□ 論 文 □

車輛容量을 考慮한 大衆交通 通行配定模型構築에 關한 研究

A User Equilibrium Transit Assignment Model with Vehicle Capacity Constraint

李 成 模
(서울大 工學研究所 責任研究員)

劉 京 相
(서울大 大學院 博士過程)

全 京 秀
(서울大 都市工學科 敎授)

目 次

ABSTRACT

The purpose of the thesis is providing a new formulation for the transit assignment problem. The existing models dealing with the transit assignment problem don't consider the congestion effects due to the insufficient capacity of transit vehicles. Besides, these models don't provide solutions satisfying the Wardrop's user equilibrium conditions. The congestion effects are considered to be concentrated at the transit stops. For the transit lines, the waiting times at the transit stops are dependent on the passenger flows.

The new model suggests the route section cost function analogous to the link performance function of the auto assignment to reflect the congestion effects in congested transit network. With the asymmetric cost function, the variational inequality programming is used to obtain the solutions satisfying Wardrop's condition. The diagonalization algorithm is introduced to solve this model. Finally, the results are compared with those of EMME/2.

Ⅰ. 序 論

1. 硏究의 背景 및 目的

교통 혼잡상황에 효과적으로 대처하기 위해서는 승용차를 이용하고자 하는 수요를 대량수송이 가능한 대중교통 이용 수요로 전환시켜야 하며 이를 위해서는 대중교통의 서비스수준 제고 및 운영 관리 체계 등의 개선이 필요하다. 이를 위한 전략적 및 운영적 측면에서의 대중교통계획(투자계획도 포함)은 대중교통수요의 정확한 예측을 전제로 하여 수립되며, 이러한 수요의 예측은 현실을 보다 더 정확하게 묘사해 줄 수 있는 통행 배정 모형의 구축이 필수적이다.

전통적으로 수요의 예측 모형은 통행발생, 통행분포, 수단분담, 통행배정의 4단계를 각각 거시적으로 분석하는 기법을 사용해 왔으며, 이 방법은 "현재의 교통체계의 메카니즘이 장래에도 크게 변하지 않는다"라는 가정을 전제로 하고 있다. 4단계 기법의 마지막 단계는 전단계를 통해 예측된 각 기종점간 수요를 실제 가로망에 배정하는 단계로서, 승용차 통행배정모형으로는 크게 일통행량 혹은 시간통행량을 거시적으로 가로망에 배정하는 정태적 모형과 하루 중 시간의 변화에 따른 통행패턴을 고려하여 미시적으로 통행을 배정하는 동태적 모형으로 나눌 수 있다. 전자에 속하는 모형으로는 각 기종점간 통행을 최단경로에 모두 배정하는 전량통행배정 방법과 가로의 혼잡을 반영하여 통행을 배정하는 용량제약 배정 방법등이 있으며, 이 중에서 1956년 Beckmann이 개발한 사용자평형 통행배정모형이 가장 널리 사용되고 있다. 최근에는 컴퓨터 기술의 비약적인 발달과 더불어 ITS를 뒷받침하기 위한 동태적인 통행배정모형이 필요하게 되었으며, 이를 위해 개별적인 차량을 단위로 한 통행배정을 근간으로 하는 미시적 접근 방법의 개발이 지속적으로 시도되고 있다.

그러나, 대중교통 통행배정은 규칙적인 배차시간과 정해진 노선을 운행하는 고정서비스 시스템으로 구성되어 있으므로 한 링크상에서도 여러 개의 운행노선을 고려해야 하기 때문에 승용차 통행배정과는 독립적으로 취급되어 왔으며, 도로의 혼잡으로 인해 대중교통의 중요성이 날로 부각되고 있는 실정임에도 불구하고 승용차 통행배정에서처럼 다양하게 개발되어 있지 않다. 현재 사용되고 있는 대중교통 통행배정 모형은 크게 전량통행배정 모형, 확률적통행배정 모형, 최적전략에 의한 통행배정 모형 등이 있으나, 이들 모형들은 대중교통 이용수요가 많을 경우 차량의 용량초과로 발생되는 혼잡에 따른 개별통행자들의 통행비용의 상승효과를 전혀 고려하지 못하고 있다. 비교적 최근에 Spiess & Florian에 의해 개발된 통행배정모형은 최적전략이라는 새로운 개념을 도입하여 통행배정을 하고 있으나 이 모형 역시 대중교통의 차량 용량을 고려하지 못하고 있기 때문에 통행수요가 많은 경우, 몇 개의 경로에 과부하되는 결과를 초래하게 된다.

본 논문에서는 위와 같은 대중교통 통행배정모형의 단점을 보완하고 실제상황을 보다 정확히 모형에 반영하기 위해 대중교통 차량의 용량제약을 포함한 링크통행비용함수와 같은 지체식을 사용하여 정류장에서의 혼잡을 고려한 보다 실제적인 대중교통 통행배정모형을 구축하는데 그 목적을 두고 있다.

2. 硏究의 方法 및 範圍

본 논문에서는 대중교통 차량의 용량제약으로 인한 정류장에서의 지체를 고려하기 위해 분

석 대중교통 노선망을 환승이 가능한 정류장과 이들 정류장들을 연결해 주는 경로구간을 사용하여 재구성하고 각 경로구간의 통행비용함수를 구성하였다. 경로구간의 통행비용함수는 그 구간의 통행량에 영향을 받을 뿐만 아니라 다른 경로구간의 통행량에도 영향을 받기 때문에 Wardrop의 사용자 평형조건을 만족해 주는 해를 구하기 위해서 Variational Inequality Programming을 사용하였다. 모형의 해를 구하기 위한 알고리즘으로는 통행비용함수의 Jacobian 행렬이 비 대칭이므로 이를 매 단계 대각화시켜 주는 대각화 알고리즘을 사용하였다.

모형의 적용 및 검증을 위해 규모가 작은 대중교통 노선망을 사용하였으며, Spiess & Florian 모형과 통행배정 결과를 서로 비교·분석하기 위해서 대중교통 이용 수요가 거의 용량에 도달한 경우를 대상으로 하였다.

Ⅱ. 大衆交通 通行配定模型의 考察

1. 旣存 通行配定 模型

현재 범용적으로 사용되고 있는 대중교통 통행배정모형은 크게 전략통행배정모형과 확률적 통행통행배정모형이 있다. 전략통행배정모형은 가장 초보적인 단계의 기법이며 "대중교통 이용자가 출발지에서 목적지까지 가기 위해서 언제나 최소 통행비용을 갖는 노선을 선택한다"는 가정을 기반으로 한다. 즉, 임의의 두 죤간 통행량을 그 죤을 연결하는 최단경로에 모두 배정하는 것으로서 통행의 희망경로에 따른 이론적 통행수요를 파악하고 기본적인 노선망 계획을 구상하는데 필요한 기초적인 정보를 얻을 수는 있으나 통행수요의 대소에 따른 혼잡효과는 전혀 고려하지 못하고 있다.

