財務管理論叢 第3卷 第2號 (1996.10)

危險因子와 資本資産의 價格決定

李 逸 均*

요 약

본 논문에서는 자본시장의 변동성을 충분히 해명할 수 있는 가격결정모형이 정립되었다. 자본자산의 가격은 세개의 위험에 대한 프리미엄의 총화임이 도출되었다. 이 세개 위험은 소비베타와 유사한 형태를 갖는 모수, 시장베타와 유사한 형태의 모수, 그리고 총국민생산의 성장율과 자산과의 공분산에 의하여 정의되는 모수이다. 이 모수를 각각 소비위험모수, 시장위험모수 및 생산위험모수라 할 수 있다.

자산의 가격을 결정하기 위하여 가격화(pricing)되는 체계적 위험이 세개라는 것은 중요한 함의인 것이다. 자산의 가격은 소비와 시장에 의하여 결정된다. 소비와 시장은 자체의 독립적 영역과 서로 상대에 대하여 상호작용하는 영역을 갖는다. 독립적 영역에서 생성되는 위험이 소비모수와 시장모수로 표상되며, 이 양자의 상호작용관계가 생산모수로 귀일한다.

I. 서 론

본 논문은 자본시장의 변동성을 비롯하여 자본시장에 존재하는 여러가지 이상현상(anomalies)을 충분히 해명할 수 있는 자산가격결정 모형을 정립하는데 그 동기와 목적이 있다. 여기에서는 기존의 베타와는 다른 위험의 가격화 모수를 도출하고, 이 모수의 의미를 심도있게 분석한다. 아울러 이 모수의 경제적 의미를 해석한다. 본 논문

---

* 본 학회 회장 · 명지대학교 경상대학장

** 본 논문은 본 학회 1996년 추계논문발표대회 겸 국제학술대회에서 읽은 회장 연설 논문임.

의 제목으로 사용된 위험은 자본자산의 가격결정모형(capital asset pricing model; CAPM)이나 소비기저 자본자산 가격결정 모형(consumption based asset pricing model; CCAPM)에서 정의된 베타위험과는 그 성질과 특성이 전혀 다른 새로운 체계적 위험을 의미한다.

본 논문의 주요한 결과로서는 자본자산의 수익은 세개의 위험모수에 대한 프리미엄의 총화라는 점이다. 말하자면 세개의 모수에 의하여 자본자산의 가격이 결정된다. 즉, 이 세개 모수는 소비모수와 유사한 형태를 갖는 모수, 시장모수와 유사한 형태의 모수, 그리고 국민경제 총생산의 성장율과 자산과의 공분산에 의하여 정의되는 모수이다. 이 모수를 각각 소비위험모수, 시장위험모수 및 생산위험모수라고 할 수 있다.

자산의 가격을 결정하기 위하여 가격화(pricing)되는 위험이 세개라는 것은 중요한 함의를 갖고 있다. 자산의 가격은 소비와 자본자산이 거래되는 시장에 의하여 결정된다. 소비와 시장은 각각 독립적으로 행동하는 영역과 서로가 상대에 대하여 이 양자가 상호작용하는 영역을 갖고 있다. 소비와 시장이 각각 자신의 고유영역에서 독자적으로 행동하는 결과가 각각 소비위험모수와 시장위험모수로 표상된다. 이 양자의 상호작용관계가 생산위험모수로 형상화된다. 자본시장은 국민경제의 생산과정의 거울이고, 동시에 생산과정은 자본시장의 거울이라는 관계를 갖고 있다. 자본자산의 시장과 소비의 공분산 관계로서 가격화되는 위험이 처음에 모형에서 정립되었으며, 이 위험이 적절한 정칙성(regularity condition) 아래에서 생산모수로 변환되었다. 시장과 소비의 공분산 관계로 표상되는 위험은 이 양자의 상호의존성을 가격화시키고 있다는 점에서 경제적 중요성을 갖는다. 이에 비하여 의존관계의 변환인 생산모수는 공분산 위험보다 직접적이고 직관적인 경제적 의미를 제공해 주고 있다. 경제성장모형에서 생산함수는 자본과 노동의 함수로 정립된다. 노동에 의하여 개인소득이 결정되며 이 소득은 소비에 이용된다. 자본시장을 통하여 국민총생산을 산출하기 위한 자본이 조달된다. 소비는 일반 근로소득 뿐만 아니라 자본시장의 투자를 통하여 얻게 되는 수익도 포함된 소득에서 이루어진다. 이와 같은 의미에서 자본자산의 거래시장과 소비의 상호작용이 국민생산의 성장률로 표시된다. 본 논문에서 정립된, 자본자산의 가격을 결정하는 모형은 CAPM이나 CCAPM의 실증분석을 통하여 제시된 여러 문제들을 이

론적으로 해결해 주는 모형인 것이다.

