 수, $g\beta(T_w - T_m)R_w^3/(\nu\alpha_L)$
Ra _{eff}	: 유효 Rayleigh 수, $Ra(d/R_w)^3$
Sc	: 과냉각 정도, $C_{ps}(T_m - T_0)/h_{sf}$
Ste	: Stefan 수, $C_{pl}(T_w - T_m)/h_{sf}$
T_0	: 초기온도
T_m	: 용점온도
T_w	: 가열온도
u, ν	: (x, y) 방향의 속도
u^+, ν^+	: 무차원속도, $u^+ = (uR_w)/\alpha_L$, $\nu^+ = (\nu R_w)/\alpha_L$

*회원, 서울대학교 기계공학과 대학원

**회원, 숭실대학교 기계공학과

***회원, 서울대학교 기계공학과

- α_i
- u_ϵ, u_η : 공변속도성분
- U, V : 관변속도성분
- x, y : 직교좌표
- 그리스문자**
- α : 열확산율
- $\alpha_\epsilon, \alpha_\eta$: 기하학적계수, $\alpha_\epsilon = h_\epsilon h_\eta^2 / J$, $\alpha_\eta = h_\eta h_\epsilon^2 / J$
- $\beta_\epsilon, \beta_\eta$: 기하학적계수, $\beta_\epsilon = \lambda h_\eta / J$, $\beta_\eta = \lambda h_\epsilon / J$
- Γ : 유효확산계수
- μ : 점성계수
- ν : 동점성계수
- ξ, η : 변환된좌표
- ρ : 밀도
- τ : 무차원시간, $\tau = Ste \cdot t^*$
- ϕ : 대표중속변수
- 상첨자**
- $+$: 부차원
- $*$: 고상에서의 물성치 대 액상에서의 물성치의 비
- 하첨자**
- L : 액상
- S : 고상
- W : 원관벽

1. 서 론

등온으로 가열되는 수평원관내에 고정된 상변화 물질의 용해과정은 상당한 기간동안 다양한 형태의 실험적, 수치적 연구가 수행된 잘 알려진 문제이다. 같은 문제가 반복적으로 관심의 대상이 된 이유는 각 연구의 결과 사이에 상반되는 차이점이 있었기 때문이다. 구체적으로, Saitoh와 Hirose,⁽¹⁾ 서정세 등⁽²⁾은 원관하부 대칭선 부근 상경계면이 오목한 수치해결을 보고하였음에 비하여, Rieger 등,⁽³⁾ Ho와 Viskanta,⁽⁴⁾ 유효선과 노승탁⁽⁵⁾은 상경계면이 볼록한 실험 또는 수치해석 결과를 제시하였다. 상경계면의 형상은 용해에 수반되는 유동 및 열전달과 직결되어 있음을 고려하면 차이의 원인을 규명하는 것은 용해특성의 이해를 위하여 중요한 요소이다. 이러한 맥락에서 최근 원관내 용해 과정에 있어서 다중해의 존재를 확인한 Ro와 Kim⁽⁶⁾의 연구는 의미있는 진전임에 분명하다. 다만 그들은 반복적인 수치계산을 통하여 이전 연구에서 나타난 용해형태가 수치해석적으로 모두 가능함을

보이는 데는 성공하였으나, 상반결과가 초래되는 본질적인 원인을 설명하지는 못하였다.

원인규명이 미흡한 사실과 관련하여 지금까지 수행된 연구를 개관할 때, 제한된 범위의 Ra수를 취급한 점과 경계추적 이동좌표계 또는 이와 유사한 성질의 좌표변환 방법에만 의존한 점 등 두 개의 공통점이 발견된다. 전자는 대부분의 연구에서 잠열축열조의 용해조건에 대한 해석을 수행하였기 때문이며, 후자는 과도적인 상경계면의 이동을 현시적으로 처리하는 것이 용이하기 때문으로 보인다. 그러나, 용해과정의 주도적인 열전달기구는 자연대류임을 고려할 때, 용해에 수반되는 천이현상을 보다 체계적으로 고찰하기 위해서는 자연대류의 특성인자인 Ra수의 범위를 보다 확장할 필요가 있다. 이 필요성은 문제정격이 유사한 동심원관사이 환상공간내의 자연대류에 관한 연구⁽⁷⁾에서, 유동의 교란은 Pr수가 작은 경우 수력학적 불안정성에 의해, 반대의 경우 열적 불안정성에 의해 발생한다는 사실로부터 뒷받침된다. 즉 종래의 연구에서는 Pr수가 큰 물질(Pr~50)이 대상임에도 비교적 낮은 Ra수에 국한하여 해석을 수행하였기 때문에 열부력이 점성력에 비하여 미약한 용해초기에는 유동교란이 가지적으로 나타날 수 없었다. 결과적으로 용해가 진행되어 액상간격이 상당히 넓어진 이후에야 비로소 이중 또는 삼중 유동셀이 나타났기 때문에 상경계면의 형상이 상이한 원인과 원관하부 액상내의 유동형태를 연계시킬 수 없었다. 용해초기 원관하부의 열적 불안정성은 Ra수에 의존하며 상경계면의 형상은 유동형태와 직결되에도 불구하고, 높은 Ra수에 대한 연구결과가 전무하기 때문에 본 연구를 시도하게 되었다. 한편 해석방법의 관점에서, 경계추적 이동좌표계는 원관하부에 나타나는 다중유동셀로 인하여 상경계면이 매우 복잡한 형상일 때 격자생성에 따른 불확실성을 내포할 수 있다. 또한 좌표변환에 따라 상경계면은 고체경계로 취급되므로 Pr수가 큰 물질이 해석대상인 경우 용해초기 유동형태의 미세한 변화를 파악하는데 부적합할 수도 있다.

본 연구에서는 자연대류가 지배적인 조건하에서 상경계면의 형상과 같은 용해특성은 본질적으로 용해초기의 유동형태와 그 발달추이에 따라 결정된다는 사실에 기초하여 수평원관내 용해과정을 재조명하고자 한다. 특히 종래의 수치해석에서 취급되지 않았던 높은 Ra수에서 예상되는 용해초기 원관하

부의 다중 셀 유동과 열적 불안정성의 관계에 연구의 초점을 맞추었다. 해석방법의 다양화를 기하기 위하여 상경계면이 고체경계가 아니라 해석대상영역에 암시적으로 포함되는 엔탈피 방법을 채용하였다.

