대한기계학회논문집(B) 제 20 권 제 12 호, pp. 3949~3959, 1996

〈논 문〉

수직평판 사이를 흐르는 두 점성유체의 밀도차에 의한 계면의 새로운 불안정성 연구

이철우* · 주상우** · 이상천**

(1996년 4월 22일 접수)

A Study of a New Interfacial Instability between Two Vertical Fluid Layers of Different Densities

Cheol-Woo Lee, Sang-Woo Joo and Sang-Chun Lee

Key Words: Stability Analysis(안정성 해석), Interface(계면), Nonlinear, Evolution Equation(비선형 변화 방정식), Stratified Flow(성층류)

Abstract

A new interfacial instability between two vertical fluid layers of different densities is studied. The two layers are flowing between two parallel vertical plates vertically upward or downward, forming counter- or cocurrent flows. In order to extend the study to highly-nonlinear regime in future studies, a nonlinear interface evolution equation is derived, and the stabilty analysis is performed based on the evolution equation. Among the parameters studies are the ratios of the fluid densities and layer thicknesses and the net flow rate.

1. 서 론

서로 다른 유체가 흐를 때 그 계면의 안정성은 아주 오래 전부터 연구의 대상이 되어 왔고, 최근 필름제조, 복합방사, 전자제품 제조 등 여러 현대적인 물질가공 공정시 중요한 요소가 된다. 수많은 학자들이 이 계면의 안정성에 대해 연구해 왔으나 섭동법(攝動法, perturbation method)을 사용하여 처음으로 이론정립을 한 사람은 Yih[1]였다. 그 후에 그는 수평으로 놓인 두 평판 사이를 흐르는 두 점성 유체 유동의 계면에 대한 선형 안정성 해석을 수행하였다.[2] 이 논문에서 그는 유량이 있을 경우엔 점도차에 의한 불안정성이 항상 나타난다는 것을 밝혔다. Yih가 점도차에 의한 논문을 발표한 이후로 많은 사람들은 점도차가 계면에 미치는 영향에 주안점을 두어왔다. Renardy[3]는 수직 평판 사이에서 세 개의 층으로 이루어진 두 점성유체가 흐르는 경우에 대해 연구하였다. 그녀는 두 유체의 점도가 같을 경우에 대해서 중력으로 인해 유체가 떨어질 때는 가운데의 유체가 눈에 띄게 무거울 경우에만 유동은 안정하게 되고, 중력이 작용하는 반대방향으로 유동이 가해질 경우에는 무거운 유체가 바깥쪽에 있을 때만이 안정해질 수 있다고 밝혔다. 그러나 그녀의 연구는 평판 사이에서 세 개의 층으로 된 두 유체가 중심축을 기준으로 대칭된 경우였으며 수직평판 사이로 두 점성유동이 비대칭적으로 배치되었을 때에 대한 연구는 언급하지 않았다. Yiantsios와 Higgins[4]는 Yih의 연구를 임의의 유체와 체적비로 그 연구 범위를 연장하였다. 그들은 두 점성유체가 수평 평판 사이를 흐르고 있을 때

*영남대학교 대학원 기계공학부
**회원, 영남대학교 기계공학부

중력에 대한 새로운 변수를 정의함으로써 아래에 있는 유체의 밀도가 높은(낮은) 경우 그 변수의 값이 증가할수록 유동을 안정화(불안정화)시킨다고 밝혔다. Tilley, Davis, Bankoff[5]는 기울어진 평판 사이에서 두 점성유체가 흐를 때 기울어진 각도를 0도에서 90도 사이로 변화시키면서 각도 변화에 따른 계면의 선형 안정성 해석을 수행하였다. Joo[6]는 수직 평판 사이로 두 점탄성 유체가 흐를 때 열전달이 있는 경우에 대하여 계면에 대한 비선형 변화 방정식을 유도하였으며 이에 대해 선형 안정성 해석을 수행하였다. 그는 이 논문에서 밀도차만에 의한 수직 유동의 불안정성을 처음으로 발견하였다. 그러나 정량적인 부분에 대해서는 자세한 언급이 없었으므로 본 논문에서는 그의 결과를 Newtonian 유체에 대해 밀도차 또는 계면의 위치를 변화시켜 가면서 그것의 안정성을 연구해보고자 한다.

밀도가 다른 두 유체가 수평 계면을 사이에 두고 위 아래로 배열되어 있을 때의 불안정성은 Rayleigh-Taylor 불안정성이라고 불리며 아주 오래전부터 연구되어 왔다. 밀도가 높은 유체가 위에 있을 경우 계면의 불안정성은 직감적으로도 예측할 수 있는 일이다. 두 유체가 수직 계면을 사이에 두고 좌우로 배열되어 있는 경우의 안정성은 아직 상세히 보고된 적이 없다. 두 유체가 정체되어 있는 경우는 무거운 유체가 아래쪽에 위치하려는 경향 때문에 계면이 물론 불안정하겠지만 유동하고 있는 경우에는 유동 속도와 방향 등에 따라 여러 가지 결과를 가져올 수 있다. 이것은 Rayleigh-Taylor 불안정성과는 상이한 것으로 본 논문에서 집중 보고한다.

본 논문에서 소개될 내용은 다음과 같다. 2장에서는 점도가 같은 두 중첩된 유체 유동에 대해서 Navier-Stokes 방정식과 연속 방정식을 섭동법을 적용하여 해석한다. 밀도차만에 의한 영향을 집중 조사하기 위해 점도차는 배제시킨다. 이들 식을 주어진 경계조건과 함께 풀어 변화 방정식을 유도한다. 3장에서는 기본상태에 단순한 조화 함수 형태의 외란이 가해진 변화 방정식을 선형화시켜 중립 안정성 선도를 나타내는데 필요한 식을 구한다. 4장에서는 밀도차와 계면의 위치가 안정성에 미치는 영향을 중립 안정성 선도로부터 알아보고 그 의미를 알아본다. 그리고 마지막으로 5장에서는 결과에 대해서 토론한다.

