

손상지수를 이용한 단순보의 손상추정 I. 이론 및 수치해석

Damage Estimation of Simple Beams using Damage Index : I. Theory and Numerical Analysis

김 학 수¹⁾ · 장 동 일²⁾
Kim, Hak Su Chang, Dong Il

ABSTRACT : Damage estimation of bridge structures has recently received considerable attention in the light of maintenance and retrofitting of existing structures under service loads and after natural disasters. A method for the damage assessment of bridge structures using a damage index technique is presented. The damage index is formulated for the changes of modal properties due to the change of the stiffness. In order to verify the method which is presented, numerical analysis is conducted on simple beam models. Each FE model is subjected to different damage scenarios, i.e., locations and degrees of damage. Results of numerical analysis indicate that the proposed method is capable of detecting inflicted damages using the eigenvalue of only first mode.

1. 서 론

최근 국내에서 발생한 일련의 대형구조물의 붕괴사고로 말미암아 기존 구조물의 안전성 및 유지관리에 대한 관심이 고조되고 있으며, 이에 따라 노후 구조물에 대한 현장재하시험 및 비파괴검사 기법을 이용한 안전도 검사가 활발히 진행되고 있다. 그러나 대부분의 현장재하시험은 구조물의 정적거동 상태의 파악에 초점을 맞추어져 수행되는 것이 일반적인 현실이며, 또한 비파괴검사도 그

적용의 한계성 때문에 이로부터 구조물의 안전성을 합리적으로 평가한다는 것은 다소 무리가 따른다. 따라서 구조물의 합리적인 안전성 평가에 대한 새로운 시도가 절실히 요구되고 있는 실정이다.

토목구조물중 대표적인 것중의 하나라고 할 수 있는 교량구조물은 주하중의 대부분이 동하중으로 일단 구조물내에 손상이 발생하면 공용년수의 증가와 함께 진전하고 결국에는 구조물의 전체적인 붕괴로 까지 이어질 우려가 있다. 따라서 기존

1) 정회원, 호남대학교 토목공학과 교수
2) 정회원, 한양대학교 토목공학과 교수

구조물의 안전성을 조사하기 위해서는 구조물의 손상정도 및 부위를 합리적으로 추정하는 것이 선결과제이다. 구조물에 심각한 손상이 발생한 경우에는 외관조사만으로도 손상부위를 찾아낼 수 있지만 손상이 경미하거나 재료의 열화 등에 의한 노후화는 외관조사만으로 색출하기가 용이하지 않을 뿐만 아니라 정량적으로 평가하기 어려우며, 특히 대형구조물의 경우에 있어서는 사실상 불가능한 작업이다.

구조물의 손상을 규명하기 위해서 여러 분야에서 다양한 기법의 연구가 진행되고 있다. 이러한 연구중에서 구조물의 동특성을 이용하여 손상을 규명하고자 하는 노력이 실구조물을 대상으로 꾸준히 행해지고 있다[1, 2, 3, 4].

구조물의 손상이 구조계 강성의 국부적 감소에 의해 정의된다면 손상은 구조물의 고유치변화를 유발시킨다. 국부적 강성변화에 대한 고유치 변동의 민감도는 구조물의 손상과 고유치의 변화에 관련되므로 이를 이용하여 구조물의 손상부위 및 손상정도를 추정하게 된다. 이 기법은 자유도수에 비해 단지 몇개의 저차모드의 모드특성만을 이용하여 구조물의 손상부위를 탐색하고 손상정도를 평가할 목적으로 연구되어지기 시작하였다[5, 6, 7, 8].

본 연구는 교량 상부구조의 새로운 손상평가기법의 개발을 위한 기초를 제공하고자 손상지수를 이용한 평가기법의 이론고찰과 아울러 이의 검증을 위해 단순보 해석모델을 대상으로 손상경우에 따라 손상부위 및 정도를 추정하였다.