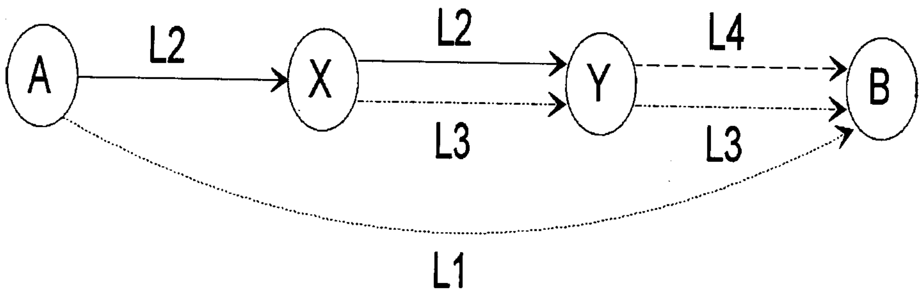
확률적 통행배정모형은 "개별 통행자가 링크의 통행비용을 서로 다른 방식으로 인지한다"는 가정을 전제로 하며, 기점과 종점을 연결하는 각각의 경로 또는 링크를 사용할 확률을 수학적인 모형에 의하여 계산한 후 이를 이용하여 통행을 배정한다. 이 모형은 기종점간 수요를 N등분하고 이들 각각의 수요에 대하여 미리 정해진 링크 통행비용 분포로부터 난수를 발생시켜 각 링크의 인지비용을 계산하는 몬테카를로 시뮬레이션 기법과 통행비용의 오차 분포로부터 얻은 다항 로짓모형이나 다항 프로빗모형을 사용하여 각 경로를 사용할 확률을 구하는 기법이 있다.

2. 最適戰略에 의한 通行配定 模型

이 모형은 M. Florian과 H. Spiess (1988)에 의해서 개발되었으며 출발지에서 목적지까지 도달하기 위한 "최적 전략(Optimal Strategy)"이라는 개념을 도입하여 개별 통행자들의 통행비용을 최소화시키는 것으로 현재 널리 사용되고 있는 교통계획 소프트웨어인 EMME/2에 내장되어 있다.

여기서 사용되는 "전략"의 개념은 통행자가 원하는 목적지에 도달하기 위해서 선택가능한 일련의 규칙의 집합을 말하며 통행하는 동안에 주어지는 정보의 양에 따라 그 수가 결정된다. 만일, 통행하는 동안 주어지는 추가 정보가 없다면 전략은 단 하나의 경로만으로 정의된다. 〈그림 2-1〉과 같은 노선망이 있을 때, 통행자들이 사용가능하고 수학적으로 모형화가 가능한 전략은 다음의 예와 같다.

위와 같은 전략에 의해 정의된 대중교통노선망도가 회전경로(cycle)를 포함하지 않으면 이 전략은 "실행가능"하다고 말하며, 이러한 전략들 중에서 "통행자의 통행시간을 최소화"해 주



〈그림 2-1〉 대중교통노선망

전략 예 : A에서 B까지 통행하고자 하는 승객은 A에서 노선 1과 2에 소속된 차량중에서 먼저 도착한 차량을 이용한다. 만일 노선 1에 속하는 차량이 먼저 도착한 경우 이를 이용하여 곧바로 B까지 가고, 노선 2에 속하는 차량이 먼저 도착한 경우 이를 이용하여 Y(환승정류장)까지 간 후 노선 3이나 4에 속하는 차량을 이용하여 B로 간다.

는 전략이 "최적전략"이 되고 이 전략에 따라 모든 통행이 이루어진다. 위의 예와 같이 하나의 전략이 수립되면 통행이 이루어지는 '체계적인' 과정은 다음과 같다.

단계 0 : 출발노드를 NODE로 설정한다.
단계 1 : NODE에서 이용가능한 노선들의 차량 중에서 가장 먼저 도착하는 차량에 승차한다.
단계 2 : 미리 결정된 노드에서 하차한다. (주어진 전략에 따라)
단계 3 : 아직 목적지에 도착하지 못했을 때는 현재의 노드를 NODE로 설정하고 단계 1로 돌아가고 그렇지 않으면 통행은 완결된다.

최적전략 모형에서 대중교통의 통행체계는 출발지에서 정류장까지의 접근, 정류장에서의 차량 대기, 차량에 승차, 차량으로부터 하차, 두 정류장 사이의 도보, 정류장으로부터 목적지까지의 접근 등의 구성요소로 이루어지며 통행자의 통행비용은 이 구성요소에 드는 비용을 모두 포함하는 일반적인 개념으로 정의된다.

상술한 최적전략에 의한 통행배정의 개념을 수학적인 모형으로 구성하면 다음과 같다.

<u>용어의 정의</u>

$A = \{a\}$: 링크집합
$I = \{i\}$: 노드집합
$\overline{A}$: 주어진 전략에 포함되는 링크집합, $(\overline{A} \subseteq A)$
A_i^+ : 노드 i에서 나가는 링크집합
A_i^- : 노드 i로 들어오는 링크집합
$\overline{A}_i^+$: A_i^+ 에 속하는 링크중에서 전략 $\overline{A}$에 속하는 링크집합, $A_i^+ \cap \overline{A}$, $i \in I$
$\overline{A}_i^-$: A_i^- 에 속하는 링크중에서 전략 $\overline{A}$에 속하는 링크집합, $A_i^- \cap \overline{A}$, $i \in I$
r : 목적지 노드
g_i : 노드 i에서 r 로의 통행수요, $r \in I - \{r\}$
V_i : 노드 i에서의 통행량
v_a : 링크 a의 통행량

c_a : 링크 a의 통행비용

f_a : 링크 a의 운행회수(frequency)

$W(\overline{A}_i^+)$: $\overline{A}_i^+$의 결합 대기시간

$P(\overline{A}_i^+)$: $\overline{A}_i^+$에 포함되는 링크 a를 사용할 확률

$$x_a = \begin{cases} 0, & a \notin \overline{A} \\ 1, & a \in \overline{A} \end{cases}, \quad a \in A$$

위에서 정의한 용어를 사용하여 "통행자의 통행시간을 최소화"해주는 모형을 구성하면 다음과 같다.

[P1]
$$Min \sum_{a \in A} c_a v_a + \sum_{i \in I} \frac{V_i}{\sum_{a \in A_i^+} f_a x_a} \qquad (1)$$

$$s.t \quad v_a = \frac{x_a f_a}{\sum_{a' \in A_i^+} f_{a'} x_{a'}} V_i, \qquad (2)$$
$$a' \in A_i^+, \quad i \in I$$

$$V_i = \sum_{a \in A_i^-} v_a + g_i, \quad i \in I \qquad (3)$$

$$V_i \geq 0, \quad i \in I \qquad (4)$$

$$x_a = 0 \; or \; 1, \quad a \in A \qquad (5)$$

위 모형 [P1]의 목적함수는 통행자가 링크에서 사용하는 통행비용과 각 정류장에서의 차량 대기시간의 총합을 최소화하는 것으로, 차량 도착시간 간격이 평균 $1/f_a$ 인 지수분포를 따르고 통행자가 정류장에 무작위로 도착할 때 각 정류장에서의 개별통행자의 결합대기시간은 다음과 같이 계산할 수 있다.

$$W(\overline{A}_i^+) = \frac{1}{\sum_{a \in \overline{A}_i^+} f_a} \qquad (6)$$

제약식 (2)는 노드 i에서의 통행량 V_i가 $\overline{A}_i^+$에 속하는 링크로 배분되는 방법을 나타내고 있다. 즉, 노드 i에 도착한 통행이 각 링크를 사용할 확률은 그 링크의 운행간격에 비례하며 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$P_a(\overline{A}_i^+) = \frac{f_a}{\sum_{a' \in \overline{A}_i^+} f_{a'}}, \qquad (7)$$
$$a \in \overline{A}_i^+$$

$$v_a = P_a(\overline{A}_i^+) V_i \qquad (8)$$

제약식 (3)은 각 노드에서의 통행의 보존(flow conservation)을 나타내주는 제약식으로 노드에서의 통행량은 노드 i에 도착하는 통행량과 노드 i에서 새로이 발생한 수요의 합으로 표시되며, 이 식과 (7), (8)을 사용하여 아래와 같이 변환시킬 수 있다.

$$\begin{aligned} \sum_{a \in A_i^+} v_a &= \sum_{a \in A_i^+} [P_a(\overline{A}_i^+) V_i] \\ &= \sum_{a \in A_i^+} [P_a(\overline{A}_i^+) \sum_{a \in A_i} (v_a + g_i)] \\ &= \sum_{a \in A_i} v_a + g_i \end{aligned}$$

$$\sum_{a \in A_i^+} v_a - \sum_{a \in A_i^-} v_a = g_i \qquad (9)$$

제약식 (4), (5)는 각각 통행량에 대한 비음제약과 모형에서 사용되는 가변수에 대한 제약을 나타낸다.