2. 변화 방정식의 유도

서로 혼합될 수 없고 비압축성인 두 유체가 수직 평행 평판 사이에서 Fig. 1에서와 같이 흘러내리고 있다. 유동은 중력과 압력구배의 복합적인 영향에 의해 야기되므로 평균유동의 방향은 각 상내에서 수직 상승 또는 수직 하강일 수도 있다. 각각의 유체는 일정한 밀도 ρ_i를 가지며 두 유체의 점도는 같다고 가정한다. 여기에서 첨자 i=1(또는 i=2)은 유체 1(또는 유체 2)을 나타낸다. 본 논문에서는 Tilley 등[5] 또는 Joo[6]와 유사한 방법으로 지배 방정식들을 전개한다.

좌표계는 직각좌표계를 사용하며 두 평판 사이의 거리는 H, x는 수직하강방향, 그리고 y는 x축에서 유체쪽으로 평판에 대해 직각방향을 나타낸다. 유체의 점성 차원에 기초하여 무차원 시간 t, 속도 $(u^{(i)}, v^{(i)})$, 압력 $p^{(i)}$는 각각 H^2/ν_1, ν_1/H, $\rho_1\nu_1^2/H^2$로 측정한다. 지배방정식인 연속방정식과 Navier-Stokes 방정식을 무차원식으로 쓰면

$$u^{(i)}{}_x + v^{(i)}{}_y = 0 \tag{2.1a}$$

$$u_t{}^{(i)} + u^{(i)}u_x{}^{(i)} + v^{(i)}u_y{}^{(i)} = \frac{\rho_1}{\rho_i}[-p_x{}^{(i)} + u_{xx}^{(i)} + u_{yy}^{(i)}] + G \tag{2.1b}$$

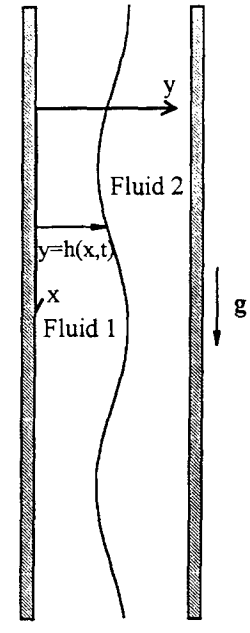


Fig. 1 Two-layer flow configuration

$$v_t^{(i)}+u^{(i)}v_x^{(i)}+v^{(i)}v_y^{(i)}$$
$$=\frac{\rho_1}{\rho_i}[-p_y^{(i)}+v_{xx}^{(i)}+v_{yy}^{(i)}] \quad (2.1c)$$

여기서 첨자 x, y, t는 편미분을 나타내고, 매개변수

$$G=\frac{H^3g}{\nu_1^2} \quad (3)$$

는 중력의 척도를 나타낸다. 그러나 실제로 중력은 일정하게 작용하므로 이 매개변수는 두 평판 사이의 거리를 측정한다. 밀도차에 대한 매개변수

$$\rho=\frac{\rho_2}{\rho_1}$$

는 유체 2에 대한 Navier-Stokes 방정식에서 나타난다.

수직 평판에 대한 점착조건은

$$y=0,1\text{에서 각각} \quad u^{(1)}=0,\ u^{(2)}=0 \quad (2.2)$$

이고, 계면 y=h(x, t)에서 경계조건 중 수직응력 도약조건은

$$p^{(2)}-p^{(1)}-\left[\left[\frac{2}{1+h_x^2}\{(h_x^2-1)u_x - (u_y+v_x)h_x\}\right]\right]=S\frac{h_{xx}}{(1+h_x^2)^{3/2}} \quad (2.3)$$

으로 나타나며 식을 간단히 나타내기 위해 f_1-f_2를 [[f]]라는 기호을 사용하여 나타내었다. 식내에서 나타난 매개변수

$$S=\frac{\gamma\rho_1 H}{\mu^2}$$

는 표면장력 γ의 척도가 된다. 계면에서 두 유체간의 전단응력 도약조건은 점도차가 없으므로

$$[[(u_y+v_x)(1-h_x^2)-4u_xh_x]]=0 \quad (2.4)$$

가 되고, 계면에서 두 유체간의 접선속도 연속조건은

$$[[u+vh_x]]=0 \quad (2.5)$$

이며 계면의 위치를 결정짓는 운동 조건(kinematic condition)은

$$h_t+\frac{\partial}{\partial x}\int_0^h u\ dy=0 \quad (2.6)$$

로 표현되며 이 조건은 임의의 시간에 계면 위에 있던 유체 입자는 항상 그 계면위에 남는다는 것을 뜻한다. 그리고 전체적 구속조건(global constraint)으로

$$Q=\int_0^1 u\ dy \quad (2.7)$$

가 있으며 이는 평판 사이를 흐르는 두 유체의 총 유량을 나타낸다.

위에 서술된 두 유체 시스템은 계면의 유동에 의해 비선형적으로 맞물려 있다. 계면의 위치는 미리 정해진 것이 아니라 각 유체의 유동에 따라 변해간다. 이러한 경우를 자유 경계면 문제(free-boundary problem)라 하는데 경계면이 미리 정해진 일반적인 문제보다는 해석의 어려움이 따른다. 본 연구에서는 특히 계면의 안정성에 관심을 두고 있기 때문에 경계면의 변화에 대한 정확한 해석이 요구된다. 수직 평면에 가까운 선형 영역뿐 아니라 불안정한 계면의 비선형 변화를 파악하기 위해서 Tilley 등[5]과 Joo[6]에서 택한 윤활근사(lubrication approximation)를 통한 계면 변화 방정식의 유도를 꾀한다. 이러한 방법은 계면의 변화가 두 유체의 두께에 비해 긴 파장으로 나타날 때 가능한 것인데 본 문제에서는 표면장력의 영향으로 짧은 파장의 계면 변화가 소멸되기 때문에 적절한 것이다. 이것에 관한 선형 안정성 해석을 통한 상세한 설명은 Tilley 등[5]과 Joo[6]에서 찾아볼 수 있다. 이 계면 변화 방정식의 상세한 유도과정은 부록에 나와 있는데 그 최종식은

$$h_\tau+Ah_\xi+(Bh_\xi+Ch_{\xi\xi\xi})_\xi=0 \quad (2.8)$$

로 표현될 수 있다. 두 유체에 대한 모든 보존 법칙과 경계조건은 이 식 하나에 함축되어 있으며, 여기서 A, B 그리고 C는 다음과 같은 매개변수들의 함수이다.

$$A=A(h\,;\,\rho, G, Q)$$
$$B=B(h\,;\,\rho, G, Q)$$
$$C=C(h\,;\,S)$$

위에서 구한 변화 방정식은 Tilley 등[5]에 의해 보고된 식에서 점도차가 없는 경우와 일치한다. 위의 수식들은 Macsyma(Software 명)에 의해 계산되었으며 결과식의 상세한 항들은 저자로부터 요청에 의해 제공될 수 있다.

