

〈논 문〉

원관내 Bingham Plastic의 층류 대류 열전달(1)

해석적 연구-완전발달유동과 온도분포 발달유동
(확장된 그라츠문제)

민태기* · 유정열** · 최해천**

(1996년 5월 15일 접수)

Laminar Convective Heat Transfer of a Bingham Plastic in a Circular Pipe (I)

Analytical approach - thermally fully developed flow and thermally developing flow
(the Graetz problem extended)

Taegee Min*, Jung Yul Yoo** and Haecheon Choi**

Key Words : Bingham Plastic (빙햄 플라스틱), Axial Conduction (축방향 열전도), Viscous Dissipation (점성소산), Graetz Problem (그라츠문제)

Abstract

Thermally fully developed and thermally developing laminar flows of a Bingham plastic in a circular pipe have been studied analytically. For thermally fully developed flow, the Nusselt numbers and temperature profiles are presented in terms of the yield stress and Peclet number, proposing a correlation formula between the Nusselt number and the Peclet number. The solution to the Graetz problem has been obtained by using the method of separation of variables, where the resulting eigenvalue problem is solved approximately by using the method of weighted residuals. The effects of the yield stress, Peclet and Brinkman numbers on the Nusselt number are discussed.

기 호 설 명

A_1, A_2 : 상관 관계식의 계수들 (식 (15) 참조)
A, B, C : 행렬
 A_{ij}, B_{ij}, C_x : 행렬 A, B, C의 요소
 a_n, b_n : 무한 멱급수의 계수
 B_r : 브링크만수 (Brinkman number), $\mu_0 U^2 / \alpha_w / k (T_e - T_w)$
 C_n, D_n, E_n : 고유치 문제의 해에 쓰인 계수
 C_p : 정압 비열
 c : 완전발달한 속도분포에서 항복되지 않은 유동 영역의 무차원화된 반경, 또는 벽 전단응력에 대한 항복응력의 비, τ_y / τ_w

c_1, c_2 : 베셀함수해의 계수
c, d : 고유벡터
 c_i, d_i : 고유벡터의 성분
 D : 원관의 직경
 h : 열전달 계수
 J_0, J_1 : 0차 및 1차의 제1종 베셀함수
 k : 열전도계수
 N : 고유모드들의 개수
 Nu : 누셀트수 (Nusselt number), hD/k
 Nu_0 : $Pe \rightarrow 0$ 일 때 완전발달유동의 누셀트수의 극한값
 Nu_∞ : $Pe \rightarrow \infty$ 일 때 완전발달유동의 누셀트수의 극한값
 Pe : 페클레수 (Peclet number), $2U_{av}R/\alpha$

*회원, 서울대학교 대학원

**회원, 서울대학교 기계공학과

| | |
|----------------------|---|
| Pr | : 프란틀수 (Prandtl number), $\mu_0/(\rho\alpha)$ |
| R | : 원관의 반경 |
| R_n | : 고유함수 |
| r | : 무차원화된 반경, y/R |
| S_i | : 근사함수 |
| S_1, S_2, S_3, S_4 | : 완전발달유동의 해에 쓰이는 상수 |
| $T(y, z)$ | : 온도 |
| T_e | : 입구 온도 |
| $T_m(z)$ | : 평균온도 |
| T_w | : 벽면 온도 |
| U | : 축방향 속도 |
| U_{av} | : 평균 속도 |
| u | : 무차원화된 축방향 속도, U/U_{av} |
| w_j | : 가중잔류법에 쓰이는 가중함수 |
| x^+ | : 무차원화된 축방향 좌표, $(z/R)/Pe$ |
| Y_0 | : 0차의 제2종 베셀함수 |
| y | : 반경방향 좌표 |
| z | : 축방향 좌표 |

그리스문자

| | |
|--------------------|--|
| α | : 열확산계수 |
| β_1 | : 베셀함수 J_0 의 첫째 근 |
| η | : 빙햄모델에서의 겔보기 점도 |
| η_{eff} | : 무차원화된 겔보기 점도, |
| $\Theta(r, x^+)$ | : 무차원화된 온도, $(T_w - T)/(T_w - T_e)$ |
| $\Theta_m(x^+)$ | : 무차원화된 평균 온도, $(T_w - T_m)/(T_w - T_e)$ |
| $\Theta_\infty(r)$ | : $x^+ \rightarrow \infty$ 에서의 무차원화된 온도 |
| λ_n | : 고유치 |
| μ_0 | : 소성점도 |
| ρ | : 밀도 |
| τ | : 전단응력 |
| τ_w | : 벽전단응력 |
| τ_y | : 항복응력 |
| Φ | : 소산함수 (dissipation function) |
| $\phi(r)$ | : 무차원화된 온도, $(T_w - T)/(T_w - T_m)$ |

하첨자

| | |
|-----|----------|
| e | : 원관의 입구 |
| w | : 벽 |

1. 서 론

관내 유동에서의 층류 강제 대류 문제의 해석은 실제 열유동시스템의 설계에 있어서 매우 중요하다.

공업에 광범위하게 응용되는 많은 유체는 유동이 발생하기 위해서 일정한 항복응력 이상의 전단응력이 가해져야 하는데, 이러한 물질을 빙햄 플라스틱 (Bingham plastic)이라 한다. 그 예로는 전기 변성 유체 (electrorheological fluid), 현탁액 (suspension), 착암용 머드 (drilling mud), 페인트, 유지 (grease), 수성 포말 (aqueous foam), 슬러리 (slurry) 등이 있고 마가린, 마요네즈, 케첩과 같은 음식물도 여기에 해당한다. 본 논문의 연구 동기는 이러한 유체들의 유동과 열전달 특성을 보다 잘 이해하기 위한 것이다.

뉴턴유체 (Newtonian fluid)의 관내 유동의 열전달에 대한 연구는 한 세기도 더 전인 1883~1885년경 Graetz에 의해서 최초로 수행되었고, 1910년에 Nusselt도 독자적으로 이를 연구하였다. 이 문제는 이후 다양한 형태로 확장되었고, (1~8) 관내 층류 유동의 열전달에 대한 광범위한 개관은 Shah and London(9)에 의해 이루어졌다.

뉴턴유체의 경우 축방향 열전도를 무시하였을 때 완전발달유동에서의 누셀트수는 3.6568이 됨이 알려져 있다. Pahor and Strand(2)는 축방향 열전도를 고려하여 뉴턴유체에 대한 완전발달유동을 섭동법 (perturbation method) 을 이용하여 해석하였으며, 페클레수에 따른 완전발달 누셀트수를 그래프로 나타내었다. 이들의 연구는 Ash and Heinbockel(5)에 의해 개선되었는데, 이들은 완전발달유동에서 페클레수에 따른 누셀트수를 구하기 위해 그레츠문제에서 얻어지는 고유치 문제의 첫번째 고유모드만을 고려하였다.