모형 [P1]은 비선형 목적함수 및 비선형 제약식을 갖고 있으며 또한 정수형 변수 x_a를 포함하고 있어 해를 구하기 어렵다. 이 문제의 해결을 위하여 모형 [P1]을 아래와 같은 간단한 변환 과정을 통하여 선형모형으로 바꾸면 모형 [P2]가 된다.

i) 노드 i에서의 총대기시간

$$w_i = \frac{V_i}{\sum_{a \in A_i^+} f_a x_a}, \; i \in I$$ 변수를 도입한다.

ii) 제약식 (3)을 (9)로 치환한다.

iii) 제약식 (4)를 $v_a \geq 0$, $a \in A$로 치환한다. 이는 식 (2) 및 식 (3)에 의해서 가

능하다.

iv) w_i변수를 이용하여 식 (2)를 변환하면 $v_a = x_a f_a w_i$, $a \in A_i^+$, $i \in I$ 이 된다. 이 식은 정수형 변수 x_a를 포함하고 있으므로 이를 다시 다음과 같이 변환 한다.

$$v_a \le f_a w_i, \quad a \in A_i^+, \quad i \in I \qquad (10)$$

[P2] $$Min \sum_{a \in A} c_a v_a + \sum_{i \in I} w_i$$

$$s.t. \sum_{a \in A_i^+} v_a - \sum_{a \in A_i^-} v_a = g_i, \quad i \in I$$

$$v_a = f_a w_i, \quad a \in A_i^+, \quad i \in I$$

$$v_a \ge 0, \quad a \in A$$

Florian은 위에서 구성한 최적 전략에 의한 통행배정모형의 해를 구하기 위해서 [P2]의 쌍대문제를 구성하고 상보여유조건(complementary slackness condition)을 사용하였다.

Ⅲ. 車輛容量을 考慮한 大衆交通 通行配定模型 構築

1. 前提條件

1) 用語定義 및 假定

본 논문의 수리모형의 구축에서 전제되는 용어의 정의 및 가정은 다음과 같다.

· 대중교통노선(transit line) : 가로상의 두 노드사이를 왕복하는 일련의 차량의 집합을 의미한다. 같은 노선에 속하는 모든 차량은 그 크기, 용량, 운행특징 등이 동일하며 항상 가로상의 동일한 일련의 노드 및 링크를 경유해서 운행된다.

· 노선여정(line itinerary) : 노선에 포함되는 차량이 운행되는 일련의 노드 혹은 링크의 집합을 말하며 이 때의 노드는 통행자(승객)들이 차량에 승차하거나 하차할 수 있는 정류장을 나타낸다.

· 노선구간(line section) : 노선여정에 포함되어 있는 임의의 두 노드사이를 말하며 반드시 두 노드가 연속일 필요는 없다.

· 대중교통경로(transit route) : 통행자들이 출발지에서 원하는 목적지까지 도달하기 위해서 선택하는 일련의 노드집합이며 첫 번째 노드는 출발지를, 마지막 노드는 목적지를 나타내고 중간 노드들은 각각 환승지점을 나타낸다.

· 경로구간(route section) : 대중교통경로에 포함되는 임의의 연속된 두 환승노드 사이를 말하며 각각의 경로구간은 하나 혹은 그 이상의 노선을 가진다.

위에서 정의한 용어를 사용하여 수리모형의 정립을 위해 사용되는 가정은 다음과 같다.

· 통행자가 출발지에서 원하는 목적지까지 도달하기 위해서 선택가능한 경로는 여러 개가 있을 수 있으며 통행비용을 최소화하려는 방식으로 행동한다.

· 경로구간의 통행비용은 통행량이 많아질수록 증가한다.

· 차량의 용량제약으로 인한 노선의 혼잡현상은 정류장에서만 일어난다. 그러므로, 각 정류장에서의 통행자들은 이용하고자 하는 노선의 용량 및 같은 노선을 이용하려는 다른 통행자들에 의해 영향을 받는 대기시간을 갖는다. 그러나, 차량에 일단 승차한 통행자들이 겪는 차내통행시간은 그 차량이 속한 노선이 지나는 가로망의 혼잡 상황에 따라 고정되어 있다. 즉, 차내통행시간은 외생적으로 결정되는 값이다.

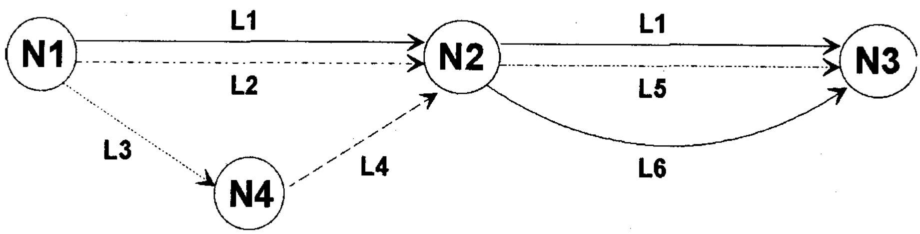
· 각 정류장에서 통행자들은 이용하려는 노선

에 소속된 차량들 중에서 가장 먼저 도착한 노선에 소속된 차량을 이용한다.

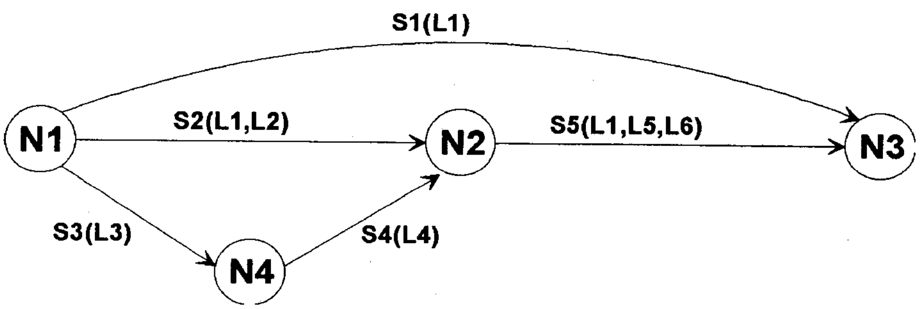
2) 大衆交通 路線網의 形態

수리적인 모형 구성을 위해서 사용되는 대중교통 노선망은 정류장을 나타내는 노드 집합 I= { i }와 대중교통의 루트섹션을 나타내는 링크 집합 A={ a }로 이루어져 있으며 편의상 G=(I, A)로 표기하기로 한다. 이 때의 링크 집합 A는 링크의 출발노드에 해당하는 정류장에서의 승객대기 과정을 나타내는 대기 링크(waiting link)의 개념을 포함한다.

대중교통노선망의 표현은 노선과 노선여정을 이용하여 〈그림 3-1〉과 같이 나타낼 수 있으며, 이를 다시 경로구간을 이용하여 나타내면 〈그림 3-2〉와 같다.