위의 변화 방정식에서 A항은 유동에 따라서 외란를 받은 계면의 파도 이동을 지배하는 항으로 간주된다. 이에 대한 설명은 Joo[6]의 논문에 잘 설명

되어 있다. 계면의 파속(phase velocity)인 A항은 다음과 같이 쓰여진다.

$$A=h(h-1)\{Gh(2h-1)(h-1)(\rho-1)-6Q\}$$

계면의 위치를 0과 1 사이에서 고정시켰을 때는 식에서 볼 수 있는 것과 같이 파속은 밀도차에 대해 단조증가 혹은 단조감소하는 경향을 보이나 계면이 수직평판 사이에서 중앙에 위치한 경우에는 (h=1/2) 두 유체의 밀도차에 관계 없이 항상 3Q/2라는 값을 갖는다. 이것은 두 유체의 두께가 같을 경우에는 밀도차가 아무리 크다 하더라도 파속에는 영향을 미치지 못하고 단지 유량의 크기만이 파속을 바꿀 수 있다는 말이 된다.

3. 선형 안정성 해석

수직 평판내의 총유량은 두 유체 유량의 합으로 표현되므로 기본 상태의 속도 분포는 한눈에 알아보기에 쉽지 않다. 예를 들면 Q의 부호에 의해 각 유체의 유동 방향이 간단히 결정되지는 않는다. 대향류(counter-current flow)일 경우는 Q=0인 경우에도 각 방향으로 큰 속도를 가질 수 있다. 그러므로 우리는 여기에서 대향류 영역을 따로 구분함으로써 각 유체 유동의 속도 분포를 쉽게 구분하고자 한다. 계면의 위치를 나타내는 h를 h_0(상수)으로 고정시켜 놓을 경우 계면은 평평한 기본 상태를 나타내게 된다. 이 기본 상태의 속도는 $h=h_0$을 기본 상태의 해(식 A. 15)에 대입함으로써 구할 수 있다. 그리고 양쪽 벽면에서 $u_0^{(i)}$의 기울기의 곱이 양수라는 조건으로부터 대향류가 발생하는 범위를 계면의 위치 혹은 밀도차에 대해서 중력에 대한 유량의 척도로 알 수 있다. Fig. 2에서 밀도차의 범위를 $0<\rho<1$로 한 것은 이를 역수로 취할 경우 $1<1/\rho<\infty$가 되어 모든 밀도차에 대해서 다룰 수 있기 때문이다. 다시 말해서 일반성을 잃지 않고 유체 1이 밀도가 높은 유체로 한다.

우리의 직관적인 생각과 마찬가지로 Fig. 2을 보면 밀도차가 클수록(작을수록) 대향류 영역이 넓어짐(좁아짐)을 알 수 있으며 밀도차가 고정된 경우 양쪽 벽면으로 계면이 치우칠수록 그 영역은 좁아진다. 그리고 Fig. 2(a) 에서와 같이 대향류는 총유량 Q가 0 주위에서만 발생할 수 있으며 유량이 어느 정도 이상이 되면 계면의 위치와 밀도차에 관계없이 항상 동향류가 된다. 밀도가 낮은(높은) 유체의 두께가 상대적으로 얇은 경우에는 양(음)의 유량일 때 대향류가 일어나기 쉽다. 여기서 양의 방향이란 중력 방향을 의미한다. 한편, 일정한 유량에 대해서 G의 값이 커질수록(두 수직 평판의 거리가 멀어질수록) 대향류가 쉽게 발생할 수 있다. 본 논문에서는 대향류 선도와 중립 안정성 선도를 Q/G에 대해서 표현하였다. Fig. 2(b)를 보면 대향류의 밀도차에 의한 영향이 선형적으로 나타남을 알 수 있다. 참고로 하나의 밀도차에 대해서는 $h_0=0.5$일 때 대향류가 일어날 확률이 가장 높다.

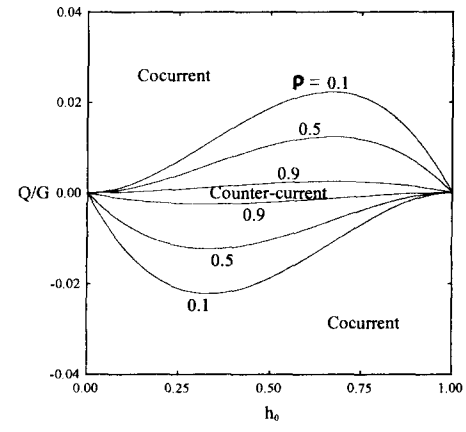


Fig. 2 Region of the counter-current flow

계면의 선형 안정성은 앞서 구한 계면 변화 방정식을 이용해 해석할 수 있는데, 이를 위해서 기본 상태에 무한소의 크기를 가진 단순한 조화 함수 형태의 외란을 가하는 것을 다음과 같은 식으로 나타

낸다 :

$$h=h_0+\delta(e^{ikx+\sigma t}+c.c).$$

여기에서 k는 외란 파수(disturbance wavenumber)를, σ는 복소수 형태의 성장률(complex growth rate)을, c. c. 는 켤레 복소수(complex conjugate)를, 그리고 δ은 1 보다 아주 작은 크기를 나타낸다.

위 식에서 복소수 형태의 성장률의 실수부 σ_r이 양수이면 우리가 가한 외란의 크기가 시간에 따라 지수함수적으로 무한히 증가함을 나타낸다. 그러므로 위에서 나타낸 h를 변화 방정식에 대입하여 선형화시킨 다음 실수부에 대해서 정리하면 다음과 같다.

$$\sigma_r=k^2[B(h_0)-k^2C(h_0)]$$

따라서 모든 파수에 대해서 B>0이면 유동을 불안정화시키고 B<0일 경우는 안정화시킨다(k=0일 경우 중립 안정성). 유동을 안정화시키는 항 $k^2C(h_0)$에서 파수가 0이 될 경우 불안정성이 시작되는 것은 확실하며 유동의 안정성의 기준이 되는 cutoff wavenumber는 $k_c=(B/C)^{1/2}$가 된다. k_c식으로부터 밀도가 다른 두 유체의 안정성에 대한 표면장력의 영향은 다음 그림에서 확인될 수 있다.