2. 손상 추정기법

2.1 손상부위의 추정

n 자유도계 구조물의 비감쇠 운동방정식은 다음과 같이 표현된다.

$$M\ddot{u} + Ku = 0 \quad (1)$$

여기서, $M : n \times n$ 질량행렬

$K : n \times n$ 강성행렬

$u :$ 절점의 변위벡터

일반적으로 구조물에서 M 과 K 는 대칭인 행렬이며, 식(1)의 해가 조화함수라 가정하면 식(1)은 다음과 같은 고유치 문제가 된다.

$$(K - \lambda_i M)\phi_i = 0 \quad (2)$$

여기서, $\lambda_i :$ 고유치(ω_i^2)

$\phi_i :$ 모드형상벡터

본 연구에서 구조물의 손상을 강성행렬의 변화 δK 로 정의하였다. 손상은 질량의 변화를 수반하지 않으며, 강성의 변화는 $\delta \lambda_i$ 와 $\delta \phi_i$ 로 표현되는 고유치와 고유벡터의 변화를 유발시킨다. 손상 구조물의 고유치 문제는 다음과 같다.

$$[K + \delta K - (\lambda_i + \delta \lambda_i)M] (\phi_i + \delta \phi_i) = 0 \quad (3)$$

식(3)에서 고차항을 제거하고 식(2)를 대입하여 정리하면 다음과 같다.

$$K\delta\phi_i - \lambda_i M\delta\phi_i = -\delta K\phi_i + \delta\lambda_i M\phi_i \quad (4)$$

$\delta \lambda_i$ 와 δK 의 관계는 식(4)에 ϕ_i^T 를 선승하여 구할 수 있다.

$$\phi_i^T (K - \lambda_i M)\delta\phi_i = -\phi_i^T \delta K\phi_i + \delta\lambda_i \quad (5)$$

여기서 $\phi_i^T (K - \lambda_i M) = 0^T$ 이므로 강성행렬에 대한 고유치 변화의 민감도는 다음과 같다.

$$\delta\lambda_i = \phi_i^T \delta K\phi_i \quad (6)$$

고유치의 변화를 국부요소의 강성의 변화와 연결시키기 위해 강성행렬의 변화를 독립적 구조요소의 변화로 표현해야 한다. K_j^* 가 구조물의 전체 강성행렬에 대한 j 번째 요소의 기여라고 하면, 손상 구조물의 강성은 다음과 같다.

$$(K + \delta K) = \sum_{j=1}^{n_e} K_j^*(1 + \delta K_j) \quad (7)$$

여기서, n_e : 요소의 수

δk_j : j 번째 부재의 손상비 벡터

위의 식(7)을 δK 에 대해서 정리하여 식(6)의 $\delta \lambda_i$ 에 대입하면 다음과 같은 식을 얻을 수 있다.

$$\delta K = \sum_{j=1}^{n_e} K_j^* \delta k_j \quad (8)$$

위의 식(8)에서 다음의 3가지 사항은 매우 중요하다.

- ① 강성행렬의 대칭성이 보장되어야 한다.
- ② 구조물의 연속성이 보존되어야 한다.
- ③ 전체 강성행렬의 최종변화는 요소 강성행렬의 변화에 의한다.

식(8)을 식(6)에 대입하면 방정식의 집합을 구할 수 있다.

$$\delta \lambda_i = \sum_{j=1}^{n_e} \phi_i^T K_j^* \phi_j \delta k_j \quad (9)$$

또는

$$D \delta k = \delta \lambda \quad (10)$$

여기서, D 는 모드강성행렬이며,

$d_{ij} = \phi_i^T K_j^* \phi_j$, $m \times n_e$ 매트릭스

δk : n_e -벡터로 강성의 미지 변화비

$\delta \lambda$: n_e -벡터로 고유치의 변화량

이상의 과정을 통하여 얻어진 행렬 D 는 모드강성을 나타내며, 구조물의 손상 전, 후의 모드형상을 이용하여 구할 수 있다. 손상부위의 추정은 손상 전, 후의 모드강성의 차이를 이용하며 이를 수식으로 나타내면 다음과 같다.