〈그림 3-1〉 노선 및 노선여정을 사용한 대중교통망



〈그림 3-2〉 루트섹션을 이용한 대중교통망

일반적으로 하나의 경로구간에는 여러 개의 노선이 존재할 수 있으며 각 개별통행자는 이들 노선 중 이용하고자 하는 노선의 먼저 도착하는 차량을 선택하여 목적지까지 가려고 한다. 그러나, 동일한 경로구간을 이용하려는 승객의 통행수요가 많아지게 되면 차량의 용량제약으로 인하여 먼저 도착한 차량을 이용하지 못하는 통행자들이 필연적으로 발생하게 되며 이들은 목적지까지 가기 위해 비교적 늦게 도착하는 차량을 이용하려고 할 것이다. 이처럼 차량의 용량제약으로 인한 지체 효과를 통행배

정모형에 반영해 주기 위해서는 동일한 경로구간에 포함되는 노선들을 "빠른 노선"과 "느린 노선"으로 구분해 줄 필요가 있다.

동일 경로구간에 속하는 노선이 $l_1, l_2, \cdots, l_n$ 의 n개가 있고 이들 노선의 운행회수 및 각 대상노선에 속하는 차량을 이용하는 통행자의 차내통행시간을 각각 $f_1, f_2, \cdots, f_n$; $t_1, t_2, \cdots, t_n$이라 하면, 이 경로구간을 이용하려는 통행자들은 예상 통행비용이 최소화가 되는 노선을 이용하려고 할 것이므로 이를 수식화하면 다음과 같다.

$$Min \quad ET = \frac{1 + \sum_{l=1}^{n} t_l \cdot f_l \cdot x_l}{\sum_{l=1}^{n} f_l \cdot x_l}$$

Subject to $s.\ t.\ x_l = 0$ 혹은 1, $\forall l \in s$

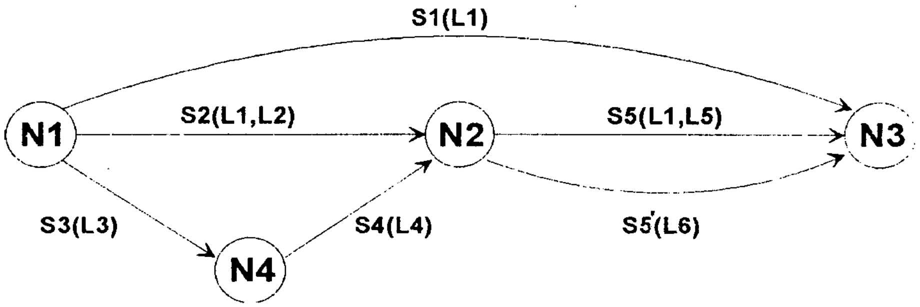
위의 목적함수는 통행자들이 해당 경로구간 s를 통행하는데 소요될 총 통행비용을 나타내며 첫번째 항은 정류장에서 예측 대기시간을, 두번째 항은 예측 차내통행시간을 나타내고 있으며, 모형의 해는 x이 1 일때는 노선 l이 빠른 노선임을, 0 일때는 느린 노선임을 나타낸다. 위 모형의 해법으로는 비선형 정수계획법(Non-linear Integer Programming)에서 일반적으로 적용되는 Branch and Bound Method, Implicit Enumeration Method, Cutting Plane Method 등을 사용하여 구할 수 있다.

모형에 의해 분류된 노선 중 느린 노선일지라도 동일 경로구간를 이용하려는 통행수요가 많아지게 되면 이 노선들 중에서 비교적 빠른 노선이 먼저 사용될 것이며 그렇지 않는 노선들은 통행수요가 더욱 커져야 비로소 이용될 것이다. 이렇게 해서 분류된 노선들은 통행배정모형의 정립을 위해 하나의 경로구간에 포함시킬 필요가 있으며 이를 위해 가상 경로구간(Dummy Route Section)을 사용하여 〈그림 3-3〉과 같이 노선망을 수정한다.

예를 들면, 〈그림 3-2〉의 경로구간 S_5에 포함되는 노선 l_1, l_5, l_6에 대해 모형를 적용한 결과 l_1, l_5가 빠른 노선, l_6가 느린 노선으로 분류되었다면 S_5에는 l_1, l_5만을 포함시키고 l_6는 새로운 가상 경로구간 S_5를 만들어 여기에 포함시킨다.

2. 經路區間의 通行費用 函數

노드(정류장)는 대중교통을 이용하려는 통행자들에게 서비스를 제공하는 일종의 대기시스템으로 말할 수 있으며, 일정한 평균도착율로 무작위하게 도착하는 통행자들은 그 노드를 통



〈그림 3-3〉 수정된 대중교통망

과하는 서로 다른 노선에 속한 차량에 의하여 서비스를 제공받기 때문에 각각의 노선에 대한 서로 다른 대기과정이 고려되어야 한다. 정류장에서 각 노선을 이용하려는 통행자들에 대한 서비스율은 그 노선이 수용할 수 있는 용량에 직접적으로 영향을 받기 때문에, 동일한 노선이 서로 다른 경로구간에 포함되어 있는 경우 한 경로구간에서의 서비스율은 다른 경로구간의 서비스율에 의존한다. 그러므로, 각 정류장에 도착하는 통행량이 그 정류장을 출발노드로 하는 경로구간의 용량에 접근할 수록 통행자들의 대기시간은 증가하게 된다.

이러한 대기시간과 통행량 사이의 관계는 대기이론을 사용하여 수리적으로 모형화가 가능하지만 이를 통행배정모형에서 그대로 사용할 경우 현실적으로 모형의 해를 구하기가 매우 어렵고 설사 해를 구할 수 있다 하더라도 그 과정이 매우 복잡하다. 그러므로, 이 모형에서는 승용차 통행배정모형에서 사용되는 통행량-통행비용 관계를 나타내는 링크 통행비용함수와 유사한 개념의 경로구간 통행비용함수를 도입하였는데 이는 다음과 같다.

$$c_s = IVT_s + \left(\frac{\alpha}{f_s}\right) + \beta\left(\frac{V_s + \tilde{V}_s}{K_s}\right)^n \quad (12)$$

위 식에서 첫 번째 항(IVTs)은 외생변수로서 경로구간 s에 속하는 노선의 차내통행비용을 나타내며 승용차 가로망의 혼잡상태, 승하차로 인한 지체 및 요금 등을 반영해 주는 것으로서 다음과 같이 계산할 수 있다.

$$IVT_s = \frac{1}{N_s}\sum_{l\in s} t_s^l \quad (13)$$

$$t_s^l = t_s^{auto} + penalty \times \text{정류장수} + \text{요금}$$

여기서, N_s : 경로구간 S에 포함되는 노선의 수

t_s^l : 노선 l이 경로구간 s를 통행하기 위한 차량내통행비용

t_s^{auto} : 경로구간 s에 해당하는 가로망에서의 승용차 통행시간

penalty : 정류장에서의 승하차로 인한 평균 지체시간

경로구간 통행비용함수의 두 번째 항 (α/f_s)은 정류장에서 경로구간 s에 포함되는 노선에 속하는 차량을 기다리는 통행자들의 평균 대기시간을 나타내며, 차량 및 통행자의 도착시간간격 분포에 따라 α의 값이 결정된다. 차량 도착시간간격이 일정하게 고정되어 있고 통행자들이 무작위하게 도착할 경우 α의 값은 0.5이며, 차량 도착시간간격이 지수분포를 따르고 통행자들의 도착이 균일하다면 α는 1의 값을 갖는다. 이 항에서 f_s는 경로구간 s에 속하는 노선들의 운행회수의 합을 의미하며 아래와 같이 계산할 수 있다.