Kakac et al.(10)과 Kays and Crawford(11)는 Bhatti(12)가 축방향 열전도와 점성소산을 무시함으로써 뉴턴유체의 원관내 완전발달유동의 온도분포를 구하였다고 보고하였다. 그러나 보고된 해는 잘못된 것으로, 본 논문에서 나중에 밝힐 것이다. 일정 벽면 온도 조건일 때, 점성소산이 고려되는 경우 입구로부터 먼 하류에서는 축방향 열전도와 대류항은 점성소산항에 비해 무시될 수 있으므로 완전발달유동의 온도분포는 점근해 (asymptotic solution)로 구해질 수 있다. Vradis et al.(13)은 이와 같은 경우에 빙햄 플라스틱에 대한 완전발달유동의 온도분포를 구하였다. 그러나 점성소산이 무시되는 경우에 축방향 열전도를 고려하여 완전발달유동의 온도분포를 제시한 연구는 아직 보고된 바 없다.

Wissler and Schechter(14)는 축방향 열전도와 점

성소산을 무시하여 빙햄 플라스틱에 대한 그래츠문제를 변수분리법을 이용하여 Sturm-Liouville 문제로 구성하여 해석하였다. 그들은 $c=0, 0.25, 0.5, 0.75$ 와 1에 대하여 7개의 고유치와 고유함수를 수치적으로 구하였다. Blackwell⁽¹⁵⁾은 Wissler and Schechter⁽¹⁴⁾에 의하여 구하여진 고유치와 고유함수의 개수가 작은 값의 x^+ 에 대한 수렴된 해를 얻기에는 부족하다고 지적하고 $c=0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8$ 과 1에 대해 60개의 고유치와 고유함수를 구하였다.

최근, Johnston⁽¹⁶⁾은 Sturm-Liouville 변환에 기초한 근사 해법으로 빙햄 플라스틱에 대한 그래츠문제를 해석하였으며 이를 축방향 열전도를 고려한 경우로 확장하였으나 점성소산을 고려하지 않았다. 그는 정확도의 손실 없이 축방향 열전달 효과를 생략하려면 페클레수가 1000 이상이 되어야 한다고 결론지었다. 저자들이 아는 한, 빙햄 플라스틱의 그래츠문제에서 축방향 열전도와 점성소산을 동시에 고려한 연구는 아직 없다.

본 논문은 두 가지로 나눌 수 있다. 첫째는 빙햄 플라스틱의 축방향 열전도를 고려한 완전발달유동을 해석하여 온도분포와 누셀트수를 구하고, 페클레수에 따른 누셀트수의 상관 관계식을 제시하는 것이다(2장). 둘째는 온도분포 발달유동(그래츠문제)을 축방향 열전도와 점성소산을 동시에 고려하여 해석하는 것이다. 이 그래츠문제의 해는 변수분리법으로 구하여지고 여기서 유도되는 고유치 문제의 해는 가중잔류법으로 근사된다(3장).

2. 완전발달유동

2.1 지배 방정식

속도분포가 완전발달되었고 점성소산이 무시될 수 있다고 가정하면, 원관내의 무차원화된 에너지 방정식은 다음과 같다.

$$\frac{u}{2} \frac{\partial \Theta}{\partial x^+} = \frac{1}{Pe^2} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x^{+2}} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \Theta}{\partial r} \right) \quad (1)$$

여기서 $\Theta(r, x^+) = (T - T_w) / (T_e - T_w)$ 는 무차원화된 온도, $r = y/R$, $x^+ = (z/R)/Pe$, $Pe = 2U_w R/\alpha$ 는 페클레수, R 은 원관의 반경, α 는 열확산계수, T_e 는 입구 온도, T_w 는 벽면 온도이다.

물성치가 일정하다고 하면, 원관내의 빙햄 플라스틱에 대한 완전발달유동의 속도분포는 다음과 같이 주어진다.⁽¹⁷⁾

$$u(r) = \begin{cases} \frac{2(1-c)^2}{1 - \frac{3}{4}c + \frac{c^4}{3}} & 0 \leq r \leq c \\ \frac{2(1-r^2-2c(1-r))}{1 - \frac{4}{3}c + \frac{c^4}{3}} & c \leq r \leq 1 \end{cases} \quad (2)$$

여기서 $r=0$ 은 원관의 중심축을 나타내고 $r=1$ 은 벽면을 나타낸다. 무차원 변수 c 는 항복되지 않은 영역의 반경을 나타내는데, $c=1$ 은 항복응력이 무한대인 경우 유체가 $u=1$ 의 속도로 고체와 같이 움직이는 것을 나타내고, $c=0$ 은 뉴턴유체의 층류 완전발달유동을 나타낸다.

원관내의 층류 유동에서 온도분포가 완전발달한 유동은 다음과 같이 정의된다.⁽¹¹⁾

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{T_w - T}{T_w - T_m} \right) = 0 \quad (3)$$

이는 원관의 축방향으로 더 이상 변하지 않는 무차원화된 온도가 존재함을 말한다. 이러한 무차원화된 온도 $\phi(r) = (T_w - T) / (T_w - T_m) = \Theta(r, x^+) / \Theta_m(x^+)$ 를 새로이 정의하면, 식 (1)은 아래와 같이 쓰여진다.

$$\frac{u}{2} \Theta_m' \phi = \frac{1}{Pe^2} \Theta_m'' \phi + \frac{1}{r} \Theta_m \phi' + \Theta_m \phi'' \quad (4)$$

여기서 '은 독립 변수에 관한 미분을 나타낸다.

변수분리법에 의한 해를 구하기 위하여 $\Theta_m' / \Theta_m = -s_1 (s_1 > 0)$ 로 두면 $\Theta_m'' / \Theta_m = s_1^2$ 이 되므로 식 (4)는 다음과 같이 된다.

$$\phi'' + \frac{1}{r} \phi' + \left(\frac{s_1^2}{Pe^2} + s_1 \frac{u}{2} \right) \phi = 0 \quad (5a)$$

그리고 경계 조건은

$$\phi(1) = 0 \quad (5b)$$

$$\phi'(0) = 0 \quad (5c)$$

ϕ 의 정의에 의하여 누셀트수는 다음과 같이 나타내어진다.

$$-2 \cdot \phi'(1) = Nu \quad (5d)$$

식 (5a)를 구간 $0 \leq r \leq 1$ 에 대하여 적분하면,

$$\int_0^1 (r\phi)' dr = - \int_0^1 \left(\frac{s_1^2}{Pe^2} + s_1 \frac{u}{2} \right) \phi r dr \quad (6)$$

$$Nu = \frac{2s_1^2}{Pe^2} \int_0^1 \phi r dr + \frac{s_1}{2} \quad (7)$$

식 (7)은 원관의 단면에 적용되는 다음과 같은 식 (8)을 무차원화함으로써 얻어질 수도 있다.

$$\rho C_p U_{av} \pi R^2 \frac{dT_m}{dz} = 2\pi \int_0^R k \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} y dy + h(T_w - T_m) \cdot 2\pi R \quad (8)$$