2. 해석

2.1 해석대상모델

해석대상은 Fig. 1에 개략적으로 도시되었듯이 용점 T_m 보다 높은 일정한 온도 T_w 로 유지되는 원관내부에 균일한 초기온도 T_0 로 고정된 채 충전되어 있는 고상의 상변화물질이 용해되는 과정이다. 수치해석시 엔탈피 방법에 의존한 점을 제외하면 비교의 편의를 위하여 공식화에 필요한 기본가정과 해석대상 상변화물질은 타 연구와 일치시켰다. 구체적으로 해석에 도입된 가정은 다음과 같다.

- 용해과정은 중력방향에 대하여 좌우대칭이며 2차원적으로 진행된다.

- 액체는 비압축성 뉴턴 유체이다.

- 자연대류는 층류유동이며 점성소산은 무시한다.

- Boussinesq 근사에 의존하되 고액상의 밀도차 등 물성치의 변화는 없다.

상변화물질은 n-Octadecane으로서 그 물성치는 Table 1에 요약되어 있다.

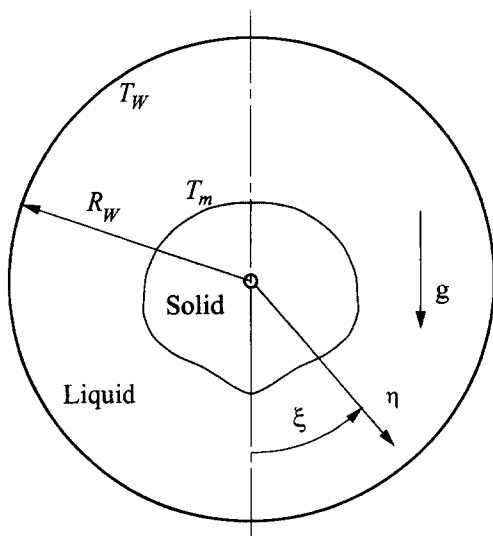


Fig. 1 Schematic diagram of the inward melting process in a horizontal cylinder.

Table 1 Thermophysical properties of n-Octadecane ($C_{18}H_{38}$)

Properties	Value
Melting temperature	28.18°C
Density	814 kg/m ³
Thermal expansion coefficient	$9.1 \times 10^{-4} K^{-1}$
Viscosity	$3.878 \times 10^{-3} kg/ms$
Latent heat	$2.4136 \times 10^5 J/kg$
Specific heat of solid	$1.9 \times 10^3 J/kgK$
Specific heat of liquid	$2.2 \times 10^3 J/kgK$
Thermal conductivity of solid	0.390W/mK
Thermal conductivity of liquid	0.157W/mK

2.2 엔탈피방법

상변화문제에 대한 수치해석은 이동격자계와 고정격자계에 의존하는 방법으로 대별될 수 있으며 타 연구에서 사용된 좌표변환방법은 전자에, 엔탈피 방법은 후자에 속한다. 각각의 접근방법, 유용성, 상호비교 등에 관해서는 이미 취급된 바 있기 때문에^(8,9) 반복을 피하였다. 다만 여기서는 본 연구에서 엔탈피 방법을 채용한 배경을 기술하고자 한다. 엔탈피 방법에서 상경계면의 이동은 액상분율의 변화로 해석에 암시적으로 반영된다. 따라서, 이 방법은 상경계면을 현시적으로 추적하는 점에 있어서는 좌표변환방법에 비하여 불리하지만, 상경계면이 고체경계로 취급되지 않으므로 액상내 유동형태의 미세한 변화를 파악하는 데는 유리할 수 있다. 원관내 용해초기와 같이 Pr수는 크고(점성력이 우세하고) 유동영역이 좁은 상태에서는 상경계면에서의 점착(no-slip)조건이 열부력에 의한 유동발생을 과도하게 억제할 수도 있기 때문이다. 특히 높은 Ra수인 경우 원관하부 액상내의 다중 유동셀로 인한 복잡한 굴곡형상 상경계면의 이동을 추적하여 매시간 스텝에서 반복적으로 격자계를 생성하기는 쉽지 않으며, 이 과정에 상당한 불확실성이 수반될 수 있다.

본 연구의 해석대상을 고려할 때 엔탈피 방법의 지배방정식은 극좌표계상에서 공식화되어야 한다. 그러나 좌표변환을 도입하면 극좌표계뿐 아니라 보다 일반적인 비직교좌표계에 대한 해석도 가능하므로 지배방정식은 기본적으로 직교좌표계상에서 공식화되었다. 즉 2차원 직교좌표계에서 일반화된 보존방정식은 다음과 같다.⁽¹⁰⁾

Table 2 Variables in the dimensionless governing equations

	ϕ^+	Γ^+	S^+
mass	1	0	0
x-momen- tum	u^+	$\text{Pr}\mu^*$	$-\frac{\partial p^+}{\partial x^+} - A \frac{(1-f_i)^2}{f_i^3}$
y-momen- tum	v^+	$\text{Pr}\mu^*$	$-\frac{\partial p^+}{\partial y^+} + \text{Ra} \cdot \text{Pr} \cdot h^+ - A \frac{(1-f_i)^2}{f_i^3}$
energy	h^+	$\frac{k^*}{C_p^*}$	$-\frac{1}{\text{Ste}} \frac{\partial}{\partial t^+} (\rho^* f_i)$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\phi) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u\phi - \Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v\phi - \Gamma \frac{\partial \phi}{\partial y}) = S(x, y) \quad (1)$$

해석의 일반화 및 특성인자의 영향을 현시적으로 파악하기 위하여 기호설명에 정의된 변수 및 인자의 함으로 지배방정식을 무차원화하면 질량, 운동량 및 에너지 방정식 각각에 대응하는 무차원 방정식의 구체적인 형태는 Table 2와 같이 정리된다. 여기서 지배방정식이 고액상의 구분 없이 전영역에 대하여 적용가능하다는 엔탈피 방법의 특징을 쉽게 확인할 수 있다. 즉 운동량 방정식은 임의의 큰 수 A 를 도입함으로써 생성항의 액상분율 $f_i(\rho_s = \rho_i)$ 이므로 체적분율과 질량분율은 일치)이 1이면 Navier-Stokes 방정식이, f_i 이 0이면 각 속도성분은 강제적으로 0이 되며, 에너지 방정식도 생성항을 통하여 용해잠열을 f_i 의 함수형태로 효과적으로 반영하고 있다. 이때 에너지 방정식의 종속변수는 현열 엔탈피(sensible enthalpy)임에 유의하여야 한다.

2.3 좌표변환

무차원화된 지배방정식을 비직교좌표계로 변환하기 위하여(Fig. 1 참조) 좌표변환

$$x = x(\xi, \eta), \quad y = y(\xi, \eta) \quad (2, 3)$$

을 도입하면 식 (1)은 다음과 같이 변환된다.