$$\kappa = D - D^* \quad (11)$$

여기서, D : 무손상 상태의 모드강성

D^* : 손상 상태의 모드강성

κ : 손상부위 지표

손상 상태의 모드강성 D^* 를 계산하기 위해서는 구조물의 강성행렬을 사용해야 하지만 이는 미지의 값이므로 근사적으로 무손상 구조물의 강성행렬을 사용한다. 그러므로 $d_{ij} = \phi_i^T K_j^* \phi_j$ 로 표현된다. 두 모드강성의 차로 얻어지는 κ 로부터 손상부위에 대한 정보를 얻을 수 있다. 이 기법에서는 기본모드의 모드형상만을 이용하여 손상부위 추정이 가능하며, κ 가 큰 음수로 나타나는 부위가 손상위치이다.

2.2 손상정도의 추정

손상부위 추정을 위해 계산된 모드강성 D 로부터 손상정도를 추정할 수 있다. NE 개의 요소와 N 개의 노드를 갖는 골구조구조물을 산정하고, 이 구조물은 선형거동한다고 가정한다. 그러면 모드강성은 아래와 같이 표현된다.

$$D_i = \phi_i^T K \phi_i \quad (12)$$

여기서, ϕ_i 는 i 차 모드벡터이고, K 는 계강성행렬이다. i 차 모드강성에 의한 j 번째 부재에 대한 기여, D_{ij} 는 다음과 같다.

$$D_{ij} = \phi_i^T K_j \phi_i \quad (13)$$

여기서, K_j 는 j 번째 부재의 계강성행렬에 대한 기여이다. j 번째 부재에 집중되는 i 차 모드의 모드에너지 부분, 즉 민감도는 아래와 같다.

$$F_{ij} = \frac{D_{ij}}{D_i} \quad (14)$$

식(14)는 무손상 구조물의 경우를 나타내며, 손상구조물은 윗첨자를 사용하여 다음과 같이 표현된다.

$$F_{ij}^* = \frac{D_{ij}^*}{D_i^*} \quad (15)$$

여기서, D_{ij}' 와 D_i' 는 각각 다음과 같다.

$$D_{ij}' = \phi_i'^T K_j' \phi_i' \quad (16a)$$

$$D_i' = \phi_i'^T K' \phi_i' \quad (16b)$$

식(15)를 식(14)로 나누면 다음과 같은 식을 얻을 수 있다.

$$\frac{F_{ij}'}{F_j'} = \frac{D_{ij}'}{D_j'} \frac{D_i}{D_i'} \quad (17)$$

식(13)과 (16)의 K_j 와 K_j' 는 아래와 같이 쓸 수 있다.

$$K_j = E_j K_{j0} \quad (18a)$$

$$K_j' = E_j' K_{j0} \quad (18b)$$

여기서, E_j 와 E_j' 는 무손상과 손상 구조물의 재료강성특성을 나타내는 변수이며, K_{j0} 는 기하적 특성을 포함한다. K_{j0} 는 휨, 비틀림, 전단 또는 판요소에 대한 표현이 가능하다. 또한 E_j 는 항상 같고, 요소의 탄성계수와 관련된다.