2.2 결과 및 토의

식 (2)와 같이 주어진 속도분포로부터 식 (5)의 해를 구할 수 있다. $c=1$ 일 때는 $u=1$ 이므로 베셀함수의 형태로 해가 구해짐을 쉽게 알 수 있고, $c=0$ 일 때는 Frobenius 방법을 이용하면 무한 멱급수의 형태로 구하여짐을 알 수 있다. 따라서 $0 < c < 1$ 일 때, 해는 $0 \leq r \leq c$ 구간에서의 베셀함수와 $c \leq r \leq 1$ 구간에서의 무한 멱급수의 조합으로 주어질 것이다. 그러므로 식 (5)의 해는 아래와 같이 쓸 수 있다.

$$\phi(r) = \begin{cases} c_1 J_0(\sqrt{s_2} \cdot r) + c_2 Y_0(\sqrt{s_2} \cdot r) & 0 \leq r \leq c \\ \sum_{n=1}^{\infty} a_n r^n + \ln(r) \cdot \sum_{n=1}^{\infty} b_n r^n & c \leq r \leq 1 \end{cases} \quad (9a)$$

$$s_2 = \frac{s_1^2}{Pe^2} + \frac{s_1 \cdot (1-c)^2}{1 - \frac{4}{3}c + \frac{c^4}{3}} \quad (9b)$$

여기서 a_n 과 b_n 의 점화식은

$$b_1 = a_1 = 0 \quad (10a)$$

$$b_2 = -\frac{1}{2^2} \cdot s_3 \cdot b_0$$

$$a_2 = -\frac{1}{2^2} (2 \cdot 2b_2 + s_3 \cdot a_0) \quad (10b)$$

$$b_3 = -\frac{1}{3^2} \cdot s_4 \cdot b_0$$

$$a_3 = -\frac{1}{3^2} (2 \cdot 3b_3 + s_4 \cdot a_0) \quad (10c)$$

$$b_n = -\frac{1}{n^2} (s_5 \cdot b_{n-4} + s_4 \cdot b_{n-3} + s_3 \cdot b_{n-2})$$

$$a_n = -\frac{1}{n^2} (2n \cdot b_n + s_5 \cdot a_{n-4} + s_4 \cdot a_{n-3} + s_3 \cdot a_{n-2}), \quad n \geq 4 \quad (10d)$$

이고

$$s_3 = \frac{s_1^2}{Pe^2} + \frac{s_1 \cdot (1-2c)}{1 - \frac{4}{3}c + \frac{c^4}{3}} \quad (11a)$$

$$s_4 = \frac{2 \cdot s_1 \cdot c}{1 - \frac{4}{3}c + \frac{c^4}{3}} \quad (11b)$$

$$s_5 = -\frac{s_1}{1 - \frac{4}{3}c + \frac{c^4}{3}} \quad (11c)$$

$r=0$ 에서 온도는 유한하므로 c_2 는 0이 되어야 한다. 그러면 베셀함수 J_0 는 $r=0$ 에서의 미분값이 0이므로 식 (9)는 식 (5c)의 경계조건을 자동적으로 만족시킨다. 이제 5개의 미정계수 c_1, s_1, a_0, b_0 와 Nu 에 대하여 경계조건식 (5b)와 (5d), 원관 단면에서의 에너지보존식 (7), $r=c$ 에서의 연속 및 미분가능 조건 2개 등 모두 5개의 강제 조건이 있으므로, 이 미정 계수들은 구해질 수 있다.

$Pe \rightarrow \infty$ 일 때, 즉 축방향 열전도가 무시될 때, 식 (7)로부터 $s_1 = 2Nu$ 이다. 이 경우 여러 c 에 대한 c_1, a_0, b_0 와 Nu 등의 값들이 Table 1에 제시되었고, 온도분포가 Fig. 1에 제시되었다. Kakac et al.⁽¹⁰⁾과 Kays and Crawford⁽¹¹⁾는 뉴턴유체에 대하여 ($c=0$) 축방향 열전도가 무시되는 경우에 완전 발달유동의 온도분포가 Bhatti⁽¹²⁾에 의하여 구해졌다고 보고하였다. 그 해는 본 논문의 결과와 마찬가지로 무한 멱급수의 형태로 구해졌는데, 이에 따르면 $a_0=1$ 이지만 본 연구의 결과 Table 1에서 보듯이 $a_0=1.8026$ 이다. 뉴턴유체에 대한 그래츠해^(3,4)를 큰 수의 x^+ 에 적용함으로써 온도분포를 구하여 비교하면, Fig. 1과 같이 본 논문의 결과인 $a_0=1.8026$ 이 옳은 것임을 확인할 수 있다.

$Pe \rightarrow 0$ 일 때, 뉴턴유체에 대하여 Pahor and Strand⁽²⁾와 Michelsen and Villadsen⁽⁷⁾이 뉴턴유체에 대하여 사용하였던 것과 같이 섭동법(perturbation method)을 사용하여 해를 구하면 결과는 다음과 같이 주어진다.

Table 1 Parameters a_0, b_0, c_1 and Nu_∞ for various values of c

| c | a_0 | b_0 | c_1 | Nu_∞ |
|-----|----------------|----------------|------------|-------------|
| 0.0 | 1.80261846 | 0.0 | 0.0 | 3.65679346 |
| 0.2 | 1.80442580 | -2.44450615e-3 | 1.81100734 | 3.81250009 |
| 0.4 | 1.71572615 | -6.19434447e-2 | 1.84010639 | 4.08075955 |
| 0.6 | 7.12456411e-1 | -7.09384401e-1 | 1.91593691 | 4.49320147 |
| 0.8 | -5.38076252e+1 | -2.68651238e+1 | 2.06540621 | 5.06575119 |
| 1.0 | 0.0 | 0.0 | 2.31612940 | 5.78318596 |

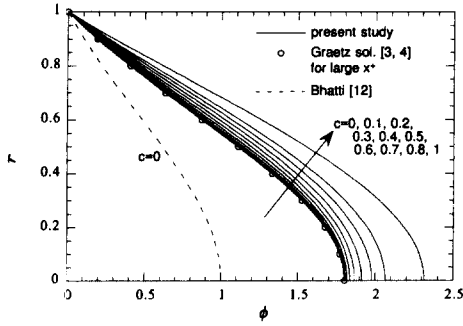


Fig. 1 Variation of fully developed temperature profile with respect to c when $Pe \rightarrow \infty$

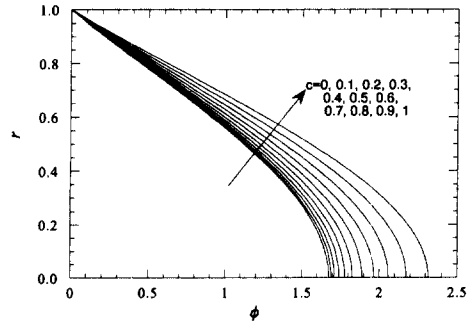


Fig. 2 Variation of fully developed temperature profile with respect to c when $Pe \rightarrow 0$