Fig. 3에서와 같이 표면장력효과는 k_c를 줄여 안정 영역을 확장시킨다. 그리고 유량이 약 0.017 이상에서는 모든 파수에 대해서 안정하고 S=1일 경우 파수가 약 0.008 이상이면 유량이 양수인 모든 경우에 대해 안정하다. 일반적으로 단파는 표면장력에 의해 안정화된다. 이 사실은 역시 식에서도 알 수 있다. 표면장력효과를 나타내는 C항은 단파를 소멸시키므로 계면의 불안정성은 장파에 대해서만 일어난다. C항을 쓰면 다음과 같다.

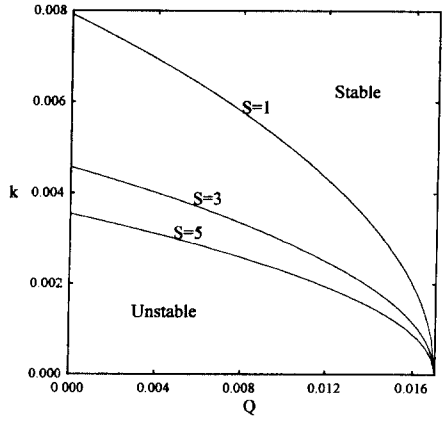


Fig. 3 Effect of surface tension for the interfacial instability (h_0=0.5, G=1, ρ=0.5)

$$C=-\frac{(h-1)^3h^3S}{3}$$

$0<h<1$에서 C는 항상 양의 값을 가지므로 표면장력효과는 항상 유동을 안정화시킨다.

4. 밀도차가 있는 유동에 대한 안정성 해석

B=0인 중립 안정성 선도를 그려봄으로써 계면의 위치 또는 밀도차의 변화에 따른 안정성 영역을 도시화 할 수 있다. 지금부터는 편의성을 위해 초기 계면의 위치 h_0을 h로 나타낸다.

아래의 Fig. 4는 밀도차가 정해졌을 때의 중립 안정성 선도를 나타낸 것들이며 점선안의 영역은 유동이 대향류임을 나타낸다.

위의 그림들은 크게 두 가지로 나누어질 수 있다. 하나는 총유량이 0일 때 안정한 영역이 존재하는 경우와 또 하나는 그렇지 않은 경우이다. Fig. 4(a), (b)는 모두 유량이 0에서 좁으나마 안정한 영역이 있으며 이들이 의미하는 것은 두 유체가 수직 평판 사이에서 수직으로 정지해 있는 것이 아니라 반대 방향으로 같은 크기의 유량이 흐르는 대향류임이 기본 상태의 속도 분포로부터 확인되었다. 계면의 위치가 약 0.4 근처에 있을 때 두 유체의 밀도차가 0과 0.1 사이일 경우는 유량의 크기와 중력에 관계 없이 항상 안정함을 Fig. 4(a)로부터 알 수 있다. 물론 파수가 안정한 영역내에 있는 유량과 중력의 범위 안에 있어야 할 것이다. Fig. 4(b)에서와 같이 밀도차가 작아짐에 따라 유량이 0 일 때 안정한 영역은 없어지며 하나의 안정한 영역이 둘로 나뉘게 된다. 밀도차가 작아질수록 대향류이면서 안정한 영역은 줄어들게 된다. Fig. 4에서는 Q/G축에 평행한 점근선이 존재하며 이 점근선은 밀도차의 크기에 따라 불안정한 영역내에서 2개 혹은 3개일 수도 있다. 계면의 위치(h)가 이 점근선의 위치와 일치하게 되면 유량과 중력의 크기에 관계 없이 항상 불안정한 영역이 나타나게 된다. 위의 그림 중 계면의 위치가 0.4와 0.6으로 고정된 기본 상태에서 유량을 달리한 경우들에 대해서 속도분포를 그려보면 Fig. 5와 같다.

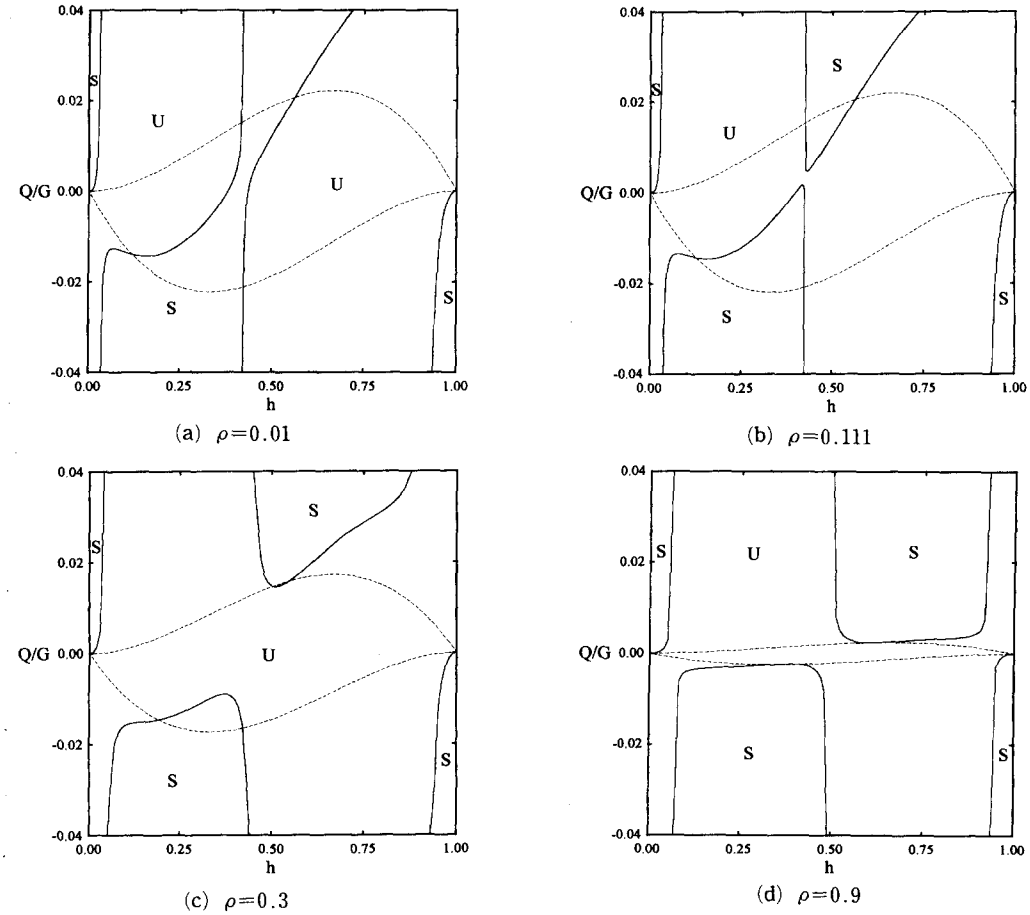
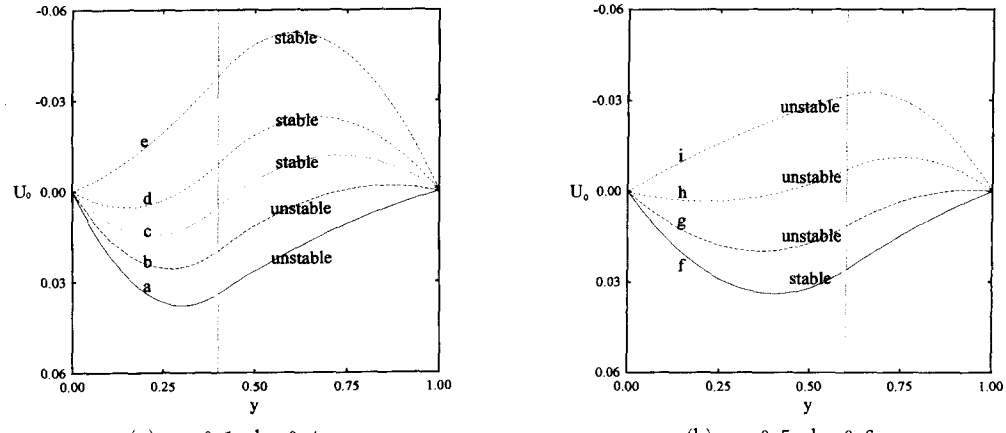