구조물의 모드변형에너지는 구조물이 임의의 부위에 손상을 입었을 경우에도 변하지 않으며, 또한 손상후의 손상부위에서는 상대적인 모드변형이 증가하게 된다. 이 두가지의 사실은 손상 전, 후의 한 요소의 모드변형에너지를 동일하다고 가정하는 것과 일치한다. 그러므로 식(17)은 다음과 같이 다시 표현된다.

$$\frac{F_{ij}'}{F_j'} = \frac{D_{ij}'}{D_j'} \frac{D_i}{D_i'} = 1 \quad (19)$$

식(18)을 식(13)과 식(16)에 대입하고, 이를 다시 식(19)에 대입하여 정리하면 다음과 같은 손상지수를 얻을 수 있다.

$$\beta_{ji} = \frac{E_j}{E_j'} = \frac{\phi_i'^T K_{j0} \phi_i'}{\phi_i'^T K_{j0}' \phi_i'} \frac{D_i}{D_i'} \quad (20)$$

식(20)을 계산하기 위해서는 손상 전, 후의 계강성행렬이 필요하다. 손상후의 계강성행렬은 미지의 값이므로 $D_i' = \phi_i'^T K' \phi_i'$ 에서 K' 을 K 로 대치하여 계산한다. 이렇게 하여 식(20)의 D_i/D_i' 을 계산하면 $D_i/D_i' \approx 1$ 이다. 그러므로 식(20)을 아래와 같이 다시 표현할 수 있다.

$$\beta_{ji} = \frac{E_j}{E_j'} = \frac{\phi_i'^T K_{j0} \phi_i'}{\phi_i'^T K_{j0}' \phi_i'} \quad (21)$$

손상 전, 후의 모드특성이 비교되면 β_{ji} 로 부터 손상정도를 규명할 수 있다. j 번째 부재의 모드강성변화를 α_j 라 하면 다음과 같이 표현된다.

$$E_j' = E_j(1 + \alpha_j) \quad (22)$$

여기서, $\alpha_j = \frac{1}{\beta_{ji}} - 1$ 이다.

3. 수치해석을 통한 검증

손상지수를 이용한 구조물의 손상추정이론에 대한 타당성 및 효율성의 검증을 위하여 단순보를 해석모델로 선택하였다. 해석모델의 제원은 그림 1과 같으며, 단면 및 재료특성은 표 1에 나타내었다.

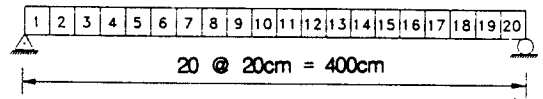


그림 1 단순보 해석모델의 제원

표 1. 단순보 해석모델의 단면 및 재료특성

탄성계수, $E(\text{ton/m}^2)$	단위중량, $\gamma(\text{ton/m}^3)$	단면적, $A(\text{m}^2)$	단면 2차모멘트, $I(\text{m}^4)$
2.10×10^7	7.850	9.487×10^{-4}	4.770×10^{-7}

단순보 해석모델에 대하여 손상위치 및 손상정도를 표 2와 같이 인위적으로 발생시켰으며, 각 경

표 3. 해석모델 I의 손상 전, 후의 모드강성(손상 30%)