Table 2 Parameters Nu_0 , A_1 and A_2 for various values of c

| c | Nu_0 | A_1 | A_2 |
|-----|------------|------------|-------------|
| 0.0 | 4.18065498 | 0.31362065 | -1.66141012 |
| 0.2 | 4.27501534 | 0.29957298 | -1.66123843 |
| 0.4 | 4.44229997 | 0.27736639 | -1.66306874 |
| 0.6 | 4.71804885 | 0.24787100 | -1.66891216 |
| 0.8 | 5.14500676 | 0.21563880 | -1.67724511 |

$$\phi(r) = \frac{J_0(\beta_1 r)}{2 \int_0^1 u J_0(\beta_1 r) r dr} \quad (12)$$

$$Nu(Pe) = Nu_0 - C_1 Pe \quad (13)$$

여기서 $\beta_1 = 2.4048255577$ 은 베셀함수 J_0 가 0이 되는 첫번째 값이고 Nu_0 는 $Pe \rightarrow 0$ 일 때 누셀트수의 극한값, C_1 은 상수이다. Fig. 2는 식 (12)에 의하여 구하여지는 완전발달유동의 온도분포를 나타낸 것이다. 식 (5d)와 식 (12)로부터 Nu_0 는 다음과 같이 구해진다.

$$Nu_0 = \frac{\beta_1 J_1(\beta_1)}{\int_0^1 u J_0(\beta_1 r) r dr} \quad (14)$$

Churchill and Usagi⁽¹⁸⁾가 제안한 방법을 참조하여 페클레수에 따른 완전발달유동의 누셀트수를 외재적으로 나타낼 수 있는 상관 관계식을 다음과 같이 얻었다.

$$Nu = Nu_0 - (Nu_0 - Nu_\infty) \cdot \frac{1}{(1 + (A_1 \cdot Pe)^{A_2})^{1/2}} \quad (15)$$

여기서 A_1 과 A_2 는 회귀 분석(regression analysis)을 이용하여 구해진다. 여러 c 에 대하여 구하여진 Nu_0 , A_1 과 A_2 를 Table 2에 나타내었다. 보다

자세한 내용은 민태기 등⁽¹⁹⁾을 참조할 수 있다.

Fig. 3은 $c = 0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8$ 과 1일 때 완전 발달유동에서 페클레수에 따른 누셀트수의 변화를 각각 나타낸 것이다. $c = 0$, 즉 뉴턴유체일 때, 본

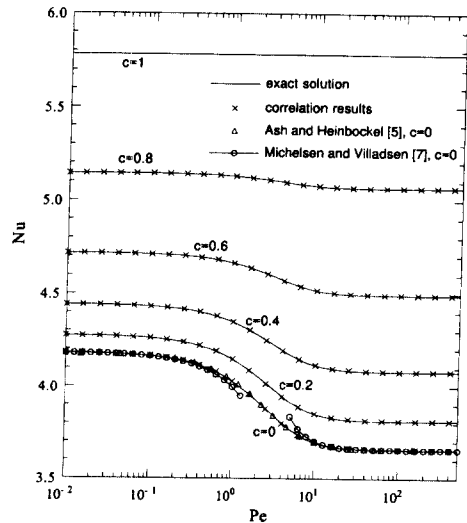


Fig. 3 Variation of the Nusselt number with respect to the Peclet number for $c = 0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8$ and 1

연구에서 구한 엄밀해가 Ash and Heibockel⁽⁶⁾의 해와 잘 일치하는 것을 볼 수 있다. 또한 식 (15)의 상관관계식이 엄밀해를 잘 예측해 주고 있음을 볼 수 있다. 엄밀해와 상관관계식의 해 간의 상대 오차는 0.1%를 넘지 않는다. Michelsen and Villadsen⁽⁷⁾은 페클레수가 매우 클 경우와 작을 경우에 대하여 섭동법을 사용함으로써 상관관계식을 구하였다. Fig. 3에서 보는 바와 같이 식 (15)의 상관관계식이 Michelsen and Villadsen⁽⁷⁾이 제시한 식보다 페클레수의 전 범위에서 누셀트수를 더 잘

예측하고 있음을 볼 수 있다. c 가 커짐에 따라 페클레수에 따른 누셀트수의 변화는 감소되는데, c 가 1이 되면 누셀트수는 페클레수에 무관하게 일정한 값을 가진다.

Fig. 4(a) ~ (e)는 $c=0, 0.2, 0.4, 0.6$ 과 0.8 에 대해 페클레수에 따른 완전발달유동의 온도분포를 나타낸다. 온도분포 역시 c 가 증가함에 따라 페클레수에 덜 영향받는 것을 볼 수 있다. 따라서 $c=$