$$f_s = \sum_{l\in s} f_l \quad (14)$$

여기서, f_l : 노선 l의 운행회수 (대/시간 혹은 대/일)

경로구간 통행비용함수의 마지막 항은 차량의 용량제약으로 인한 지체효과를 반영해 주는 항으로 β와 n은 현장자료를 바탕으로 정산되어야할 파라메타이고 K_s 및 $\tilde{V}_s$는 다음과 같이 계산된다.

$$K_s = \sum_{l\in s} k_l \quad (15)$$

$$\tilde{V}_s = \sum_{l\in s}\left(\sum_{r\in S_s^1} v_r^l + \sum_{r\in S_s} v_r^l\right) \quad (16)$$

여기서,

K_s : 경로구간 s 의 실용용량

k_l : 노선 l의 실용용량 (인/일 혹은 인/시간)

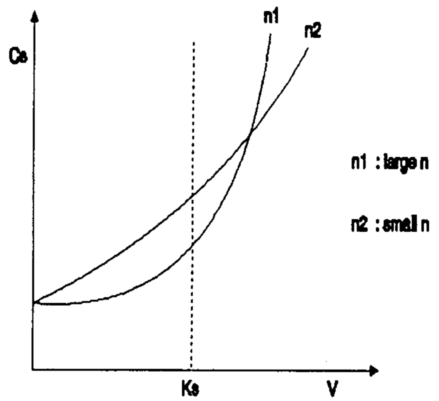
S_{is}^{+} : 노드 i에서 출발한 경로구간 s를 제외한 링크 집합

$\overline{S}_{is}$: 노드 i전에 출발노드를, 노드 i후에 도착노드를 갖는 링크 집합

v_r^l : 경로구간 r에 속한 노선 l의 통행량

위 식에서 $\tilde{V}_s$는 경로구간 s에 속한 노선들을 이용하려는 통행량 V_s와 경쟁하는 통행량을 나타내며 경로구간 s에 포함되는 노선에 이미 승차해 있는 통행자와 노드 i에서 s를 제외한 다른 링크에 포함되는 동일한 노선을 이용하려는 통행자들의 합으로 계산된다.

본 절에서 살펴본 경로구간 통행비용함수는 V_s 에 대하여 단조 증가 함수이며 그 형태는 다음의 〈그림 3-4〉와 같다. 여기서 보는 바와 같이 해당 경로구간을 이용하려는 수요가 그 링크의 용량에 미치지 못하면 통행비용함수식의 마지막 항은 크게 중요하지 않으나, 수요가 용량에 도달하거나 넘어서게 되면 급격한 통행비용의 상승을 초래하게 되는 특징을 가지고 있다.



〈그림 3-4〉 경로구간 통행비용함수의 형태

3. 數理模型의 構築

대중교통 수요가 많아서 대중교통 노선망에 지체가 발생할 때 각 정류장에 도착하는 차량의 일부는 이미 승객들로 채워져 있을 경우가 있으며, 이럴 경우 이들 차량을 기다리는 통행자들은 다음에 올 차량을 기다려야만 한다. 그러므로, 각 정류장에서 통행자들이 느끼는 노선의 운행회수는 감소할 것이며 이로 인해 그들이 평균적으로 기다리는 시간은 증가할 것이다. 이런 현상을 모형에 반영하기 위해 "유효 운행회수"라는 개념을 도입하며 이는 항상 노선망에 지체가 없을 경우의 정상 운행회수보다 작거나 같은 값을 갖는다.

노드(정류장) i에서 통행자들이 노선 l에 속한 차량을 기다리는 시간은 그 노선의 운행회수(f_l) 및 도착하는 차량 점유율의 함수이며 이때의 점유율은 그 노선의 용량 k_l에 반비례하고, 차량에 이미 승차해 있는 통행량 $\tilde{v}_i^l$ (노드 i에 도착하기 전에 승차해서 노드 i를 출발한 후에 하차하는 통행량)에 비례한다. 즉, 통행자들의 평균 차량 대기시간 (w_i^l)은 그 차량의 점유율이 증가할수록 커지는데 이는 다음과 같은 식으로 표현할 수 있다.

$$w_i^l \equiv \frac{\alpha_l}{f_l} + \gamma\left(\frac{\tilde{v}_i^l}{k_l}\right)^n \tag{17}$$

여기서, γ , n : 정산 파라메타

$\tilde{v}_i^l = \sum_{r \in S_{is}} v_r^l$

$k_l = f_l \times \eta_l$

η_l : 노선 l에 속한 차량의 용량 (좌석수/대)

α_l : 차량도착시간 분포 및 통행자들의 도착형태에 의존하는 상수

위 식을 사용하여 노드 i의 유효 운행회수를 계산하면 아래와 같다.

$$f_l' = \frac{\alpha_l}{w_i^l} \tag{18}$$

대중교통을 이용하려는 수요가 적을 때에는 식 (17)의 두 번째 항이 무시할 정도로 작기 때문에 노선의 유효 운행회수는 그 노선의 정상 운행회수와 같은 값을 가지며, 수요가 많아질수록 유효 운행회수는 항상 정상 운행회수보다 작은 값을 갖게 된다.

각 경로구간의 통행량은 그 경로구간에 포함되는 노선들의 상대적인 유효 운행회수에 비례하여 각 노선에 분배되며 이는 Florian & Spiess의 최적전략에 의한 통행배정모형에서와 같은 방법으로 아래와 같다.

$$v_s^l = \frac{f_l^{'}}{\sum_{l\in s} f_l^{'}} V_s = \frac{f_l^{'}}{f_s^{'}} V_s$$

$$= f_l^{'} \cdot w_s \cdot V_s \ , \quad \forall l \in s \ , \quad \forall s \in A \qquad (19)$$

위에서 상술한 내용을 바탕으로 대중교통 통행배정모형의 제약식을 구성하면 다음과 같다.

$$[\Lambda] \qquad \sum_{r\in R_{ij}} T_{ijr} = T_{ij} \ , \quad \forall i, j \qquad (20)$$

$$\sum_i \sum_j \sum_r \delta_{ijr}^s T_{ijr} = V_s \ , \quad \forall i, j, r \qquad (21)$$

$$v_s^l = f_l^{'}(v)\, w_s(v)\, V_s \ , \quad \forall l \in s \ , \quad \forall s \qquad (22)$$

$$T_{ijr} \geq 0 \ , \quad \forall i, j, r \qquad (23)$$

여기서, R_{ij} : 죤 i와 죤 j를 연결해 주는 경로의 집합. $R = \{R_{ij}\}$

T_{ijr} : 죤 i에서 죤 j로의 경로 r을 사용하는 통행량

T_{ij} : 죤 i에서 죤 j로의 통행량 (통행분포 단계에서 결정된 값으로 상수)

δ_{ijr}^s : 경로구간 s가 죤 i에서 죤 j로의 경로 r에 포함되면 '1', 그렇지 않으면 '0'의 값을 갖는 변수

위의 첫 번째 및 두 번째 제약식은 통행량 보존을, 세 번째 제약식은 경로구간 s의 통행량이 각 노선에 분배되는 방법을, 마지막 제약식은 비음제약을 나타내고 있으며 모형의 실행가능영역 Λ를 형성한다.