부재 번호	무손상 상태의 모드강성, D			무손상 상태의 모드강성, D^*			손상부위지표, $\kappa=D-D^*$		
	1차 모드	2차 모드	3차 모드	1차 모드	2차 모드	3차 모드	1차 모드	2차 모드	3차 모드
1	0.408660E+01	0.259484E+03	0.290277E+04	0.376407E+01	0.256637E+03	0.278304E+04	0.322530	10.9290	28.9200
2	0.282219E+02	0.169560E+04	0.172745E+05	0.260646E+02	0.167099E+04	0.166394E+05	2.15730	16.8620	33.8760
3	0.744629E+02	0.401808E+04	0.341753E+05	0.682166E+02	0.396112E+04	0.331617E+05	6.24630	23.0530	37.3010
4	0.137414E+03	0.633963E+04	0.396696E+05	0.126485E+03	0.624985E+04	0.389995E+05	10.9290	28.9200	-438.312
5	0.211832E+03	0.777506E+04	0.292236E+05	0.194970E+03	0.766240E+04	0.294751E+05	16.8620	33.8760	39.3650
6	0.290230E+03	0.777501E+04	0.114495E+05	0.267177E+03	0.765836E+04	0.122986E+05	23.0530	37.3010	37.8770
7	0.364599E+03	0.633951E+04	0.100786E+04	0.335679E+03	0.623835E+04	0.125645E+04	28.9200	-438.312	34.3090
8	0.427944E+03	0.401824E+04	0.650030E+04	0.394068E+03	0.394292E+04	0.495454E+04	33.8760	39.3650	29.5140
9	0.473937E+03	0.169549E+04	0.233939E+05	0.436636E+03	0.165289E+04	0.197412E+05	37.3010	37.8770	23.6730
10	0.498074E+03	0.259483E+03	0.377782E+05	0.936386E+03	0.502947E+03	0.666579E+05	-438.312	34.3090	17.3870
11	0.498061E+03	0.259484E+03	0.377782E+05	0.458696E+03	0.272933E+03	0.324830E+05	39.3650	29.5140	11.1470
12	0.473952E+03	0.169560E+04	0.233939E+05	0.436075E+03	0.173173E+04	0.194975E+05	37.8770	23.6730	6.57830
13	0.427914E+03	0.401808E+04	0.650028E+04	0.393605E+03	0.407605E+04	0.492674E+04	34.3090	17.3870	2.34970
14	0.364592E+03	0.633963E+04	0.100791E+04	0.335078E+03	0.641076E+04	0.117534E+04	29.5140	11.1470	0.383630
15	0.290228E+03	0.777506E+04	0.114494E+05	0.266555E+03	0.785051E+04	0.116967E+05	23.6730	6.57830	-30.0200
16	0.211850E+03	0.777501E+04	0.292235E+05	0.194463E+03	0.784334E+04	0.281863E+05	17.3870	2.34970	-12.9000
17	0.137485E+03	0.633951E+04	0.396696E+05	0.126338E+03	0.639307E+04	0.373532E+05	11.1470	0.383630	-2.17200
18	0.744808E+02	0.401824E+04	0.341753E+05	0.679025E+02	0.404826E+04	0.317818E+05	6.57830	-30.0200	2393.50
19	0.282189E+02	0.169549E+04	0.172746E+05	0.258692E+02	0.170839E+04	0.159542E+05	2.34970	-12.9000	1320.40
20	0.408950E+01	0.259483E+03	0.290286E+04	0.370587E+01	0.261655E+03	0.266989E+04	0.383630	-2.17200	232.970

우에 대하여 손상지수를 이용하여 손상을 추정하였다.

표 2. 해석경우

해석모델	손상부재의 위치	손상정도
해석모델 I	10번 부재	10 ~ 50%
해석모델 II	6번 부재	10 ~ 50%
해석모델 III	6번 및 10번 부재	10 ~ 50%

손상지수를 이용한 손상추정을 위해 범용 구조 해석 프로그램인 ALGOR에 의한 고유치해석을 실시하였다.

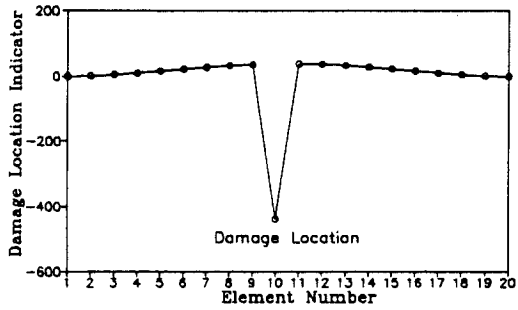
고유치해석을 통하여 계산된 각 경우에 대한 모드형상과 요소강성행렬로부터 구조물 손상 전, 후의 모드강성을 계산하였다. 표 3에 해석모델 I의 무손상 상태의 모드강성(D)과 30% 손상상태의 모드강성(D^*)을 각 모드별로 나타내었으며, 그림 2~그림 4에 30% 손상에 대한 해석모델 I, II 및 III의 손상부위지표(κ)를 도시하였다.