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t}(J\rho\phi) + \frac{\partial}{\partial \xi}(\rho U\phi - \frac{\alpha_\xi \Gamma}{h_\xi} \frac{\partial \phi}{\partial \xi}) \\ & + \frac{\partial}{\partial \eta}(\rho V\phi - \frac{\alpha_\eta \Gamma}{h_\eta} \frac{\partial \phi}{\partial \eta}) \\ & = JS(\xi, \eta) - \frac{\partial}{\partial \xi}(\frac{\beta_\xi \Gamma}{h_\xi} \frac{\partial \phi}{\partial \eta}) \end{aligned}$$

$$-\frac{\partial}{\partial \eta}(\frac{\beta_\eta \Gamma}{h_\eta} \frac{\partial \phi}{\partial \xi}) \quad (4)$$

여기서

$$U = \alpha_\xi u_\xi - \beta_\xi u_\eta, \quad V = \alpha_\eta u_\eta - \beta_\eta u_\xi \quad (5, 6)$$

$$\begin{aligned} u_\xi &= (x_\xi u^+ + y_\xi v^+) / h_\xi \\ u_\eta &= (x_\eta u^+ + y_\eta v^+) / h_\eta \end{aligned} \quad (7, 8)$$

이며 다른 기하학적 계수들은 기호설명에 정의되어 있다.

식 (2, 3)으로 표시된 좌표변환과 경계추적 이동 좌표계의 좌표변환⁽⁶⁾

$$x = x(\xi, \eta, t), \quad y = y(\xi, \eta, t) \quad (9, 10)$$

사이에는 본질적인 차이가 있음에 주목하여야 한다. 즉 전자는 해석을 위하여 선택적으로 도입되었으나 후자는 필수적이다. 좌표변환은 본 연구의 경우 지배방정식이 극좌표계상에서 공식화되었다면 불필요한 반면 후자에서는 용해의 진행에 따라 고액상 영역이 불규칙형상이 되므로 반드시 필요하다. 또한, 만일 후자에서 준정상상태(quasi-steady) 가정을 도입하면, 식 (9, 10)은 일견 식 (2, 3)과 일치한다. 그러나 전자에서는 고액상을 포괄하는 해석영역이 불변이기 때문에 좌표변환에 따른 계수는 일정함에 비하여, 후자에서는 상경계면의 이동에 따라 매시간 스템에서 고액상영역 각각에 대하여 계수는 다시 계산되어야 한다.

본 연구의 해석영역은 좌우대칭이므로 좌표변환은 영역의 우반부를 대상으로 수행되었다. 용해의 후반까지 고상으로 유지되리라 예상되는 위치에 미소반경의 가상반원을 설정하면 Fig. 1과 같이 아래위의 대칭선은 각각 $\eta=0, 1$ 에, 가상반원 및 원관 내벽은 각각 $\xi=0, 1$ 에 대응한다. 따라서 변환된 좌표계에서 경계조건은 다음과 같이 표시될 수 있다.

$$U=0, \quad \frac{\partial V}{\partial n}=0, \quad \frac{\partial h^+}{\partial n}=0 \quad \text{at } \eta=0 \text{ and } 1 \quad (11)$$

$$U=V=0, \quad h^+=1 \quad \text{at } \xi=1 \quad (12)$$

$$U=V=0, \quad \frac{\partial h^+}{\partial n}=0 \quad \text{at } \xi=0 \quad (13)$$

2.4 수치해석

지배방정식의 해를 구하기 위하여 검사체적근사에 의한 유한차분법으로 식 (4)를 이산화하였으며 SIMPLER 알고리즘에 의존하여 수치해석하였다. 엔탈피 방법의 핵심적인 요소인 각 검사체적에 대

한 액상분율 f_i 의 변화는 Voller와 Swaminathan⁽¹¹⁾에 의해 제안된 방법을 고액상의 비열이 다른 경우에 대하여 수정하여 적용하였다.

$$(\rho f_s)^{k+1} \cdot \left(\frac{\Delta V}{\Delta t} \frac{1}{Ste} \right) = -\sum a_{nb} h_{nb}^+ - a_p^k h_p^{+k} + (C_{pl} - C_{ps}) \frac{\Delta t}{\Delta V} (\rho h^+)^k + \frac{1}{Ste} \frac{\Delta t}{\Delta V} (\rho f_s)^k \quad (14)$$

$$f_i = 0 \text{ if } (f_i)^{k+1} < 0 \quad (15)$$

$$f_i = 1 \text{ if } (f_i)^{k+1} > 0 \quad (16)$$

여기서 삼첨자 k 는 시간 스텝, ΔV , a_{nb} , h_{nb}^+ 는 각각 검사체적의 체적, 이산화 방정식의 계수 및 인접 검사체적의 엔탈피이다.

상변화와 같은 비정상문제의 수치해석에서 결과의 격자계 의존성은 누차 지적된 바 있다.^(6,9) 본 연구에서는 용해말기까지 계산이 수행된 크지 않은 Ra수의 범위에 대해서는 반경 및 원주방향으로 36×42 , 36×52 , 36×62 , 36×72 인 격자계를 사용하여 수치실험을 수행하였으며, 36×52 이상에서는 결과의 차이가 별무함을 확인하였다. 다만, 용해초기의 거동에 초점을 맞춘 높은 Ra수의 경우에는 예상되는 복잡한 유동구조가 충분히 해상될 수 있도록 41×81 격자계를 사용하였으며, 원관하부에 격자를 집중배치하였다. Fig. 2는 각 경우에 사용된 격자계로서 좌반부는 전자에, 우반부는 후자에 대응한다.

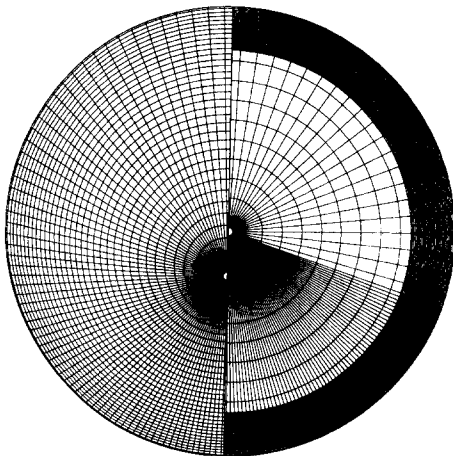


Fig. 2 Grid systems for full transient solution(left) and initial stage solution(right) for gallium ($Ra = 6.06 \times 10^5$, $Ste = 0.03912$, $Pr = 0.02158$ and $Sc = 0.007044$.)