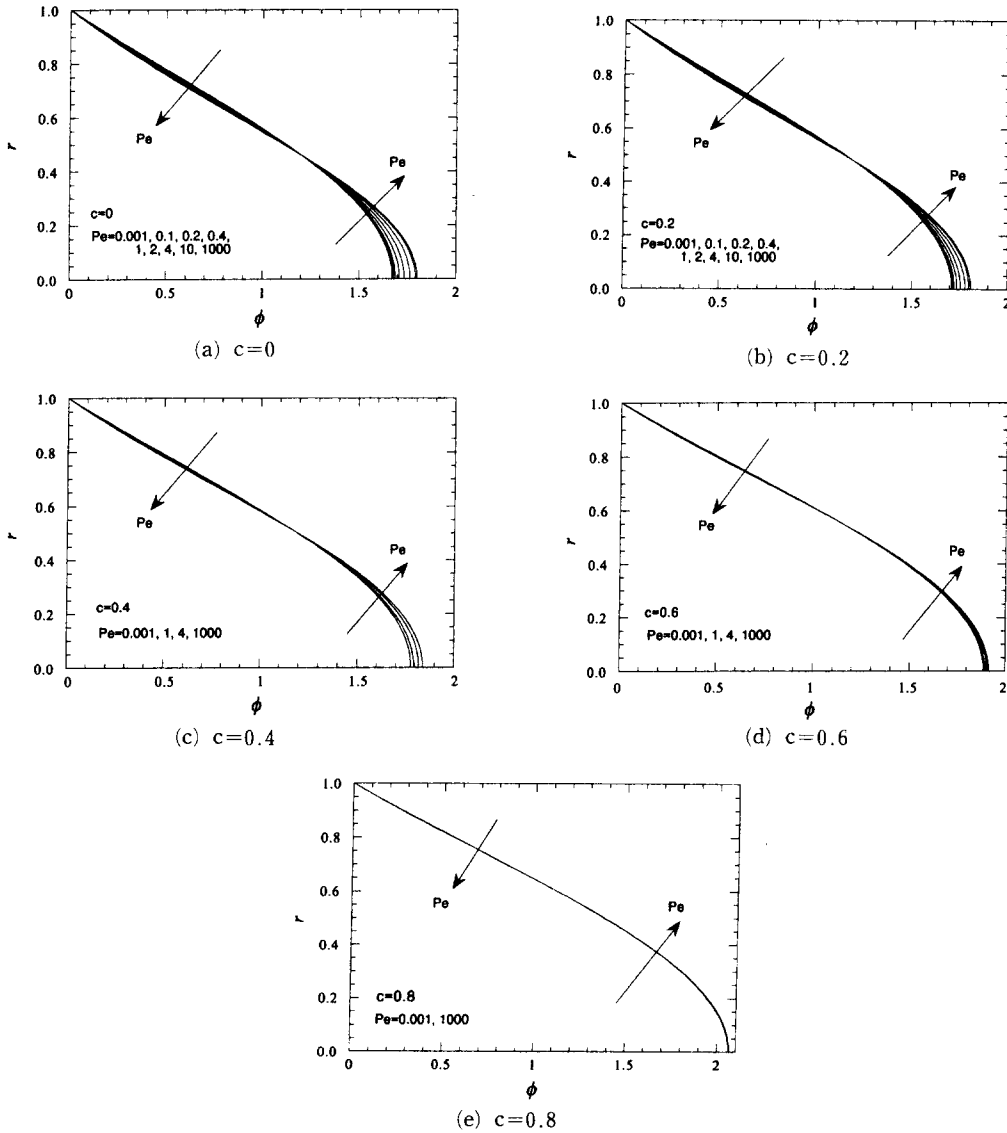


Fig. 4 Fully developed temperature profiles

1의 결과는 Fig. 1, 2와 같고 페클레수에 따른 변화는 없으므로 제시하지 않는다.

완전발달유동의 결과들이 c 가 증가함에 따라 페클레수에 덜 영향받는 것은 다음과 같이 설명할 수 있다. c 가 커질수록 벽 근처의 속도값이 증가하므로 벽 근처의 대류 열전달이 증가하게 된다. 이는 벽 근처의 온도구배를 크게 할 것이므로 반경방향의 열전도를 증가시키게 된다. 지배방정식 (1)의 각 항을 물리적으로 표현하여 나타내면 '축방향 대류 열전달 = 축방향 열전도 + 반경방향 열전도'인데, c 가 증가할수록 반경방향 열전도가 점차 증가하여 축방향 대류 열전달과 평형을 이루게 되므로 상대적으로 축방향 열전도의 영향은 감소하게 된다. 페클레수는 바로 축방향 열전도의 지표이므로 결국 c 가 증가할수록 페클레수가 열전달 특성에 미치는 영향은 감소하는 결과로 나타나게 된다.

3. 온도분포 발달유동-그래츠문제

3.1 지배 방정식

축방향 열전도와 점성소산을 동시에 고려한 원관내의 그래츠문제의 무차원화된 지배방정식은 다음과 같다.

$$\Theta_{\infty}(r) = \begin{cases} \frac{Br \cdot \left((1-c^4) - \frac{16c}{9}(1-c^3) - \frac{4c^4}{3} \ln c \right)}{\left(1 - \frac{4c^4}{3} + \frac{c^4}{3} \right)^2}, & 0 \leq r \leq c \\ \frac{Br \cdot \left((1-r^4) - \frac{16c}{9}(1-r^3) - \frac{4c^4}{3} \ln r \right)}{\left(1 - \frac{4c}{3} + \frac{c^4}{3} \right)^2}, & c \leq r \leq 1 \end{cases} \quad (20)$$

3.2 변수분리법

식 (16)의 해를 아래와 같은 형태로 두자.

$$\Theta(r, x^+) = \Theta_{\infty}(r) + X(x^+) \cdot R(r) \quad (21)$$

식 (21)을 식 (16)에 대입하면 아래와 같은 식이 얻어진다.

$$\frac{u}{2} X' R = \frac{1}{Pe^2} X'' R + \frac{1}{r} X R' + X R'' + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d\Theta_{\infty}}{dr} \right) + Br \cdot \eta_{eff} \cdot \Phi \quad (22)$$

식 (19a)로부터 식 (22)는 다음과 같이 된다.

$$\frac{R''}{R} + \frac{1}{r} \frac{R'}{R} = \frac{u}{2} \frac{X'}{X} - \frac{1}{Pe^2} \frac{X''}{X} \quad (23)$$

$$\frac{u}{2} \frac{\partial \Theta}{\partial x^+} = \frac{1}{Pe^2} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x^{+2}} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \Theta}{\partial r} \right) + Br \cdot \eta_{eff} \cdot \Phi \quad (16)$$

$$\eta_{eff} = \begin{cases} \infty & 0 \leq r \leq c \\ 1 + \frac{\tau_y R / \mu_0 U_{av}}{|du/dr|} & c \leq r \leq 1 \end{cases} \quad (17)$$

여기서 점성소산은 $\eta_{eff} \cdot \Phi$ 로 표현되는데, 속도분포는 완전발달되었으므로 식 (2)와 같고 $\Phi = (du/dr)^2$ 이므로 이 항은 주어진 항이다.

입구와 벽면 온도가 일정한 경계조건은 다음과 같다.

$$\Theta(r, 0) = 1 \quad (18a)$$

$$\Theta(1, x^+) = 0, \quad \left. \frac{\partial \Theta}{\partial r} \right|_{r=0} = 0 \quad (18b)$$

$$\lim_{x^+ \rightarrow \infty} \Theta(r, x^+) = \Theta_{\infty}(r) \quad (18c)$$

여기서 $\Theta_{\infty}(r)$ 은 다음 방정식의 해로서

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d\Theta_{\infty}}{dr} \right) + Br \cdot \eta_{eff} \cdot \Phi = 0 \quad (19a)$$

$$\Theta_{\infty}(1) = 0, \quad \Theta'_{\infty}(0) = 0 \quad (19b)$$

그 해는 Vradis et al.⁽¹³⁾에 의하여 다음과 같이 구해졌다.

변수분리법에 의해 해가 얻어지기 위해서 $X'/X = -\lambda (\lambda > 0)$ 로 두면 $X''/X = \lambda^2$ 이므로 식 (23)은 아래와 같이 된다.

$$(rR')' + \left(\frac{\lambda^2}{Pe^2} + \lambda \frac{u}{2} \right) rR = 0 \quad (24a)$$

$$R'(0) = 0, \quad R(1) = 0 \quad (24b)$$

이는 일찍이 Michelsen and Villadsen⁽⁷⁾에 의해 연구되었던 것과 같은 형태의 고유치 문제를 구성한다.