각 모드별로 손상부위지표를 나타낸 그림 2~그림 4를 살펴보면 1차 모드의 모드강성을 이용하여

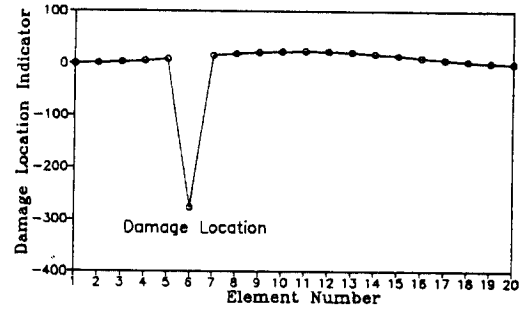
추정된 결과는 매우 정확하게 손상부위를 나타내고 있지만 2차와 3차 모드의 경우에는 실제와 다른 결과를 보이고 있다. 이는 모드차수의 증가에 따라 모드형상의 파형이 증가하여 손상의 영향이 각 파형에 영향을 미치기 때문으로 판단된다. 이상의 결과에 의하면 본 연구에서 제시하고자 하는 손상추정기법은 구조물의 1차 모드형상만을 이용하여 정확하게 손상부위를 식출할 수 있음을 나타내고 있으며, 1차 모드의 고유치만을 이용하기 때문에 고차 모드의 측정이 용이하지 않은 실구조물의 손상추정시 매우 유용할 것으로 사료된다. 실제로 기존의 여타 손상추정기법은 고차 모드의 고유치를 부가적으로 이용하므로써 해의 수렴성을 증가시켰었다.

앞서 추정된 손상부위에 대한 정보를 이용하여 손상부재의 손상정도를 추정한 결과를 표 4에 정리하였다.

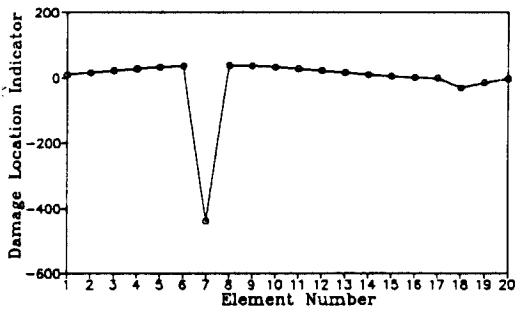
표 4에 나타난 바와 같이 손상지수를 이용하여 추정한 손상정도가 실제의 손상을 과대평가함을 알 수 있다. 이는 손상지수의 산정시 손상 전, 후의