3. 결과에 대한 고찰

3.1 타당성 검토

엔탈피 방법 및 좌표변환에 의존한 수치해석의 타당성을 검증하고 용해에 수반되는 복잡한 열유동 현상에 대한 해상력을 확인하기 위하여, 실험자료 및 다른 방법에 의한 수치해가 보고된 직사각형 용기내 2차원 용해문제 및 대표적인 수평원관내 용해문제에 대하여 수치계산을 수행하고 결과를 상호비교하였다.

좌벽이 가열되며 다른 벽면은 단열된 직사각형 용기내 Gallium의 용해문제에 대하여 42×32 격자계상에서 계산된 상경계면의 이동을 Gau와 Viskanta⁽¹²⁾의 실험 및 Viswanath와 Jaluria⁽⁹⁾의 이동격자계를 사용한 수치해와 비교한 것이 Fig. 3이다. 계산조건은 높이를 특성 길이로 취할 때 $Ra = 6.06 \times 10^5$, $Ste = 0.03912$, $Pr = 0.02158$, $Sc = 0.007044$ 로서 전술한 타 연구와 동일하다. 본 연구의 결과는 Viswanath와 Jaluria⁽⁹⁾의 수치해에 비하여 전체적으로 용해진행속도가 빠르지만 전반적인 상경계면의 위치 및 형상에 있어서는 정성적, 정량적으로 실험자료에 타당하게 접근한다. 다만 본 연구에 나타난 상경계면의 오차는 해석과정의 수치적 문제가 아니라 상경계면의 위치를 액상분율로부터 결정하는 데 기인한 당연한 결과로서 타 연구에서도 발견되는⁽⁹⁾ 엔탈피 방법의 특징이다.

대표적인 수평원관내 용해과정으로서 $Ra = 3.6 \times 10^5$, $Ste = 0.045$, $Sc = 0.004$ 인 경우에 대하여 온도 분포(좌반부) 및 유동형태(우반부)를 도시한 것이 Fig. 4이다. 이 결과는 기존의 수치해석에서 다중

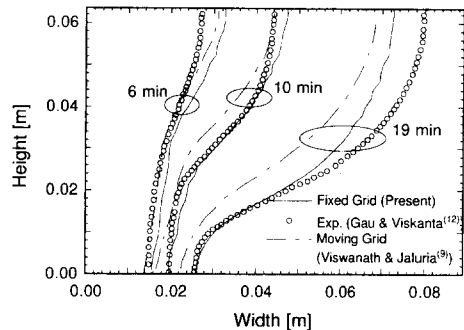


Fig. 3 Calculated and experimental phase interface at various times.

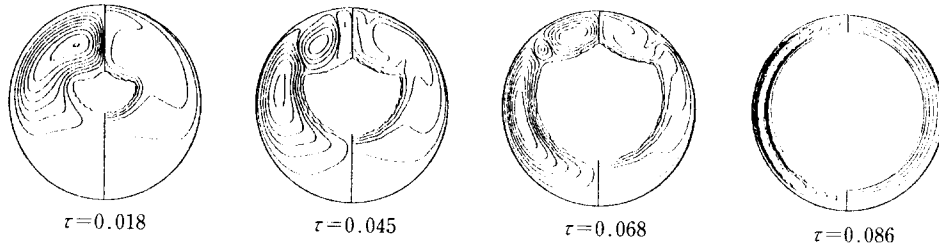


Fig. 4 The full transient solution for $Ra=3.6 \times 10^5$, $Ste=0.045$ and $Sc=0.004$

해를 구하기 위하여 시도되었던 유동 또는 온도장에 대한 인위적 조건이 부여되지 않은 상태에서 계산된 완전과도해(full transient solution)이다. 용해초기에는 하나의 유동 셀이 형성되고 액상영역의 간격이 증대됨에 따라 삼중 셀로 천이되며 용해말기에 다시 단일 셀로 융합되는 천이과정은 경계주적 좌표변환방법에 의한 결과⁽⁶⁾와 잘 일치한다. 또한 Fig. 5 에서 전체질량에 대한 용해질량의 비로 정의된 용해율의 시간에 따른 변화를 순수전도해($Ra=0$), Ho와 Viskanta의 실험 및 Ro와 Kim의 수치해와 비교하였다. 용해초기에는 열전도가, 후기에는 자연대류가 지배적인 정성적 경향은 이미 잘 알려진 사실과 부합되며, 전 용해과정에 걸쳐 실험 및 타 수치해와 정량적으로도 일치한다.

전형적인 비정상문제인 용해과정의 수치해석에서 본 연구의 결과가 실험은 물론 다른 해석방법에 의한 결과와도 일치하는 사실은 본 해석방법 및 과정이 타당함을 의미한다.

일반적으로 용해과정의 열전달특성은 시간에 따른 Nu수의 변화로 표현되어 왔다. 즉 순수전도에 대응하는 Nu수와 비교하여 자연대류가 열전달에

미치는 효과를 설명하고 있다. 그러나, Nu수는 Fig. 4 와 같은 다중 셀의 생성 및 소멸과는 거의 무관한 형태로 변화하기 때문에 유동구조에 대한 정보를 효과적으로 제공하지는 못한다. 당연한 사실이지만, 유동구조의 변화시점 및 유동강도를 파악하는 데는 유동함수의 최대 및 최소치를 추적하는 것이 대단히 유용하다. 구체적인 예로서 Fig. 4 에 대응하는 유동함수의 변화추이를 Fig. 6 에 도시하였다. 유동함수의 최소치(Fig. 6(a))로부터 다중 셀의 생성 및 단일 셀로의 융합시점은 각각 $\tau \approx 0.0187$ 및 0.0858 임을 쉽게 알 수 있으며, 유동

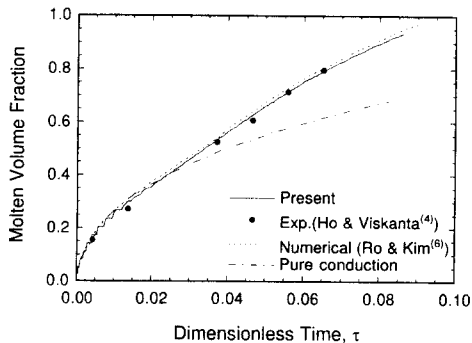


Fig. 5 The molten volume fraction as function of dimensionless time for $Ra=3.6 \times 10^5$, $Ste=0.045$ and $Sc=0.004$.