Fig. 4 Effect of interfacial location on the neutral stability diagram when the density difference is fixed (Stable regions are denoted by S and unstable regions by U.)



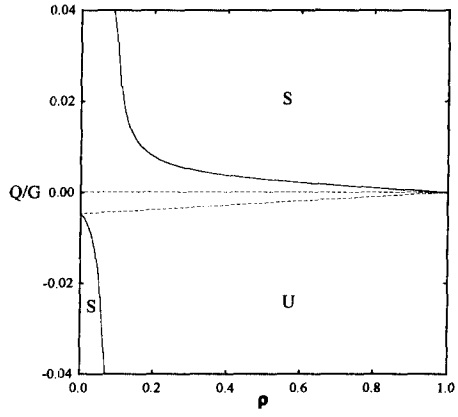
(Q_a=0.02, Q_b=0.01, Q_c=0, Q_d=−0.01 Q_e=−0.03, G=1)

(Q_f=0.02, Q_g=0.01, Q_h=−0.003, Q_i=−0.02, G=1)

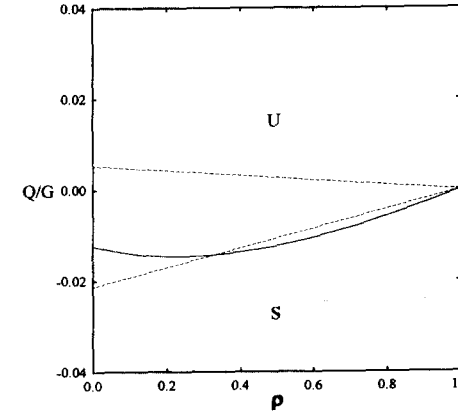
Fig. 5 Velocity profiles at basic state

Fig. 5에서 볼 때 유량이 0 일 때 c는 대향류라는 것이 확인된다. 유체 1의 밀도가 크므로 중력이 작용하는 방향으로 흐르고 유량은 0이므로 보다 가벼운 유체 2가 중력방향의 반대방향으로 흐르게 된다. 그리고 우리가 직관적으로 알 수 있듯이 유체가 중력방향(중력방향의 반대방향)으로 흐를 때는 밀도가 높은(낮은) 쪽에서 최대속도가 나타난다. 그림에 나타나 있지는 않지만 유량이 어느 정도 이상이 되거나 중력의 영향이 줄어들면 계면의 위치나 밀도차에 관계 없이 속도 단면은 단일유체와 같은 포물선 형태를 나타내게 된다.

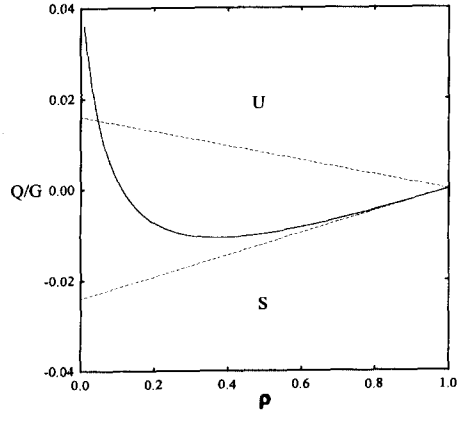
한편 계면의 위치를 고정시켜 놓은 상태에서 중립 안정성 선도를 그려보면 밀도차에 따라 안정한 영역이 변해나가는 과정을 잘 알 수 있다. 밀도차를 고정시켰을 경우와는 달리 계면의 위치를 고정시켰을 경우에는 계면의 위치에 따라 그림의 모습이 매우 급격하게 변화한다. Fig. 4와 마찬가지로 점선 내의 영역은 대향류 영역을 나타내고 있다. Fig. 6(a)와 같이 밀도가 높은 쪽의 유체 두께가 아주 얇을 경우 양의 유량에서는 거의 대부분의 영역에서 밀도차에 관계 없이 안정함을 볼 수 있다. 한편 음의 유량일 경우에는 밀도차가 아주 클 경우에만 안정한 영역이 나타나며 대향류 영역내에서는 안정한 영역이 나타나지 않는다. 밀도가 높은 유체 두께가 조금 더 두꺼워지면 (Fig. 6(b)) 중력에 대한 유량의 비가 약 −0.02 보다 작을 경우 밀도차에 관계 없이 항상 유동이 안정해짐을 볼 수 있다. 계면의 위치가 약 0.4 부근에서는 밀도차가 아주 클 경우 유량이 0일 때 안정한 영역이 나타나게 되며 (Fig. 6(c), (d), (e)) 이 역시 대향류인 경우이다. Fig. 6(f)와 같이 계면의 위치 h가 평판 사이의 한 가운데에 위치할 경우 중력에 대한 유량의