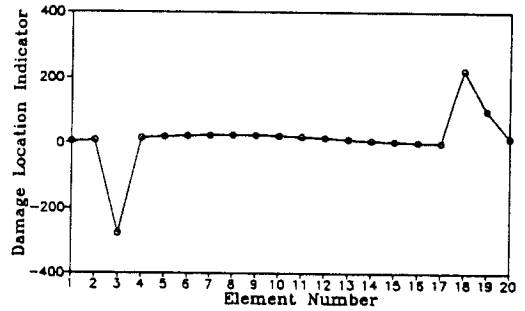
(a) 1차 모드만을 이용하는 경우



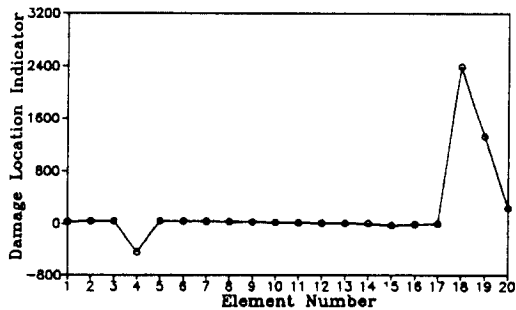
(a) 1차 모드만을 이용하는 경우



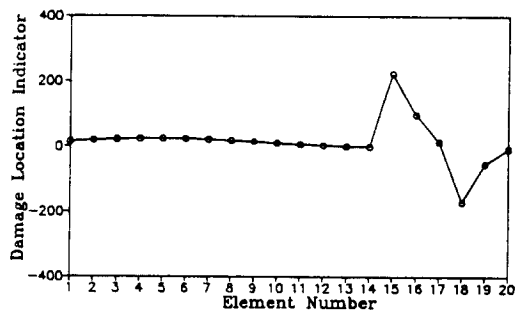
(b) 2차 모드만을 이용하는 경우



(b) 2차 모드만을 이용하는 경우



(c) 3차 모드만을 이용하는 경우



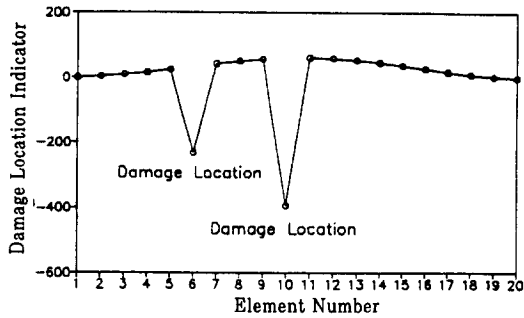
(c) 3차 모드만을 이용하는 경우

그림 2 해석모델 I의 손상부위 추정결과(손상 30%)

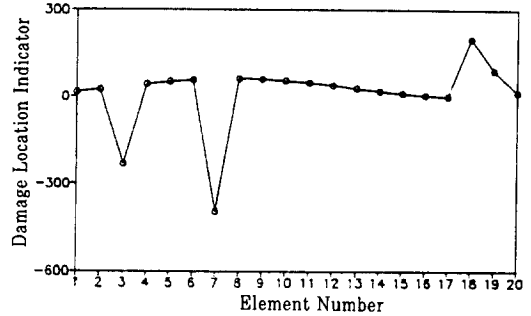
그림 3 해석모델 II의 손상부위 추정결과(손상 30%)

계강성행렬의 비를 1로 하여 계산과정에서 생략하였기 때문에 발생하는 오차로 판단된다. 그러나 표 4의 결과를 도시한 그림 5를 살펴보면 실제의 손상정도와 추정손상정도 사이에 강한 상관관계가 있으며, 이로부터 추정 손상정도를 선형 회귀

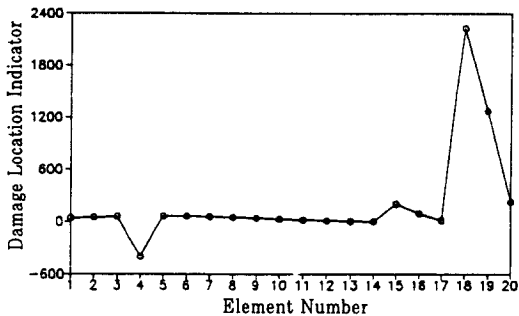
분석을 통하여 보정할 수 있음을 알 수 있다. 선형 회귀분석을 통해 보정된 손상정도를 표 5에 나타내었다. 보정된 손상정도를 나타낸 표 5의 결과에 의하면 최대 오차가 10% 이하로 실제와 유사하게 손상정도가 추정됨을 알 수 있다.



(a) 1차 모드만을 이용하는 경우



(b) 2차 모드만을 이용하는 경우



(c) 3차 모드만을 이용하는 경우

그림 4 해석모델 III의 손상부위 추정결과(손상 30%)