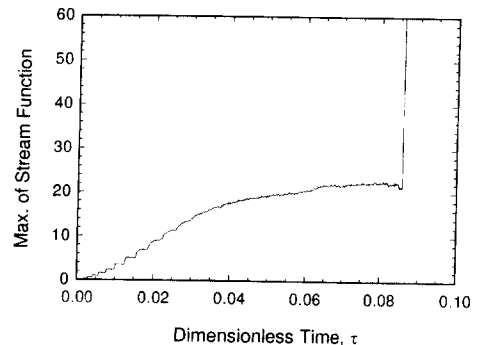
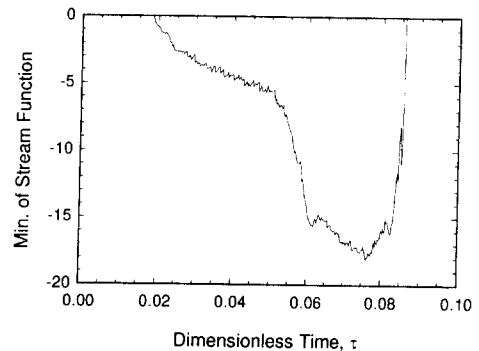


Fig. 6 The timewise variation of maximum and minimum values of the stream function.

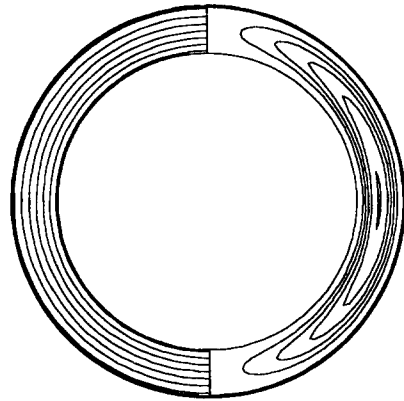
함수의 최대치 (Fig. 6(b))는 단일 셀로의 융합이 급속히 진행되며 유동강도도 급증함을 가지적으로 보여준다. 유동함수의 변화에서 나타나는 진동현상은 유동 셀 사이의 비정상 상호작용에 기인하는 것으로 보이며 Rieger 등⁽³⁾에 의해 보고된 바 있다.

3.2 유동형태에 대한 Ra수의 영향

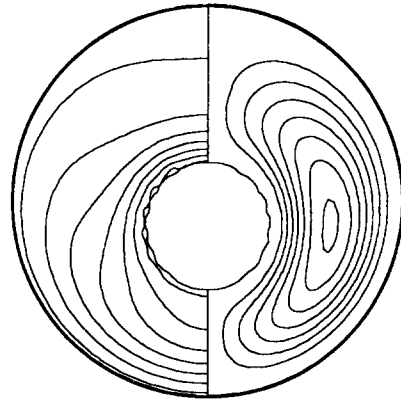
용해에 수반되는 유동에 대한 Ra수의 영향을 체계적으로 고찰하기 위하여 넓은 범위의 Ra수에 대하여 수치계산을 수행하였다. 구체적으로 본 연구에서는 $Ra=1.0 \times 10^4$, 3.6×10^5 , 1.0×10^6 , 5.0×10^6 , 1.0×10^7 , 3.0×10^7 등 6개 경우를 대상으로 하였으며 이 중 $Ra \geq 5.0 \times 10^6$ 인 범위는 타 연구에서 취급된 바 없다.

낮은 Ra수인 경우 ($Ra=1.0 \times 10^4$) 용해초기 상경계면은 Fig. 7(a)와 같이 원관과 거의 동심원의 형태이며, 자연대류의 기본유동(base flow) 즉 하나의 셀만이 존재한다. 다중 셀의 가능성을 확인하기 위하여 용해후기까지 계산하였으나 Fig. 7(b)와 같이 유동강도의 증대에 따라 등온선이 변형되고 상경계면 상부의 용해가 가속되는 등 자연대류의 영향은 나타나지만 유동형태의 극적인 변화는 없었다. 그러나 Ra수가 3.6×10^5 로 증가하면 Fig. 4에서 고찰하였듯이 기본유동-심층 셀-단일 셀로 천이하는 등 용해의 진행에 따라 유동형태는 판이하게 변화한다. 비교적 낮은 Ra수에 대한 유동형태의 이러한 변화추이는 타 연구^(6,13)에서도 이미 예측된 바 있다.

비교적 높은 Ra수 (1.0×10^6)에 이르면 유동형태에는 또다른 변화가 일어난다. 즉 Fig. 8에 도시되었듯이 용해초기 액상영역에는 이중 셀을 거쳐 사중 셀이 형성되지만, 시간의 경과에 따라 최종적으로 이중 셀로 천이된다. 이러한 유동형태의 변화는 일견 용해조건이 비슷한 ($Ra=1.2 \times 10^6$) Ro와



(a) $\tau=0.027$



(b) $\tau=0.158$

Fig. 7 Flow pattern and temperature distribution for $Ra=1.0 \times 10^4$, $Ste=0.045$ and $Sc=0.004$.

Kim⁽⁶⁾의 다중해 중 이차다중해(secondary bifurcating solution)와 유사하다. 그러나 양자 사이에는 다음과 같은 차이가 있다. 먼저 본 연구의 결과는 이차다중해와 같은 인위적인 해가 아니라 그들의 완전과도해와 같은 방법으로 구해진 점이다. 또한 그들의 이차다중해는 기본유동에서 바로 사중

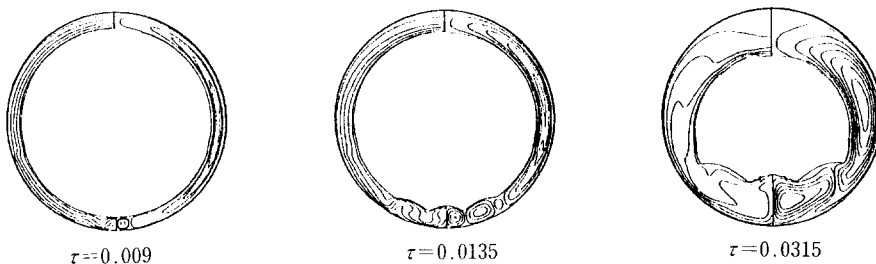


Fig. 8 Flow pattern and temperature distribution for $Ra=1.0 \times 10^6$, $Ste=0.045$ and $Sc=0.004$

셀로 천이됨에 비하여 본 연구의 결과는 전술하였듯이 이중 셀-사중 셀-이중 셀로 순차적 천이를 보이는 점이다. 이 결과에 따르면 비교적 높은 Ra수에 대한 수치해석에서 나타나는 다중 셀은 인위적인 방법에 의해 구해진 다중해가 아닌 자연대류와 연관된 다른 이론에 의존하여 분석하는 것이 타당하다. 이 점은 후술될 보다 높은 Ra수에 대한 계산결과에서 확인될 수 있다.