따라서 식 (16)의 해는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\Theta(r, x^+) = \Theta_{\infty}(r) + \sum_{n=1}^{\infty} C_n R_n(r) \exp(-\lambda_n x^+) \quad (25)$$

여기서 λ_n 은 고유치이고 R_n 은 고유함수이다. 축방향 열전도를 나타내는 항인 $(1/Pe^2)\partial^2\Theta/\partial x^{*2}$ 이 식 (16)에 남아 있기 때문에 식 (24a)와 (24b)은 고전적인 Sturm-Liouville 문제와 달리 가중함수에 대해 적분하는 고유함수를 구성하지 않는다.⁽²⁰⁾

따라서 수립된 해를 얻기에 충분한 유한한 N 개의 고유모드($\lambda_n, R_n(r)$)을 고려하여 C_n 을 근사적으로 결정하도록 한다. 본 논문에서는 유한한 N 개의 고유모드를 결정하기 위하여 가중잔류법을 사용하였는데 이에 대해서는 다음 절에서 설명하기로 한다. 입구에서의 경계조건을 적용하고, 식 (25)에 R_m 을 곱하여 $0 \leq r \leq 1$ 구간에서 적분을 수행하면 다음의 식이 얻어진다.

$$\sum_{n=1}^N C_n \int_0^1 R_n R_n dr = \int_0^1 R_m (1 - \Theta_\infty) dr$$

$$m=1, 2, \dots, N. \quad (26)$$

식 (26)에서 N 개의 선형계를 풀면 C_n 을 결정할 수 있다.

무차원화된 평균온도 Θ_m 과 누셀트수 Nu 는 다음과 같이 구하여질 수 있다.

$$\Theta_m = 2 \int_0^1 u \Theta dr$$

$$= 2 \int_0^1 u \Theta_\infty r dr + 2 \sum_{n=1}^N C_n \left[\int_0^1 u R_n r dr \right] \exp(-\lambda_n x^+)$$

$$= 2 \int_0^1 u \Theta_\infty r dr + 2 \sum_{n=1}^N \frac{D_n}{\lambda_n} \exp(-\lambda_n x^+)$$

$$+ 2 \sum_{n=1}^N \frac{E_n \lambda_n}{Pe^2} \exp(-\lambda_n x^+) \quad (27)$$

$$Nu = -\frac{2}{\Theta_m} \left. \frac{\partial \Theta}{\partial r} \right|_{r=1}$$

$$= -\frac{2\Theta_{\infty, r=1}}{\Theta_m} + \frac{1}{\Theta_m} \sum_{n=1}^N D_n \exp(-\lambda_n x^+) \quad (28)$$

여기서 $D_n = -2C_n R'_n(1)$,

$$E_n = -2C_n \left[\int_0^1 r R_n dr \right].$$

3.3 가중잔류법

축방향 열전도를 무시할 수 있는 경우일지라도 그레츠문제의 고유함수와 고유치를 결정하는 것은 매우 어렵다고 알려져 있다. 고유치 문제 (24)에 대한 직접적인 수치 해석이 가능하지만 Sellars et al.⁽¹⁾이 보고하였듯이 큰 값의 고유치와 고유함수를 직접 계산하는 것은 수치적으로 많은 무리가 있다. 따라서 본 논문에서는 가중잔류법을 이용하여 고유치 문제 (24)에 대한 근사해를 구하도록 한다.

우선, 고유함수 R_n 을 경계조건 (24b)를 만족하도록 하는 결정된함수 $S_i(r)$ 의 선형 조합으로 근사한다.

$$R_n = \sum_{i=1}^N c_i^{(n)} S_i(r), \quad n=1, 2, \dots, N \quad (29)$$

여기서 $c_i^{(n)}$ 은 미정 계수이다. 본 연구에서 $S_i = \cos((2i-1)/2)\pi r$ 로 하였다. 식 (24a)에 가중함수 w_j 를 곱하여 적분하면 다음과 같이 된다.

$$\int_0^1 (rR_n')' w_j dr$$

$$+ \int_0^1 \left(\frac{\lambda_n^2}{Pe^2} + \lambda_n \frac{u}{2} \right) r R_n w_j dr = 0 \quad (30)$$

Galerkin 방법에서 $w_j = S_j$ 이므로 식 (30)은 다음과 같이 된다. (자세한 것은 Finlayson⁽²¹⁾을 참조할 수 있다.)

$$\sum_{i=1}^N (A_{ji} + \lambda_n^2 B_{ji} + \lambda_n C_{ji}) c_i^{(n)} = 0$$

$$n=1, 2, \dots, N \quad (31)$$

여기서 A_{ji}, B_{ji} 와 C_{ji} 는 아래와 같이 표현되는 행렬의 요소들이다.

$$A_{ji} = - \int_0^1 r S_i w_j' dr \quad (32a)$$

$$B_{ji} = \frac{1}{Pe^2} \int_0^1 r S_i w_j dr \quad (32b)$$

$$C_{ji} = \int_0^1 \frac{u}{2} r S_i w_j dr \quad (32c)$$

식 (31)은 부가적인 고유벡터 \mathbf{d} 를 도입하면 $2N \times 2N$ 의 선형 행렬 문제로 바뀐다.

$$\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A} & -\mathbf{B}^{-1}\mathbf{C} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{c} \\ \mathbf{d} \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \mathbf{c} \\ \mathbf{d} \end{pmatrix} \quad (33)$$

여기서 $\mathbf{A} = \{A_{ji}\}$, $\mathbf{B} = \{B_{ji}\}$, $\mathbf{C} = \{C_{ji}\}$ 이다. 식 (33)을 풀면 N 개의 양수 고유치 λ_n 과 해당 고유벡터들을 구할 수 있다.

3.4 결과 및 토의

앞서 제시된 해법을 이용하여 $c=0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8$ 일 때, $Pe=10, 100, 1000$ 과 $Br=0, 0.1, 1, 2$ 각각에 대하여 $0.001 \leq x^+ \leq 10$ 의 구간에서 해를 구하였다. $Br=0$ 일 때, 큰 수의 x^+ 에 대한 해를 이용하면 2장에서 구한 완전발달유동의 온도분포를 검증할 수 있다. 두 결과가 잘 일치하여 그림

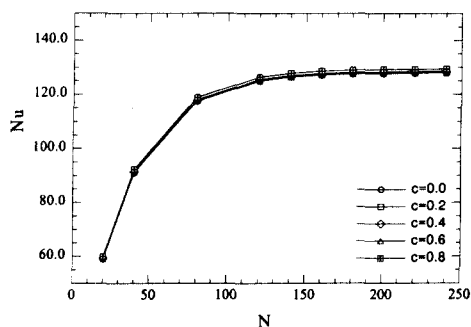
상으로 그 차이를 구별할 수 없으므로 비교 결과를 제시하지 않는다.

Fig. 5(a)와 (b)는 각각 $x^+=0.001$, $Pe=10$ 일 때 $Br=0$ 과 $Br=1$ 일 때의 누셀트수를 고유모드의 개수 N 에 따라 나타낸 것이다. Johnston⁽¹⁶⁾은 그의 근사 해법에서 c 가 증가함에 따라, Pe 와 x^+ 가 감소함에 따라 수렴된 해를 얻기 위한 고유모드의 개수 N 이 증가한다고 보고하였다. 그러나, 본 연구에 사용한 근사 해법에서는 N 이 c 에 무관함을 볼 수 있다. $x^+=0.001$ 에서 수렴된 해를 얻기 위해서는 그림과 같이 대개 200개의 고유모드들이 필요하지만 $x^+>0.1$ 에서는 단지 20~30개의 고유모드들만으로도 수렴된 해를 얻을 수 있다. 본 연구에 사용된 수렴 조건은 $(Nu^{N+1}-Nu^N)/Nu^N < 10^{-5}$ 이다.