전술한 경로구간 통행비용함수는 통행량에 대한 Jacobian행렬이 비 대칭이므로 Beckmann (1956)의 승용차 통행배정모형과 같은 형태의 최소화 문제(equivalent minimization problem)가 존재하지 않는다.(Dafermos, 1972) 그러므로, 아래와 같은 Wardrop의 사용자 평형조건을 만족하는 모형의 평형 해를 구하기 위해서는 Variational Inequality Programming를 사용하는데 이는 다음과 같다.

[Wardrop의 사용자 평형조건]

$$c_{ijr}^{*} \begin{cases} = u_{ij}^{*} \ , & T_{ijr}^{*} > 0 \\ \geq u_{ij}^{*} \ , & T_{ijr}^{*} = 0 \end{cases} \ , \quad \forall i, j, r \qquad (24)$$

여기서, 변수의 위첨자 *는 평형상태를 나타낸다.

c_{ijr}^{*}: 죤 i와 j사이의 경로 r의 통행비용

u_{ij}^{*}: 죤 i와 j사이의 경로의 최소통행비용($=\min_{r\in R_{ij}} c_{ijr}$)

T_{ijr}^{*} : 죤 i와 j사이의 경로 r의 통행량

위 식을 만족하는 해 V^{*}는 식 아래와 같은 Variational Inequality Problem에 의해서 나타내어질 수 있는데,(Smith(1979), Dafermos(1980)) 이는 다음과 같다.

$$c(V^{*})^{T}\cdot(V - V^{*}) \geq 0 \quad , \forall V \in \Lambda \tag{25}$$

여기서, $c(V^{*})$: 평형상태에서의 경로구간비용 $c_s(V^{*})$로 구성된 벡터

V^{*} : 평형해 V_s^{*}로 구성된 벡터

또한, 경로구간 통행비용함수는 통행량의 단조 증가함수이므로 식 (26)을 만족하여야 하는데 이 경우 Smith(1979), Aashtiani & Magnanti (1981)등은 위의 Variational Inequality Problem이 유일한 해를 갖는다는 것을 증명하였다.

$$(c(V) - c(V'))^{T}(V - V') > 0 \text{ , for } V \neq V' \tag{26}$$

4. 模型의 解法

앞절에서 구축된 모형의 해를 구하기 위한 알고리즘으로는 일반적으로 대각화 방법(diagonalization method), cutting plane method 등을 사용할 수 있으나 본 논문에서는 해의 수렴성이 증명되어 있고(Ortega & Rheinboldt (1970), Florian & Spiess(1982)) 사용하기도 간편한 대각화 방법을 이용하였다.

대각화 방법은 통행배정의 매 단계에서 각 경로구간의 통행비용 함수를 대각화한 후 이 비용함수를 사용하여 Beckmann모형과 같은 최소화 문제를 구성하고 이 문제의 해를 구한다. 현 단계의 해를 $V^k = \{V_1^k, V_2^k, V_3^k \cdot\cdot\cdot\}$ 라 할 경우 경로구간 s의 통행비용함수 $c_s(V)$를 대각화 하는 방법은 아래와 같다.

$$\hat{c}_s^{\,k}(V_s) = c_s(V_1^k, V_2^k, \cdot\cdot\cdot, V_s, V_{s-1}^k \cdot\cdot\cdot) \text{ ,} \quad \forall s \in A \tag{27}$$

위식을 사용하여 대각화된 각 링크의 통행비용함수 $\hat{c}_s^k(V, V^k) = \hat{c}_s^k(V_s)$, $V_s \in A$)는 그 링크 외의 다른 링크의 통행량에 영향을 받지 않기 때문에 Jacobian 행렬이 대칭이며 따라서 이를 사용하여 다음과 같은 최소화 문제를 구성할 수 있다.

$$[\text{P1}] \quad Min \sum_s \int_0^{V_s} \hat{c}_s(x)\, dx \qquad s.t \ \ (V, v) \in \Lambda \tag{28}$$

위 문제의 실행가능영역 Λ에 포함되는 제약식 (22)의 변수 v_s^l은 통행비용함수의 대각화로 인하여 [P1]의 목적함수로부터 제거된다. 그러므로, 이 제약식은 모형 [P1]에서 분리할 수 있으며 v_s^l은 위 모형의 해 V_s^{*}를 구한 후 독립적으로 계산할 수 있다.

노선의 유효 운행회수 f_l 및 평균 대기시간 w_s는 노선의 통행량 v의 함수이므로 식 (22)는 비선형 제약식이 된다. 그러므로, 식 (22)의 해를 구하기가 현실적으로 힘들기 때문에 이 식을 식 (29)와 같이 선형화해서 근사해를 구한다.

$$v_s^l = f_l \, w_s \, V_s \tag{29}$$

지금까지 서술한 내용을 바탕으로 앞 절에서 구축한 모형의 해를 구하기 위한 대각화 방법의 각 단계는 다음과 같이 요약할 수 있다.

단계1 : (초기화) 각 경로구간의 차량내 통행시기간(IVT) 및 평균 대기시간을 바탕으로 전량 통행배정 방법(all or nothing)에 의해서 초기해(V^0, v^0)를 구하고 k = 1로 설정한다.

단계2 : (비용함수의 대각화) 각 링크의 통행비용함수를 대각화하여 $\hat{c}(V, V^{k-1})$

를 구성한다.

단계3 : (대각화 문제 [P1]의 해 계산) 단계 2에서 대각화된 통행비용함수를 사용하여 [P1]풀어 $\hat{c}(V^k, V^{k-1})^T$ $(V - V^k) \geq 0$이 되는 해 V^k를 구한다. 이때, [P1]의 해를 구하기 위한 해법으로는 일반적으로 승용차 통행배정에서 사용되는 Frank-Wolfe 알고리즘을 적용한다.

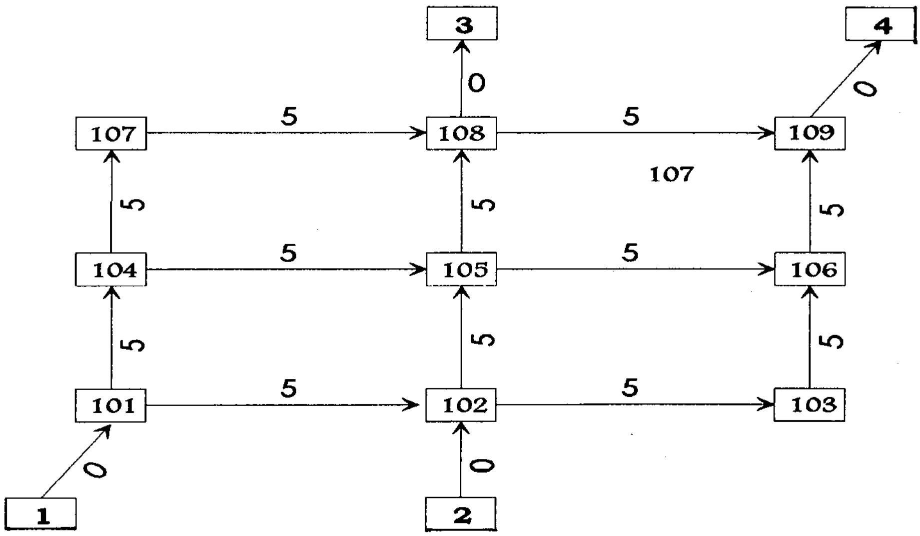
단계4 : 단계3에서 구한 V^k를 사용하여 식 (29)로부터 각 경로구간의 노선 통행량 v^k을 구한다.

단계5 : (수렴 여부의 판정) 만일, $\| V^k-V^{k-1} \| \leq \varepsilon$이면 프로그램의 수행을 중지하고 그렇지 않으면 $k = k+1$로 설정하고 단계 2로 돌아간다.