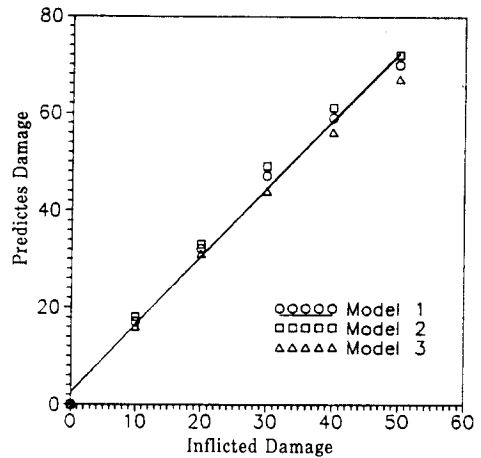


그림 5 실제 손상도와 추정치간의 관계

표 4. 손상정도 추정결과

실제 손상정도(%)	추정된 손상정도(%)		
	해석모델 I	해석모델 II	해석모델 III
10	17	18	16
20	32	33	31
30	47	49	44
40	59	61	56
50	70	72	67
비고	해석모델 I : 10번 부재에 손상을 가한 경우 해석모델 II : 6번 부재에 손상을 가한 경우 해석모델 III : 6번 및 10번 부재에 손상을 가한 경우		

표 5. 손상정도 추정치의 보정결과

실제 손상정도(%)	추정된 손상 정도(%)		
	해석모델 I	해석모델 II	해석모델 III
10	10 (0%)	11 (10%)	10 (0%)
20	21 (5%)	22 (10%)	20 (0%)
30	32 (7%)	33 (10%)	30 (0%)
40	41 (3%)	42 (5%)	38 (5%)
50	48 (4%)	50 (0%)	46 (8%)
비고	해석모델 I : 10번 부재에 손상을 가한 경우 해석모델 II : 6번 부재에 손상을 가한 경우 해석모델 III : 6번 및 10번 부재에 손상을 가한 경우 ()안의 수치는 실제 손상정도에 대한 오차		

4. 결 론

본 논문에서는 손상지수를 이용한 손상추정기법에 대해 연구하였다. 손상지수를 이용한 손상추정기법에 관한 이론고찰과 수치해석을 통한 이론적 연구의 검증을 실시하였다. 교량구조물을 단순보로 모델링한 경우에 대해 손상부위 및 손상정도에 따라 손상을 추정한 결과, 본 연구에서 제시한 방법은 구조물의 1차 모드의 고유치만을 이용해서 정확한 결과를 얻을 수 있음을 알 수 있었으며, 손상추정시 구조물의 1차 모드 고유치만을 이용하기 때문에 고차 모드의 측정이 용이하지 않은 실구조물의 손상추정시 매우 유용한 방법으로 판단된다.

참 고 문 헌

1. Masafumi Kato and Shizuo Shimada, "Vibration of PC Bridge Failure Process", *Journal of Structural Engineering*, ASCE, Vol. 112, No. 7, 1986.
2. Bruce M. Douglas and Wayne H. Reid, "Dynamic Tests and System Identification of Bridges", *Journal of the Structural Division*, ASCE, Vol. 108, No. ST10, 1982.
3. H. J. Salane and J. W. Baldwin Jr., "Identification of Modal Properties of Bridges", *Journal of Structural Engineering*, ASCE, Vol. 116, No. 7, 1990.
4. Olusegun S. Salawu and Clive Williams, "Bridge Assessment Using Forced-Vibration Testing", *Journal of Structural Engineering*, ASCE, Vol. 121, No. 2, 1995.
5. Kim J. T. and Stubbs N., "Damage Detection in Offshore Jacket Structures from Limited Modal Information", *International Journal of Offshore and Polar Engineering*, Vol. 5, No. 1, 1995.
6. Adams R. D., Cawley P., Pye C. J. and Stone B. J., "A Vibration Techniques for Non-destructively Assessing the Integrity of Structures", *Journal of Mechanical Engineering Science*, Vol. 20, 1978.
7. Cawley P. and Adams R. D., "The Location of Defects in Structures from Measurements of Natural Frequencies", *Journal of Strain Analysis*, Vol. 14, No. 2, 1979.
8. Biswas M., Pandey A. K. and Samman M. M., "Modal Technology for Damage Detection of Bridges", *NATO Advanced Research Workshop on Bridges Evaluation, Repair and Rehabilitation*, 1990.