지금까지의 연구에서 취급된 바 없는 보다 높은 Ra수 ($Ra=5.0 \times 10^6$, 1.0×10^7 , 3.0×10^7)에 대한 용해초기 계산결과가 Fig. 9~11이다. 용해말기까지 계산을 수행하지 않은 이유는 자연대류에 의한 유동의 특성은 기본적으로 용해초기에 결정되며 계산시간도 과도하기 때문이다. Fig. 9~11에서는 유동의 특성을 보이기에 충분한 원관하부 및 상부만을 국소적으로 확대하여 제시하였다. 원관하부의 액상영역에 생성되는 다중 셀은 Ra수의 증가에 따라 보다 조기에 나타나기 시작하며 그 수도 급격히 증가한다. 같은 Ra수에서 시간이 경과할수록 유동 셀은 일정한 수까지 분화하지만 그 이후에는 유동 강도만 증대된다. 충분히 분화된 상태에서 유동 셀은 대칭면에서 멀수록 크기는 불균일하게 되는 공통점이 발견된다. 또한 유동 셀 크기의 차이와 상

계경면의 요철형태에서 알 수 있듯이 반시계방향유동은 상대적으로 넓은 범위에 걸쳐 완만히 일어나고 시계방향유동은 좁은 범위에서 급격히 일어나게 된다. 이 원인은 원관곡률의 효과로 대칭면에서 멀어질수록 유동 셀의 반중력방향 구동력이 약화되기 때문으로 보인다.

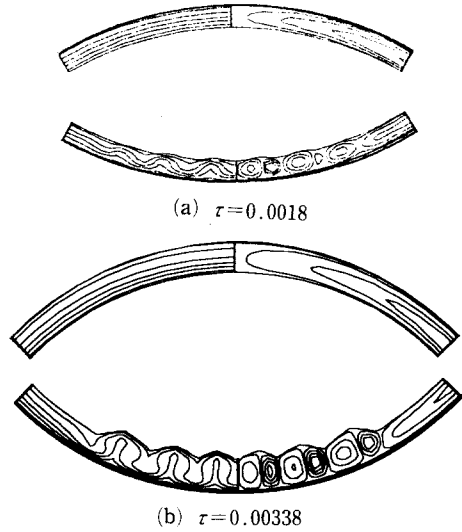


Fig. 10 Flow pattern and temperature distribution for $Ra=1.0 \times 10^7$, $Ste=0.045$ and $Sc=0.004$.

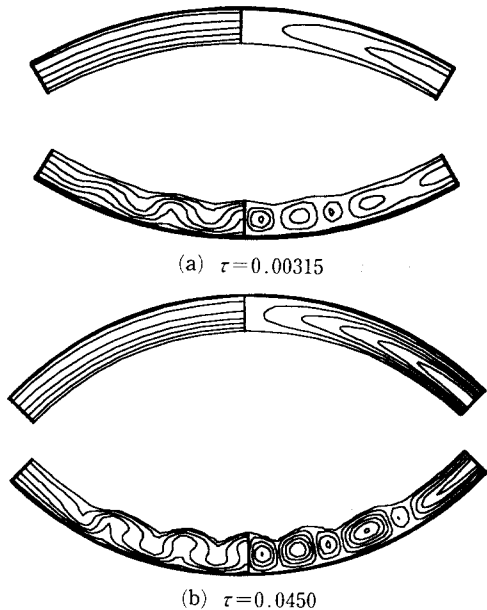


Fig. 9 Flow pattern and temperature distribution for $Ra=5.0 \times 10^6$, $Ste=0.045$ and $Sc=0.004$.

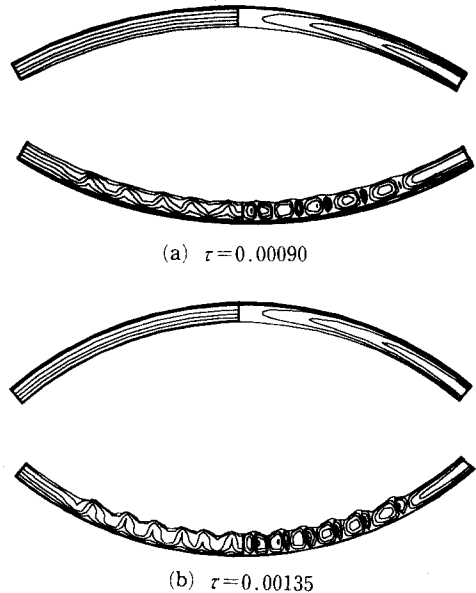


Fig. 11 Flow pattern and temperature distribution for $Ra=3.0 \times 10^7$, $Ste=0.045$ and $Sc=0.004$.

이상에서 고찰한 유동형태의 변화추이로부터 다음과 같은 사실을 알 수 있다. 첫째, 서론에 언급된 동일한 조건에 대한 상이한 결과 즉 이중 또는 삼중 셀 유동구조는 수치적으로 모두 가능하다는 점이다. 기존의 연구에서 취급한 Ra수는 앞에서 검토하였듯이 기본유동(단일 셀)과 다중 셀이 나타나는 중간 크기로서 열부력과 점성력이 준안정적인 균형을 이루고 있는 상태에 대응한다. 따라서 수치 해석 기법, 초기조건, 이완계수, 알고리즘 등의 차이에 기인한 어떤 수치적 교란에 의해 한 상태에서 다른 상태로 전이할 가능성은 항상 존재한다. 사실 Ro와 Kim⁽⁶⁾도 유사한 사실 즉 다중해를 확인한 바 있으나 높은 Ra수까지 포괄한 체계적인 결과는 아니었다. 둘째, 본 연구와 유사한 문제에 있어서 Pr수가 큰 경우에도 네 개 이상의 유동 셀이 존재할 가능성을 분명히 제시하였다. 잠열축열과 연관된 원관내 용해과정에 국한한다면 높은 Ra수에 대한 예측은 실용적으로 불필요하기 때문에 연구가 시도되지 않았을 수도 있다. 그러나, 형상 및 열적 조건이 유사하며 이미 다중해에 관하여 수많은 연구가 수행된 동심원관 사이의 자연대류 문제에서도, 수력학적 불안정성이 지배적인 즉 Pr수가 작은 경우에 대한 유동형태는 비교적 잘 규명되어 있음에 비하여 Pr수가 큰 경우에 대한 예측결과는 미미하다. 실제로 Cheddadi 등⁽¹⁴⁾은 특정한 함수형태의 초기조건을 부여하는 등 인위적인 방법으로 이중 셀을, Kim과 Ro⁽¹⁵⁾은 다소 개선된 방법으로 삼중 셀까지 얻었으나 어떤 방법으로도 사중 셀 이상의 존재를 예측한 연구는 없다. 이에 비하면, 재현성이 있는 보편적인 방법으로 사중 셀 이상을 예측한(Fig. 9~11 참조) 본 연구의 접근방법은 동심원관내의 자연대류 문제에 그대로 적용될 수 있을 것으로 보이며 구체적인 연구가 진행중이다. 마지막으로, Ra수의 변화에 대한 유동구조의 응답에서 어떤 규칙성을 발견할 수 있다는 점이다. 액상영역의 간격과 다중 셀 구조는 무관하지 않기 때문에, 액상간격이 시간에 따라 변화하는 비정상문제이지만, 고정영역에서 열적으로 불안정한 유체층에 대한 안정성이론과 연계될 수 있을 것으로 보인다. 이에 관해서는 다음 절에서 구체적으로 취급하기로 한다.