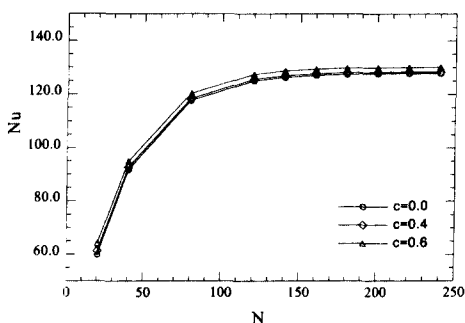
Fig. 6(a)와 6(b)는 각각 점성소산이 무시될 때 ($Br=0$), $c=0$ 일 때의 누셀트수와 $c=0.4$ 일 때의 평균온도이다. 본 연구의 결과가 이전의 연구의 결과들^(15,16)과 잘 일치함을 볼 수 있다. 예측할 수 있듯이, 페클레수가 증가함에 따라 곡선들이 축방

향 열전도를 고려하지 않은 해석해인 Blackwell⁽¹⁵⁾과 Johnston⁽¹⁶⁾의 결과들에 접근함을 볼 수 있다. Fig. 6(b)로부터 축방향 열전도가 평균온도에 미치는 영향은 페클레수가 100 이상이면 무시할 수 있으며, Fig. 6(a)로부터 페클레수가 500 이상이면 누셀트수에 미치는 영향도 무시할 수 있다고 생각된다.

Fig. 7(a)와 7(b)는 각각 $c=0$ 일 때 점성소산을 고려한 경우에 평균온도와 누셀트수를 나타낸 것이다. 본 연구의 결과가 뉴턴유체의 경우 Ou and Cheng⁽⁸⁾이 해석한 결과와 잘 일치함을 볼 수 있다. Fig. 7(b)에서 $Br=0.1$ 일 때 누셀트수가 x^+ 에 따라 단조적으로 감소하지 않고 극소값을 가지는 것을 볼 수 있다. 이는 어떤 Br 에서 입구에서는 냉각 효과가 마찰열보다 지배적인 반면 하류 쪽에서는 마찰열이 냉각 효과보다 지배적으로 되기 때문이다.⁽⁹⁾ 누셀트수의 변화는 평균온도와 벽면에서의 온도구배로 설명될 수 있다. Fig. 7(a)에서



(a) $Br=0$



(b) $Br=1$

Fig. 5 Variation of local Nusselt number at $x^+=0.001$ for $Pe=10$ with respect to N

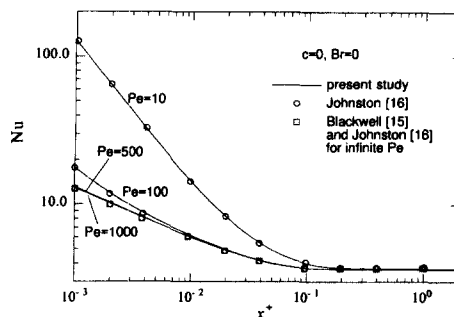


Fig. 6(a) Local Nusselt number with respect to axial distance for $c=0$ (excluding viscous dissipation)

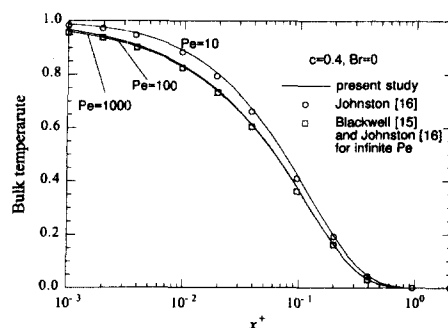


Fig. 6(b) Bulk temperature with respect to axial distance for $c=0.4$ (excluding viscous dissipation)

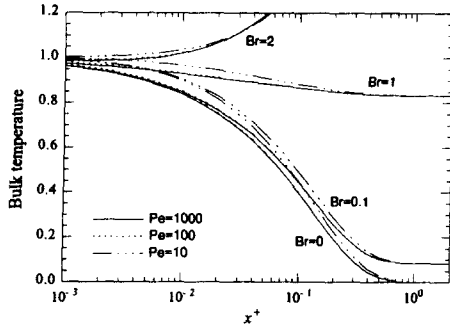


Fig. 7(a) Bulk temperature with respect to axial distance for $c=0$

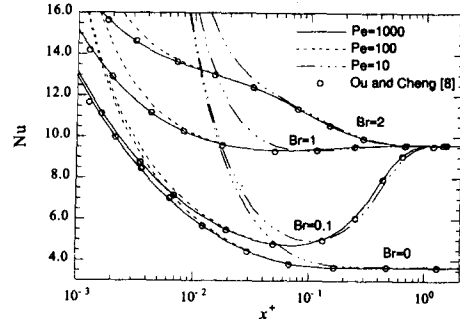
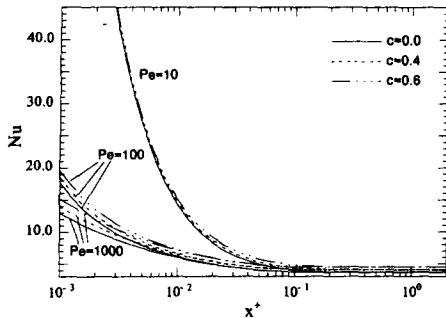
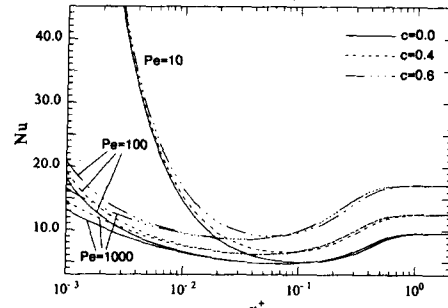


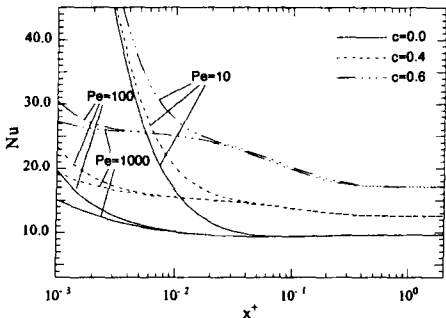
Fig. 7(b) Local Nusselt number with respect to axial distance for $c=0$



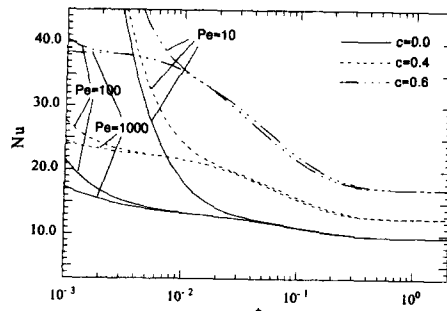
(a) $Br=0$



(b) $Br=0.1$



(c) $Br=1$



(d) $Br=2$

Fig. 8 Local Nusselt number with respect to axial distance

입구에서 Br 이 증가함에 따라 평균온도가 그다지 심하게 변하지 않음에도 Fig. 7(b)의 누셀트수가 상당히 감소함을 볼 수 있다. 따라서 이는 입구에서 Br 에 따라 벽면의 온도 구배가 상당히 변하고 있음을 보여주는 것이다. Fig. 7(b)에서 $Br=0$ 인 경우를 제외하고 누셀트수는 하류에서 ($x^+ > 1$) Br 에 관계 없이 일정한 값을 가짐을 볼 수 있다.