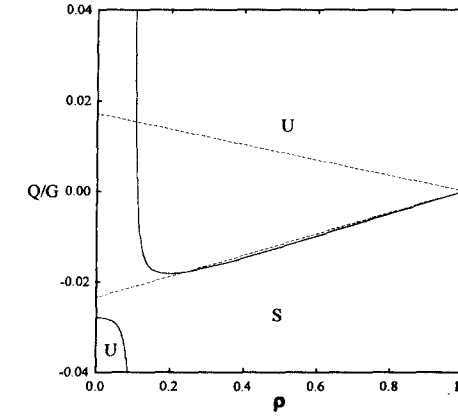
(a) h=0.03



(b) h=0.2

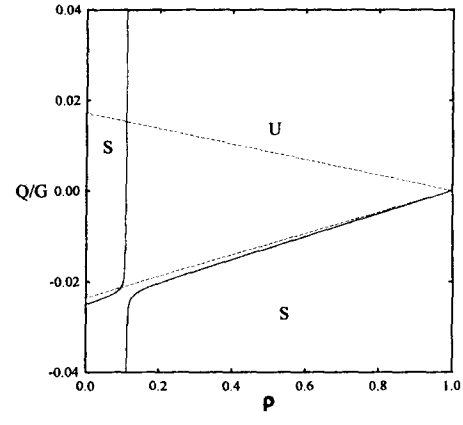


(c) h=0.4

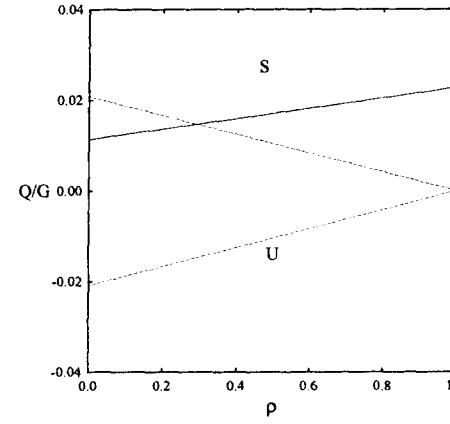


(d) h=0.422

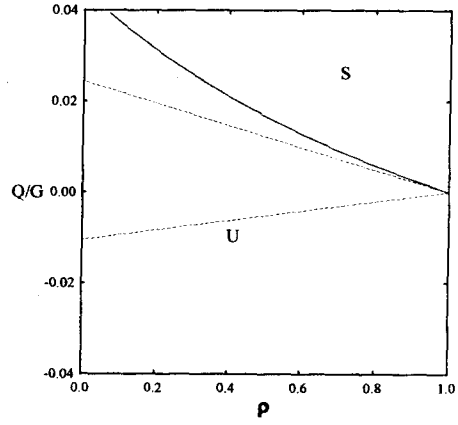
Fig. 6 Continued



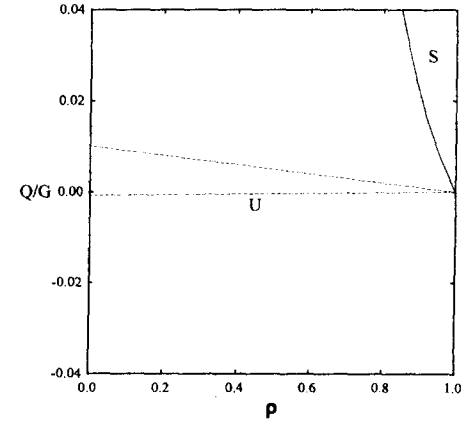
(e) h=0.4232



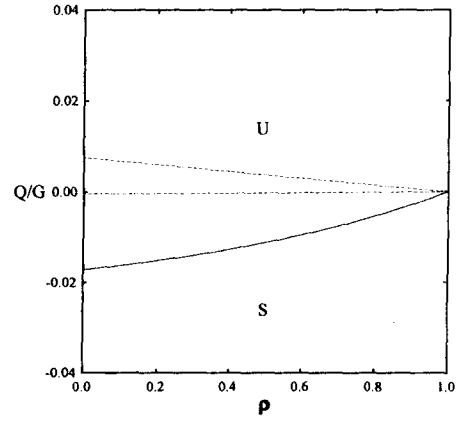
(f) h=0.5



(g) h=0.7



(h) h=0.93



(i) h=0.95

Fig. 6 Effect of density difference on the neutral stability diagram when the interfacial location is fixed (Stable regions are denoted by S and unstable regions by U.)

비가 약 0.03보다 크면 밀도차에 무관하게 항상 유동이 안정해진다. 밀도가 높은 유체의 두께가 아주 두꺼워지면 처음 두께가 얇았을 때와 비슷한 형상이 다시 반복된다. Fig. 6에서도 앞의 Fig. 4에서와 같은 점근선이 존재하는 경우가 있으며 이 점근선의 위치와 같은 밀도차에서는 유량과 중력에 관계없이 유체유동은 안정 또는 불안정해질 수 있다. Fig. 6(g)는 다시 Fig. 6(a)와 비슷한 양상을 나타낸다. 그러나 밀도차가 아주 클 경우 음의 유량에서는 안정한 영역이 없다는 차이점이 있다. Fig. 6(i)는 대향류 영역을 제외하고는 Fig. 6(b)와 아주 유사한 양상이다. 참고로 Fig. 6(h)는 아래쪽에 다시 안정한 영역이 나타나 있으나 그림에서는 보이지 않는다.