3.3 높은 Ra수에서의 열적 불안정성

높은 Ra수에서 용해초기 원관하부에 생성되는

다중유동 셀은 반복적으로 시계 및 반시계방향으로 회전하면서 거의 규칙적인 波形의 상경계면을 만든다. 이 현상은 열적 불안정성에 의한 Benard 대류와 유사하며 액상간격이 좁을 때 유동 셀이 존재하는 범위의 상경계면과 원관은 두 개의 수평평판으로 근사화될 수 있으므로 잘 알려진 선형 안정성이론을 적용하여 보기로 한다. 불안정한 온도구배를 갖는 수평평판 사이 유체에 대한 선형 안정성이론에 의하면,⁽¹⁶⁾ 자연대류가 시작되는 유효Ra수(전술한 특성인자인 Ra수와 구별하기 위함)는 波數(wave number)의 함수이며, 유효 Ra수의 최소값 즉 임계 Ra수는 파수 3.117에서 1707.762이다. 여기서 유효 Ra수의 특성 길이는 유체층의 간격이며, 파수는 유동방향이 같은 셀 사이의 길이로 정의되는 파장(wavelength)으로부터 계산될 수 있다.

본 연구에서 취급된 6개의 경우 중 $Ra \geq 1.0 \times 10^6$ 인 4경우에 대하여 수치계산 중 다중 셀이 출현하기 시작하는 시점에서 액상간격 및 파장을 구하였다. 상경계면이 파형이기 때문에 액상간격은 다중 셀이 존재하는 범위에 대한 평균값을 취하였으며, 파장은 유동 셀보다 규칙적인 형태인 온도분포로부터 측정하였다. 액상간격과 Ra수로부터 유효Ra수를, 파장으로부터 파수를 환산한 결과를 Table 3에 정리하고 Fig. 12에 Benard 대류의 중립 안정성곡선과 함께 도시하였다. 원관의 곡률, 다중 셀의 출현시각, 상경계면의 요철 등에 따른 불확실성이 내포되었음에도 불구하고 환산된 결과는 Ra수가 클수록 선형안정성이론과 가까워 진다. 이 사실은 용해초기 원관하부의 다중 셀 구조는 Benard 대류와 본질적으로 같은 현상임을 의미한다. 또한 원관의 곡률 또는 상경계면의 요철은 유동 셀을 불균일하게 하는 효과는 있으나 열적 불안정성에 의한 유동의 발생에는 본질적인 영향을 미치지 않는다.

Table 3 Effective Rayleigh number and wave number based on the liquid gap at the onset of convection

Cases(Ra)	Ra _{eff}	<i>a</i>
1.0×10^6	2380.9	2.5538
5.0×10^6	2035.7	2.8544
1.0×10^7	1820.5	2.4975
3.0×10^7	1803.8	3.8680

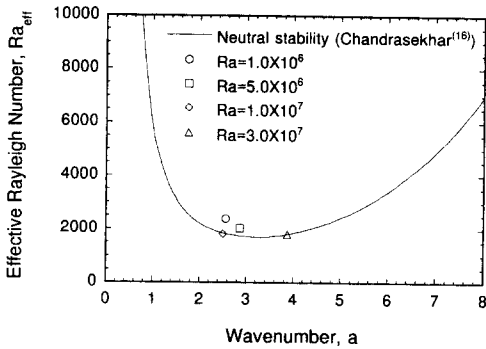


Fig. 12 Comparison of the effective Rayleigh numbers of the present with those of linear stability theory.

다는 점이 분명히 나타난다. 대략적으로 Ra수가 클수록 불안정영역에서 중립안정선상으로 접근하는 경향은 액상간격이 좁아서 수평평균 사이 유체층과 보다 유사한 상태에서 자연대류가 시작되기 때문으로 보인다.

이상에서 고찰한 내용에 근거하면 등온으로 가열되는 수평원관내 용해과정에서 다중 셀 구조의 출현은 선형 안정성이론의 관점에서 재분석될 수 있다. 예를들어 $Ra=1.0 \times 10^4$ 인 경우 원관하부가 임계 Ra수에 도달하기 위한 액상간격은 약 $0.555R_w$ 이나 이 조건에 되기 이전에 기본유동이 충분히 발달하기 때문에 국소적으로 Benard 대류의 시작에 필요한 선형온도분포는 존재하지 않는다. 반면 $Ra=5.0 \times 10^6$ 인 경우 임계액상간격은 약 $0.07R_w$ 로서 이때 기본유동은 극히 미약하며 온도분포는 선형을 유지하기 때문에 (Fig. 9에서 기본유동에 대응하는 온도분포 참조) Fig. 9와 같은 다중 셀이 시작될 수 있는 충분한 조건이 된다. 이들 2경우는 설명이 비교적 용이한 Ra수의 범위에 속한다. 그러나 타 연구에서 취급된 범위의 Ra수에 해당되는 $Ra=3.6 \times 10^5$ 및 1.0×10^6 의 경우 임계액상간격은 각각 $0.168R_w$ 및 $0.120R_w$ 로서 Benard 대류의 시작은 이미 어느 정도 발달된 기본유동의 영향을 받게 된다. 해석방법에 따라 이 영향 또는 상호작용에는 차이가 있기 때문에 문헌에 나타난 상이한 결과가 초래된 것으로 보인다. 이와 같은 일종의 준안정상 상태에서 다중해(bifurcating solutions)를 구하기 위하여 Ro와 Kim⁽⁶⁾이 행한 초기조건의 인위적인 변화는 당연히 다른 결과로 귀착된다. 다만 그들의 다중해 중 완전과도해가 다른 해석방법을 적용하였

을 때 반듯이 재현된다는 보장은 없으며 앞서 고찰한 $Ra=1.0 \times 10^6$ 에 대한 본 연구의 결과가 이 점을 입증한다.