Ⅳ. 模型의 適用 및 檢證

1. 資料構築 및 前提

앞장에서 구축된 차량용량을 고려한 대중교통 통행배정모형을 적용·평가하기 위해서 〈그림 4-1〉과 같이 현실적인 여건이 감안된 대중교통노선으로 구성한 존이 4개, 노드가 9개, 링크가 16개(접근링크 포함)인 격자형 가로망에 적용하였다. 첨두 1시간을 기준으로 수요를 각 링크에 배정하였으며, 분석의 편의를 위하여 각 링크의 통행시간을 5분으로 통일하였다. 또한, 이 가로망에서 통행자들이 이용가능한 각 존을 연결하는 대중교통 노선은 배치특성에 따른 수요의 전이효과를 측정하기 위해 4개 노선을 대상으로 하였으며 모형의 유의성을 검증하기 위



〈그림 4-1〉 분석 가로망

해서 서로 평행하게 배치하였다. 이들 각 노선에 대한 자료는 〈표 4-1〉과 같다.

〈그림 4-1〉의 가로망 모형을 적용하였을 때 모형의 해가 차량의 용량 제약을 받는지의 여부를 알아보기 위하여 첨두시 수요가 각 노선이 수용할 수 있는 용량에 도달하도록 〈표 4-2〉와 같은 O/D 수요를 사용하였다.

〈표 4-1〉 각 노선에 대한 자료

구분	운행간격 (분)	차량용량 (인/대)	노선용량 (인/시간)	노 선 여 정
노선 1	5	50	600	101 104 107 108 109
노선 2	10	50	300	101 102 105 108 109
노선 3	10	50	300	104 105 106 109
노선 4	10	50	300	101 102 103 106 109

〈표 4-2〉 기종점 수요 (단위 : 인/시간)

기종점	1	2	3	4
1	0	0	400	400
2	0	0	0	300
3	0	0	0	0
4	0	0	0	0

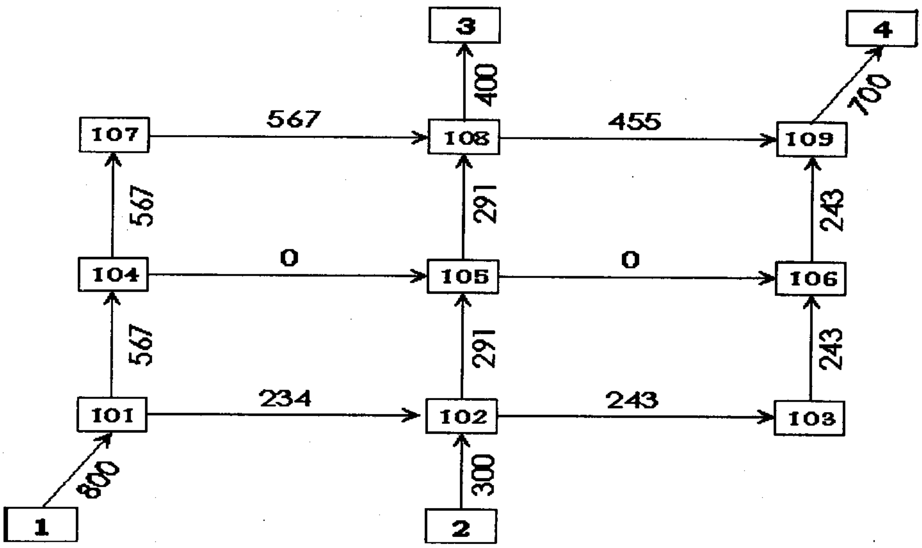
모형의 해를 구하기 위해서 각 경로구간의 통행비용함수에 사용되는 파라메타 β와 n의 값은 현장에서의 조사치를 대상으로 정산되어야 하나 본 논문에서는 분석의 용이성을 위해 각각 승용차 통행비용함수인 BPR식에서 일반적으로 사용하는 값인 0.15, 4를 사용하였으며 각 경로구간에 있어서 모든 노선의 차내 통행시간(IVT)는 5분으로 하였다. 또한, 차량의 도착시간간격 분포가 지수분포를 따르고 통행자들이 각 정류장에 균일하게 도착한다고 가정하고 α의 값으로 1을 사용하였다.

2. 模型의 適用 結果 및 分析

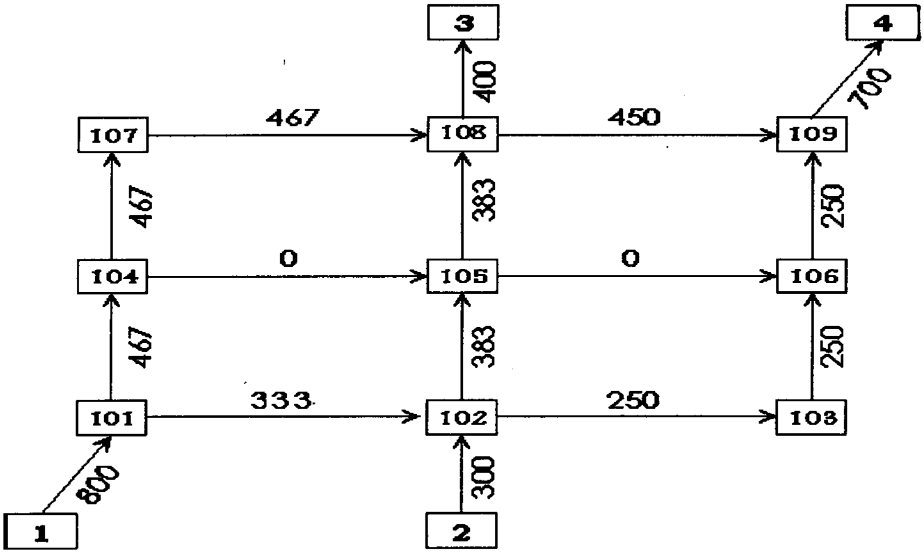
앞절에서 제시한 분석 가로망에 차량용량을 고려한 통행배정모형과 EMME/2에 내장된 최적전략에 의한 통행배정 결과는 각각 다음의 〈표 4-3〉, 〈그림 4-2〉 및 〈그림 4-3〉과 같다.

〈표 4-3〉 각 노선의 교통량　　　(인/시간)

노선 1			노선 2		
경로구간	본 논문의 모 형	최적전략 모 형	경로구간	본 논문의 모 형	최적전략 모 형
101 104	567	467	101 102	145	233
104 107	567	467	102 105	291	383
107 108	567	467	105 108	291	383
108 109	308	200	108 109	147	250
노선 3			**노선 4**		
경로구간	본 논문의 모 형	최적전략 모 형	경로구간	본 논문의 모 형	최적전략 모 형
104 105	0	0	101 102	89	100
105 106	0	0	102 103	243	250
106 109	0	0	103 106	243	250
			106 109	243	250