5. 결 론

본 연구에서는 수직 평판 사이에서 점도가 같은 두 점성 유체가 흐를 때 두 유체의 밀도차와 계면의 위치가 계면의 안정성에 어떠한 영향을 미치는가에 대해서 연구하였다. 우리는 이 연구에서 밀도가 다른 두 유체가 수직 평판 사이를 흐를 때 계면의 움직임을 지배하는 비선형 변화 방정식을 유도하였고 선형 안정성 해석을 수행하였다. 유량이 0일 경우 안정한 영역에서는 밀도차가 있는 두 유체는 항상 대향류임을 밝혔고 수직으로 두 유체가 정지해 있을 수 없음을 확인하였다. 밀도차가 고정되었을 경우에는 계면의 위치가 0과 1 사이에서 변함에 따라 안정성 영역과 불안정성 영역의 뒤바뀜이 빈번하다. 그러나 밀도차가 약 0.1 이상인 경우(한쪽의 유체밀도의 크기가 다른 쪽의 유체밀도의 크기보다 10배 이하일 때) 유량이 아주 작을 경우에는 계면의 위치가 수직 평판의 벽에 아주 가까울 때를 제외하고는 유동은 항상 불안정하며 이곳에서는 대향류가 지배적이다. 계면의 위치가 고정되었을 경우 그 각각은 계면의 위치에 따라 안정한 영역과 불안정한 영역이 어떻게 바뀌어 가는지를 잘 설명해준다. 그리고 많은 경우 그들의 Q/G의 값이 어떤 값을 넘기만 하면 항상 양 또는 음의 유량 영역에서 밀도차와 관계 없이 유동이 안정해질 수 있다. 계면의 위치를 적절히 선택하면 밀도차에는 관계 없이 항상 안정한 영역이 있다는 것을 본 연구로부터 알 수 있었다. 다음에는 계면 변화방정식의 수치해석을 통해 불안정한 계면의 비선형 변화를 조사해 보고자 한다.

후 기

본 연구는 영남대학교 신임교원 정착 연구비와 첨단유체공학센터(AFERC)의 지원에 의하여 연구되었으며, 관계자 여러분께 감사드립니다.

참고문헌

(1) Yih, C. -S., 1963, "Stability of Liquid Flow Down an Inclined Plane," *Phys. Fluids*, Vol. 6, No. 3, pp. 321~334.

(2) Yih, C. -S., 1967, "Instability Due to Viscosity Stratification," *J. Fluid Mech.*, Vol. 27, part 2, pp. 337~352.

(3) Renardy, Y., 1987, "Viscosity and Density Stratification in Vertical Poiseuille Flow," *Phys. Fluids*, Vol. 30, No. 6, pp. 1638~1648.

(4) Yiantsios, S. G. and Higgins, B. G., 1988, "Linear Stability of Plane Poiseuille Flow of Two Superposed Fluids," *Phys. Fluids*, Vol. 31, No. 11, pp. 3225~3238.

(5) Tilley, B. S., Davis, S. H. and Bankoff, S. G., 1994, "Linear Stability Theory of Two-Layer Fluid Flow in an Inclined Channel," *Phys. Fluids*, Vol. 6, No. 12, pp. 3906~3922.

(6) Joo, S. W., 1995, "Interfacial Instabilities in Plane Poiseuille Flow of Two Stratified Viscoelastic Fluids with Heat Transfer: Part 1. Evolution Equation and Stability Analysis," *J. Fluid Mech.*, Vol. 299, pp. 241~266.

부 록

식 (2.8)과 같은 계면 변화방정식을 구하기 위해 다음과 같은 윤활근사를 채택한다.

x는 y에 비해 상대적으로 긴 거리이므로 $\xi=\varepsilon x$, $\eta=y$로 축척(scale)하며 유동의 움직임 역시 긴 시간에 대해 나타나므로 $\tau=\varepsilon t$로 축척한다. 그리고, $u^{(i)}$, $v^{(i)}$, $p^{(i)}$는 작은 크기의 ε에 대해 다음과 같은 통상적 섭동전개(regular perturbation expansion)가 이루어진다.

$$u^{(i)}(\xi, \eta, \tau)=u_0^{(i)}(\xi, \eta, \tau)+\varepsilon u_1^{(i)}(\xi, \eta, \tau)$$

$$+\varepsilon^2 u_2^{(i)}(\xi,\eta,\tau)+\cdots \quad (A.1)$$

$$v^{(i)}(\xi,\eta,\tau)=\varepsilon\{v_0^{(i)}(\xi,\eta,\tau)+\varepsilon v_1^{(i)}(\xi,\eta,\tau)+\varepsilon^2 v_2^{(i)}(\xi,\eta,\tau)+\cdots\} \quad (A.2)$$

$$p^{(i)}(\xi,\eta,\tau)=\varepsilon^{-1}\{p_0^{(i)}(\xi,\eta,\tau)+\varepsilon p_1^{(i)}(\xi,\eta,\tau)+\varepsilon^2 p_2^{(i)}(\xi,\eta,\tau)+\cdots\} \quad (A.3)$$

여기서 ε은 외란 파도의 길이(disturbance wave length)에 대한 평판 사이의 거리(H)로 정의된다. 그러므로 긴 파도에 대한 해석이 이루어질 수 있다. 실제적으로 표면장력은 상당히 크므로 단위 크기의 매개변수 $\bar{S}$를 다음과 같이 정의한다.

$$\bar{S}=\varepsilon^2 S$$

이제 위에서 정의한 $u^{(i)}$, $v^{(i)}$, $p^{(i)}$를 연속 방정식과 Navier-Stokes 방정식, 그리고 수직 평판에서의 점착조건과 계면에서의 경계조건에 대입한 후 차수별로 정리하면 다음과 같다.

우선 $O(\varepsilon^{-1})$에서는 y방향의 Navier-Stokes 방정식에 대한 식과 계면 y=h(x, t)에서의 수직응력 도약조건이 나타난다. 기본상태에 대한 Navier-Stokes 방정식의 y성분은 다음과 같다.

$$\frac{\rho_1}{\rho_i}p_{0\eta}^{(i)}=0 \quad (A.4)$$

여기에서 평판이 기울어지거나 수평일 때는 정수압력의 영향을 고려해야 하나 본 연구에서는 y방향이 중력 방향과 수직을 이루고 있으므로 계면이 외란을 받지 않은 기본 상태에서는 y방향으로 압력 구배가 없다는 것을 의미한다. 계면 y=h(x, t)에서의 수직응력 도약조건은

$$[[p_0^{(i)}]]=0 \quad (A.5)$$

이며 계면에서 두 유체간의 압력차가 없음을 의미한다. 기본 상태는 계면이 외란을 받지 않은 평평한 상태이므로 표면장력이 압력차를 일으키지 못한다.