결과적으로 용해과정동안 열적 불안정성에 의한 정성적인 유동형태의 변화는 다음과 같이 정리될 수 있다. 낮은 Ra수에서는 Benard 대류의 시작 조건에 도달하기 이전에 기본유동이 충분히 발달하여 전 영역을 지배한다. 중간 Ra수에서 Benard 대류의 시작은 기본유동의 강도와 밀접하게 연관되며 양자 사이의 상호작용도 가능하다. 높은 Ra수에서 Benard 대류는 기본유동의 거의 영향을 받지 않으며 상당히 규칙적인 형태로 발달한다. 그러나 중간 이상의 Ra수에서 일단 Benard 대류가 시작된 이후의 유동은 용해진행에 따른 기하학적, 열유동적 조건의 변화에 대응하여 기본유동과의 상호작용, 셀의 약화, 셀 사이의 융합 등 복잡한 형태로 전개될 것이다. 이에 관한 정량적인 연구는 추후의 과제이다.

4. 결 론

수평원관내 자연대류에서 논란이 되어온 중간 범위 Ra수의 결과를 포함하고, 특히 높은 Ra수에서의 용해초기 원관 하부의 다중 셀과 열적불안정성을 연구하였으며 다음과 같은 결과를 얻었다.

- ① 복잡한 상경계면으로 인해 경계추적 이동좌표계로는 격자생성이 용이하지 않은 상황이나 Pr수가 큰 경우에 상경계면에서의 점착조건이 열부력에 의한 유동발생을 과도하게 억제하는 상황에서 엔탈피 방법은 효율적인 해석도구로 생각된다.
- ② 낮은 Ra수에서는 Benard 대류의 시작조건에 도달하기 이전에 기본유동이 충분히 발달하여 전 영역을 지배하는 안정된 상태이다. 중간 Ra수에서는 Benard 대류의 시작이 이미 어느 정도 커진 기본유동과 상호 작용하여 열부력과 점성력이 준안정적인 균형을 이루고 있는 상태로 미소한 실험적, 수치적 교란에 의해서도 다른 상태로 천이할 가능성이 존재하는 구간이다. 높은 Ra수에서 Benard 대류는 기본유동의 영향을 거의 받지 않고 규칙적인 거동을 보이며, 각각의 Ra수에서 유동방향이 같은 셀 사이의 길이로 정의된 파장에 대응하는 다중 셀이 생성되기 시작하는 유효 Ra수는 선형안정성이론에 의한 중립안정성 곡선과 상당히 일치하는 결과를 보인다.

③ 특정한 초기조건을 부여하는 등의 인위적인 방법에 의하지 않고 네 개 이상의 유동 셀이 얻어진 상기 결과는 동심원관내의 자연대류문제에서의 다중해(Bifurcation)와 연계될 수 있을 것이다.

참고문헌

- (1) Saitoh, T. and Hirose, K., 1982, "High Rayleigh Number Solutions to Problems of Latent Heat Thermal Energy Storage in a Horizontal Cylinder Capsule," *J. Heat Transfer*, Vol. 104, pp. 545~553.
- (2) 서정세, 김찬중, 유제인, 노승탁, 1993, "수평 원관내에서 과냉각 및 자연대류가 용해과정에 미치는 영향," 대한기계학회논문집, 제17권, 제8호, pp. 2079~2087.
- (3) Rieger, H., Projahn, U., Bareiss, M. and Beer, H., 1983, "Heat Transfer during Melting inside a Horizontal Tube," *J. Heat Transfer*, Vol. 105, pp. 226~234.
- (4) Ho, C. J. and Viskanta, R., 1984, "Heat Transfer during Inward Melting in a Horizontal Tube," *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. 27, pp. 705~716.
- (5) 유호선, 노승탁, 1986, "좌표변환에 의한 상변화 과정의 수치해석," 대한기계학회논문집, 제10권, 제4호, pp. 585~592.
- (6) Ro, S. T. and Kim, C. J., 1994, "Bifurcation Phenomenon during the Fixed-Solid-Mode Melting Inside a Horizontal Cylinder," *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. 37, pp. 1101~1109.
- (7) Fant, D. B., Prusa, J. and Rothmayer, A. P., 1990, "Unsteady Multicellular Natural Convection in a Narrow Horizontal Cylindrical Annulus," *J. Heat Transfer*, Vol. 112, pp. 379~387.
- (8) Lacroix, M. and Voller, V. R., 1990, "Finite Difference Solutions of Solidification Phase Change Problems: Transformed Versus Fixed Grids," *Numerical Heat Transfer*, Vol. 17B, pp. 25~41.
- (9) Viswanath, R. and Jaluria, Y., 1993, "A Comparison of Different Solution Methodologies for Melting and Solidification Problems in Enclosures," *Numerical Heat Transfer*, Vol. 24B, pp. 77~105.
- (10) Patankar, S. V., 1980, *Numerical heat transfer and fluid flow*, Hemisphere Publishing Corporation.
- (11) Voller, V. R. and Swaminathan, C. R., 1991, "General Source-Based Method for Solidification Phase Change," *Numerical Heat Transfer*, Vol. 19B, pp. 175~189.
- (12) Gau, C. and Viskanta, R., 1986, "Melting and Solidification of a Pure Metal on a Vertical Wall," *J. Heat Transfer*, Vol. 108, pp. 174~181.
- (13) Park, C. E. and Chang, K. -S., 1992, "Bifurcating Solutions of Inward Melting in a Horizontal Tube," *Transport Phenomena in Heat and Mass Transfer* (edited by J. A. Reizes), pp. 704~714.
- (14) Cheddadi, A., Caltagirone, J. P., Mojtabi, A. and Vafai, K., 1992, "Free Two-Dimensional Convective Bifurcation in a Horizontal Annulus," *J. Heat Transfer*, Vol. 114, pp. 99~106.
- (15) Kim, C. -J and Ro, S. T., 1994, "Numerical Investigation on Bifurcative Natural Convection in an Air-Filled Horizontal Annulus," *Proc. 10th Int. Heat Transfer Conf.*, pp. 85~90.
- (16) Chandrasekhar, S., 1961, *Hydrodynamic and hydro-magnetic stability*, Oxford university press.