$Br=0, 0.1, 1, 2$ 일 때 여러 페클레수와 c 에 따른 누셀트수를 Fig. 8에 나타내었다. $Br=0$ 일 때,

즉 점성소산이 무시될 때, Fig. 8(a)에서 보듯이 누셀트수는 c 가 변화함에 따라 그다지 큰 변화를 보이지 않는다. 하지만 Fig. 8(b)~(d)에서 보듯이 점성소산이 고려될 때 ($Br \neq 0$), 누셀트수는 $x^+ > 0.01$ 에서 c 에 따라 크게 변화한다.

4. 결 론

본 논문에서는 원관내의 빙햄 플라스틱에 대하여

축방향 열전도를 고려한 완전발달유동과 축방향 열전도와 점성소산을 동시에 고려한 온도분포 발달유동(그래츠문제)을 연구하였다.

완전발달유동에서 온도분포는 베셀함수와 무한떡급수의 결합된 형태로 구하여졌고, 항복응력과 페클레수에 따른 누셀트수를 구하였다. 완전발달 온도분포와 누셀트수는 항복응력이 커질수록 페클레수에 덜 영향받음을 알 수 있었다. 페클레수에 따른 누셀트수의 상관 관계식은 페클레수의 전범위에 걸쳐 누셀트수를 잘 예측하였다.

그래츠문제에 대한 해석하는 변수분리법에 의해 구성되는 고유치 문제에 대한 근사해로 구하였으며, 고유함수와 고유치는 가중잔류법으로 구하였다. 점성소산이 고려되지 않는 경우의 누셀트수는 항복응력에 크게 영향받지 않았지만, 점성소산이 고려되는 경우의 누셀트수는 항복응력에 따라 크게 값이 변하는 것을 볼 수 있었다. 따라서 빙햄 플라스틱의 경우, 점성소산은 온도분포 발달유동에서 열전달 특성에 매우 중요한 인자이다.

후 기

본 연구는 국방과학연구소의 후원으로 수행되었으며 관계자 여러분들께 감사드립니다. 또한 연구수행중 유익한 조언을 해주신 최만수 교수님께도 감사를 드립니다.

참고문헌

- (1) Sellars, J. R., Tribus, M. and Klein J. S., 1956, "Heat Transfer to Laminar Flow in a Round Tube or Flat Conduit-the Graetz Problem Extended," *ASME Trans.*, Vol. 78, pp. 441~448.
- (2) Pahor, S. and Strand, J., 1956, "Die Nusseltsche Zahl für Laminare Strömung im Zylindrischen Rohr mit Konstanter Wandtemperatur," *Z. Angew. Math. Phys.*, Vol. 7, pp. 536~538.
- (3) Brown, G. M., 1960, "Heat or mass transfer in a Fluid in Laminar Flow in a Circular or Flat Conduit," *AICHE J.*, Vol. 6, pp. 179~183.
- (4) Larkin, B. K., 1961, "High-Order Eigenfunctions of the Graetz Problem," *AICHE J.*, Vol. 7, p. 530.

- (5) Ash, R. L. and Heinbockel, J. H., 1970, "Note on Heat Transfer in Laminar, fully Developed Pipe Flow with Axial Conduction," *Z. Angew. Math. Phys.*, Vol. 21, pp. 266~269.
- (6) Newman, J., 1973, The Graetz problem, *In The Fundamental Principles of Current Distribution and Mass Transport in Electrochemical Cells* (Edited by Bard, A. J.), Vol. 6, Dekker, New York, pp 187~352.
- (7) Michelsen, M. L. and Villadsen, J., 1974, "The Graetz Problem with Axial Heat Conduction," *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. 17, pp. 1391~1402.
- (8) Ou, J. W. and Cheng, K. C., 1974, "Viscous Dissipation Effects on Thermal Entrance Heat Transfer in Laminar and Turbulent Pipe Flows with Uniform Wall Temperature," *AIAA paper* 74~743 or *ASME paper* 74-HT-50.
- (9) Shah, R. K. and London, A. L., 1978, Laminar Flow Forced Convection in Ducts, *Advances in Heat Transfer*, suppl. 1, Academic Press, New York.
- (10) Kakac, S., Shah, R. K. and Aung, W., 1987, *Handbook of Single-Phase Convective Heat Transfer*, John Wiley, New York.
- (11) Kays, W. M. and Crawford, M. E., 1993, *Convective Heat and Mass Transfer* (3rd Edn), McGraw-Hill, New York.
- (12) Bhatti, M. S., 1985, "Fully Developed Temperature Distribution in a Circular Tube with Uniform Wall Temperature," unpublished paper (cited in References 10 and 11), Owens-Corning Fiberglass Corporation, Granville, Ohio.
- (13) Vradis, G. C., Dougher, J. and Kumar, S., 1993, "Entrance Pipe Flow and Heat Transfer for a Bingham Plastic," *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. 36, pp. 543~552.
- (14) Wissler, E. H. and Schechter, R. S., 1959, "The Graetz-Nusselt Problem (with Extension) for a Bingham Plastic," *Chem. Engng. Prog. Symp. Series* No. 29, Vol. 55, pp. 203~208.
- (15) Blackwell, B. F., 1985, "Numerical Solution of The Graetz Problem for a Bingham Plastic in Laminar Tube Flow with Constant Wall Tem-

- perature," *J. Heat Transfer*, Vol. 107, pp. 466~468.
- (16) Johnston, P. R., 1991, "Axial Conduction and the Graetz Problem for a Bingham Plastic in Laminar Tube Flow," *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. 34, pp. 1209~1217.
- (17) Bird, R. B., Stewart, W. E. and Lightfoot, E. N., 1960, *Transport Phenomena*, John Wiley, New York.
- (18) Churchill, S. W. and Usagi, R., 1972, "A General Expression for the Correlation of Rates of Transfer and Other Phenomena," *AIChE J.*, Vol. 18, pp. 1121~1128.
- (19) 민태기, 유정열, 최해천, 1996, "원관내의 Bingham Plastic의 완전발달유동," 대한기계학회 열 및 유체공학부문학술대회 논문집, pp. 131~137.
- (20) LeCroy, R. C. and Eraslan, A. H., 1969, "The Solution of Temperature Development in the Entrance Region of an MHD Channel by the B. G. Galerkin Method," *J. Heat Transfer*, Vol. 91, pp. 212~220.
- (21) Finlayson, B. A., 1972, *The Method of Weighted Residuals and Variational Principles*, Academic Press, New York.