기본 상태에 1차적인 외란이 가해진 O(1)에서의 지배방정식과 경계 조건들은 다음과 같다. Navier-Stokes 방정식은

$$-\frac{\rho_1}{\rho_i}p_{0\xi}^{(i)}+\frac{\rho_1}{\rho_i}u_{0\eta\eta}^{(i)}+G=0, \quad (A.6a)$$

$$\frac{\rho_1}{\rho_i}p_{1\eta}^{(i)}=0 \quad (A.6b)$$

이며 두 평판의 벽면에서는 다음과 같은 점착 조건이 만족되어야 한다.

$$\eta=0,1\text{에서 각각} \quad u_0^{(1)}=0,\ u_0^{(2)}=0 \quad (A.7)$$

계면이 1차적인 외란을 받은 경우에는 계면에서의 표면 장력으로 인해 두 유체 사이에 압력차가 존재하므로

$$[[p_1^{(i)}]]=-\bar{S}\,h_{\xi\xi} \quad (A.8)$$

와 같이 나타나고 두 유체간에 점도차는 없다고 가정하였으므로 기본 상태의 계면에서 두 유체의 전단응력은 다음과 같이 같아야 한다.

$$u_{0\eta}^{(1)}=u_{0\eta}^{(2)} \quad (A.9)$$

계면에서 두 유체는 서로 미끄러지지 않아야 하므로 기본 상태에서 두 유체 사이의 접선 속도는

$$u_0^{(1)}=u_0^{(2)} \quad (A.10)$$

와 같이 차이가 없다. 그리고 O(1)의 마지막 조건으로 총유량은 두 유체의 유량의 합과 같다는 조건이 다음과 같이 쓰여질 수 있다.

$$Q=\int_0^1 u_0 d\eta=\int_0^{h(\xi,\tau)}u_0^{(1)}d\eta+\int_{h(\xi,\tau)}^1 u_0^{(2)}d\eta \quad (A.11)$$

한편 $O(\varepsilon)$에서는 1차 해에 필요한 조건들이 제시되며 O(1)에서와는 달리 운동조건이 처음으로 나타난다. 물리적 의미는 위에서 제시한 것들과 같다.

$$O(\varepsilon):\quad u_{0\xi}^{(i)}+v_{0\eta}^{(i)}=0 \quad (A.12a)$$

$$u_{0\tau}^{(i)}+u_0^{(i)}u_{0\xi}^{(i)}+v_0^{(i)}u_{0\eta}^{(i)}=-\frac{\rho_1}{\rho_i}p_{1\xi}^{(i)}+\frac{\rho_1}{\rho_i}u_{1\eta\eta}^{(i)} \quad (A.12b)$$

$$\frac{\rho_1}{\rho_i}p_{2\eta}^{(i)}=v_{0\eta\eta}^{(i)} \quad (A.12c)$$

$$\eta=0\text{에서} \quad u_1^{(1)}=v_0^{(1)}=0 \quad (A.12d)$$

$$\eta=1\text{에서} \quad u_1^{(2)}=v_1^{(2)}=0 \quad (A.12e)$$

$$u_{1\eta}^{(1)}=u_{1\eta}^{(2)} \quad (A.12f)$$

$$h_t+\frac{\partial}{\partial x}\int_0^h u\,dy=0 \quad (A.12g)$$

$$u_1^{(1)}=u_1^{(2)} \quad (A.12h)$$

$$\int_0^1 u_1 d\eta=0 \quad (A.12i)$$

우선 기본 상태의 해를 구해보면 유체 1에서

$$u_{0\eta\eta}^{(1)}=p_{0\xi}^{(1)}-G \quad (A.13a)$$

$$u_{0\eta}^{(1)}=(p_{0\xi}^{(1)}-G)\eta+a_{11} \quad (A.13b)$$

$$u_0^{(1)}=\frac{(p_{0\xi}^{(1)}-G)}{2}\eta^2+a_{11}\eta+a_{12} \quad (A.13c)$$

그리고 유체 2에서는

$$u_{0\eta\eta}^{(2)}=p_{0\xi}^{(2)}-\rho G \qquad (A.14a)$$

$$u_{0\eta}^{(2)}=(p_{0\xi}^{(2)}-\rho G)(\eta-1)+a_{21} \qquad (A.14b)$$

$$u_0^{(2)}=\frac{(p_{0\xi}^{(2)}-\rho G)}{2}(\eta-1)^2+a_{21}(\eta-1)+a_{22} \qquad (A.14c)$$

와 같이 나타나며 점착조건으로부터 $a_{12}=a_{22}=0$이므로 기본 상태에서의 속도는

$$u_0^{(1)}=\frac{(p_{0\xi}-G)}{2}\eta^2+a_{11}\eta \qquad (A.15a)$$

$$u_0^{(2)}=\frac{(p_{0\xi}-\rho G)}{2}(\eta-1)^2+a_{21}(\eta-1) \qquad (A.15b)$$

위 식에서 압력항은 $O(\varepsilon^{-1})$에서의 수직응력 도약조건으로부터 $p_{0\xi}^{(1)}=p_{0\xi}^{(2)}=p_{0\xi}$가 된다.

$p_{0\xi}$, a_{11}, a_{21}은 아직 구하지 않았으므로 계면에서 전단응력과 접선속도가 같아야 할 조건, 그리고 전체적 구속조건으로부터 다음과 같이 구할 수 있다. 위의 식들을 정리해보면 연성된(coupled) 고유치 문제의 형태로 나타나며 그 고유치들은 다음과 같다.

$$p_{0\xi}=h^2(3-2h)(1-\rho)G+\rho G-12Q \qquad (A.16a)$$

$$a_{11}=h(h^2-2h+1)(1-\rho)G+6Q \qquad (A.16b)$$

$$a_{21}=h^2(1-h)(1-\rho)G-6Q \qquad (A.16c)$$

1차 해 역시 기본 상태의 해에서 구한 것과 같은 방법으로 구할 수 있다.

위에서 전개한 $u=u_0^{(1)}+\varepsilon u_1^{(1)}$를 운동조건(식 2.6)에 대입함으로써 우리가 구하고자 하는 h에 대한 편미분방정식을 구할 수 있다. 이 식을 변화방정식(식 2.8)이라 하며 선형 안정성 해석을 하는 토대가 된다. 여기서 B와 C항은 물론 $O(\varepsilon)$의 크기이다.