〈그림 4-2〉 차량용량을 고려한 모형에 의한 각 링크의 통행배정 결과



〈그림 4-3〉 최적전략모형에 의한 각 링크의 통행배정 결과

본 논문에서 구축된 모형에 의한 통행배정결과를 살펴보면, 죤 1에서 죤 3으로 가는 통행량의 대부분과 죤 4로 가는 통행량 중 일부는 노선 1의 운행간격(5분)이 다른 노선의 운행간격(10분)에 비해 작기 때문에 노선의 용량을 초과하지 않는 범위내에서 노선 1을 사용하는 것을 알 수 있다. (567인/시간) 죤 2에서 죤 4로 가는 통행의 경우, 이용가능한 노선은 노선 2와 노선 4이며 노선 2와 4는 각각 죤 1에서 출발하여 이미 통행자들이 탑승해 있기 때문에(노선 2 : 145인/시간, 노선 4 : 89인/시간) 이들 노선은 용량을 초과하지 않는 범위 내에서 이용되는 것을(노선 2 : 146인/시간, 노선 4 : 154인/시간)알 수 있으며 나머지 통행은 노선 4를 이용함을(243인/시간) 알 수 있다. 그러나, 위의 최적전략 모형의 통행배정결과를 살펴보면, 죤 2에서 죤 4로 가는 통행의 경우 노선 2에 이미 상당량의 통행량(233인/시간)이 승차해 있어 여유 용량이 67 인/시간임에도 불구하고 150인/시간이 이 노선을 이용하며 나머지 150인/시간이 노선 4를 이용함을 알 수 있다. (노선 2와 4의 운행간격이 10분으로 같으므로 동일하게 배분) 이는, 최적전략 모형에 의한 통행배정은 먼저 각 기종점을 통행하는데 이용가능한 전략 중 시스템 전체의 총 비용을 최소화해 주는 최적전략을 찾고 이 최적 전략에 포함된 각 링크에 노선의 운행회수에 비례하여 통행을 배정하고 있기 때문에 각 노선의 용량 제약을 반영해 주지 못하고 있음을 알 수 있다.

V. 結 論

본 논문은 대중교통 통행배정에 있어서 차량의 용량제약으로 인한 각 정류장에서의 노선별 이용자의 지체효과를 반영해 주는 모형을 구축

하고 이를 현실여건이 감안된 대중교통노선으로 구성된 가상 가로망에 적용하여 그 유의성의 검증하였다. 일반적으로 대중교통 통행배정에서 수요와 공급의 관계는 수요가 증가하는 것과 무관하다고 받아들여지고 있으나 수요가 시스템 전체의 용량을 초과하게 되면 정류장에서의 차량 대기시간 및 정차시간이 많이 소요되기 때문에 첨두시에는 통행자들의 경로선택 및 수단선택에 상당한 영향을 미친다. 그러므로, 이러한 대중교통수요의 과다로 인한 혼잡효과를 고려하기 위하여 승용차 통행배정에서 사용되는 링크 통행비용함수의 개념을 도입하여 실제상황을 보다 잘 반영할 수 있는 수리모형을 구축하여 검증한 결과는 다음과 같다.

첫째, 기존 대중교통 통행배정 모형은 Wardrop의 평형조건을 만족하는 해를 제공하지 못하므로 특정 노선 또는 특정 구간에 과다한 통행량이 부하되어 현실적인 수요예측의 한계성을 드러내고 있는 반면, 본 논문에서 구축된 모형은 차량의 용량을 고려하여 Wardrop의 평형조건을 만족하는 해를 도출할 수 있도록 하므로 대중교통수요를 노선별로 보다 현실적이고 합리적으로 배정할 수 있는 틀을 구축하였다.

둘째, 기존 대중교통 배정모형은 대중교통시스템 및 이용자 특성(차량용량, 이용자 행태 등)을 감안하지 않고 통행을 배정하므로 수요와 공급관계는 수요의 증가와는 무관한 것으로 받아들여지고 있다. 그러나, 본 논문의 모형에서는 차량용량에 따른 이용자의 통행비용함수를 고려하여 통행을 배정하므로 이는 대중교통수요가 시스템 전체 용량 초과시 통행자들의 경로 및 수단선택에 상당한 영향을 미치는 것으로 나타났다.

셋째, 차량 용량 초과시 통행자가 정류장에서 느끼는 운행회수 감소를 반영한 유효운행회수 개념을 도입하므로 이용자 최적과 시스템 최적 상태에서 합리적으로 대중교통 노선 상호간 통행배정이 이루어질 수 있도록 하였다. 이는 기존 모형이 단순히 시스템 전체 총비용을 최소화해주는 전략상태에서 노선의 운행회수에 비례하여 통행배정이 이루어지는 단점을 보완해 줄 수 있을 것으로 판단된다.

넷째, 대중교통 통행배정 모형에 차량용량을 고려하므로 동일한 기종점간 운행노선이 많은 대도시에서 첨두시 대중교통의 운행관리체계 개선, 투자계획, 서비스 개선을 위한 정책수립에 유용할 것으로 판단된다.

한편, 현실을 보다 더 정확하게 묘사해 줄 수 있는 대중교통 통행배정 모형의 구축을 위한 본 논문에서의 한계와 미완된 향후 연구과제는 다음과 같다.

첫째, 현실자료를 바탕으로 실질적인 경로구간의 통행비용함수에서 사용되는 파라메타들의 정산 작업과 이들 상호간 탄력성 분석이 요망된다.

둘째, 정류장에서의 환승이 통행자들의 경로선택에 미치는 영향을 분석하고 이를 모형에 추가하여 보다 더 정확한 결과를 얻을 수 있도록 연구되어야 한다.

셋째, 각 기종점간 통행이 가능한 교통수단이 여러 개가 있을 경우 이들 각 수단간의 상호관계를 규명하기 위한 수단선택과 경로선택을 결합하는 모형의 구축이 필요하다.

넷째, 시간에 따라 변화하는 통행자들의 통행패턴을 고려할 수 있는 동적인 대중교통 통행배정모형의 개발이 요구된다.

참 고 문 헌

H. Spiess, M. Florian, “Optimal Strategies: A New Assignment Model for Transit Network”, Trans. Res. B, Vol. 23B, No. 2, pp. 83-102, 1989.

H. Z. Aashtiani, T. L. Magnanti, "Equilibria on a Congested Transportation Network", SIAM J. Algebraic Discrete Meth. 2, pp. 213-216, 1981.

J. de D. Ortuzar, L. G. Willumsrn, Modelling Transport, John Wiley & Sons, 1990.

J. De Cea, J. E. Fernandez, "Transit Assignment for Congested Public Transport Systems: An Equilibrium Model", Trans. Sci. Vol. 27, No. 2, pp 133-147, 1993.

J. M. Ortega, W. C. Rheinboldt, "Iterative Solution of Nonlinear Equations in Several Variables", Academic Press, New York, 1970.

M. Florian, H. Spiess, "The Convergence of Diagonalization Algorithms for Asymmetric Network Equilibrium Problems", Trans. Res. B, Vol. 16B, No. 6, pp. 477-483, 1982.

M. J. Smith, "Existence, Uniqueness and Stability of Traffic Equilibria", Trans. Res. 18B, pp. 295-304, 1979.

M. J. Beckmann, C. B. McGuire and C. B. Winsten, Studies in the Economics of Transportation, Yale University Press, New Haven, Conn., 1956.

M. Florian, H. Spiess, "On Binary Mode Choice/Assignment Model", Trans. Sci. 17, pp. 32-47, 1983.

R. B. Dial, "A Probabilistic Multipath Traffic Assignment Model which Obviates Path Enumeration", Trans. Res., 5, pp. 83-112, 1971.

R. Thomas, Traffic Assignment Techniques, Avebury Technical, 1991.

S. C. Dafermos, "Traffic Equilibrium and Variational Inequalities", Trans. Sci. 14, pp. 42-54, 1980.

S. Nguyen, C. Dupuis, "An Efficient Method for Computing Traffic Equilibria in Networks with Asymmetric Transportation Costs", Trans. Sci., Vol. 18, No. 2, 1984.

Yosef Sheffi, Urban Transportation Network, Prentice-Hall Inc., 1985.