본 논문은 다음과 같이 진행된다. 제 2 장에서는 경제주체가 경제활동을 전개하는 모델경제를 제시한다. 이 모델경제는 연속시간의 순수교환경제이며 마찰이 없다. 이 경제에서 경제변수는 브라운 운동과정(Brownian motion process)을 따르고 정보는 filtration에 의하여 구조화된다. 제 3 장에서는 이 모델경제의 성질들을 규명하고 경제의 균형을 도출한다. 아울러 소비와 자산가격과의 관계에 중점을 둔다. 제 4 장에서는 체계적 위험인자를 확률과정의 틀 속에서 인지토록 하고 이 과정을 통하여 자본자산의 가격결정모형을 정립한다. 제 5 장에서는 새로 정립된 모형의 경제적 의미를 규명한다. 제 6 장에서는 CAPM과 CCAPM 및 異時的 模型과 본 논문에서 정립된 모형과의 관계를 분석하고, 새로 정립된 모형이 CAPM의 가정을 도입하면 CAPM으로 귀일하고, CCAPM과 ICAPM의 가정을 각각 적용할 때 CCAPM과 ICAPM으로 변환되고 있다는 점을 제시한다. 이를 통하여 이 모형이 robust하다는 것을 입증한다. 이 분석을 통하여 기존 모형들이 경제현실과의 괴리현상을 노정하게 된 원인을 규명하고, 이와 같은 현상을 새로운 모형이 어떻게 이론적 틀 속에서 적절하게 해소하고 해결하고 있는 가를 검토한다. 제 7 장에서는 결론을 제시한다.

II. 모델經濟

과거 20여년에 걸친 재무관리의 연구에 있어 중심과제는 개인들의 最適 異時的 消費 및 投資決定과 이 결정이 자본자산의 가격에 미치는 함의였다. 이 함의에 의하여 자산의 가격결정모형들이 정립되었고, 자산가격의 결정과정과 금융시장의 성질에 대한 이해와 통찰력이 축적되기에 이르렀다. 소비와 자산가격의 변동은 확률적 소비와 투자기회 집합을 면전에 갖고 있는 경제주체들이 동태적으로 시간의 흐름에 걸쳐서 최적의 의사결정을 수행한 결과라는 점에 입각하여 자본자산의 가격을 결정하는 이론들이 개발되어 오고 있다. 자산가격과 소비결정 간의 상호관계를 탐구함으로써 자본시장의 행동과 움직임에 대한 지식을 축적하게 되었다.이와 같은 관점에서 모델경제를

기술하고자 한다. 본 논문의 연속시간 모델경제는 Duffie (1986), Huang (1987)과 Duffie와 Zame (1989)의 연속시간 모델경제를 따른다. 이들의 경제에 익숙한 독자는 본절을 할애하고 다음 절로 이동해도 본 논문을 이해하는데 지장이 없을 것이다.

불확실성하의 자본시장 경제를 상정·고려하면 이 경제의 존속기간은 유한집합으로 [0, T]이며, 이 집합은 거래일자들의 집합(set of trading dates)이다. 이 때 T는 양의 실수이다. 이 경제의 불확실성은 자연의 상태(uncertain states of nature)로 모형화한다. 자연의 한 상태는 시간 0으로 부터 시간 T까지의 불확실한 외생적 환경에 대한 완벽한 記述로 파악·이해하도록 한다. 終了時點 T에 존재할 수 있는 모든 가능한 자연의 상태의 집합을 Ω라 하자. 이 모델경제에 존재하는 불확실성은 確率空間 (Ω, F, P)으로 모형화한다. 이 때 F는 집합 Ω의 부분집합으로 Ω상의 σ-field 이고, P는 確率測度이다.

연속시간의 모델경제에서 경제주체들은 공통의 정보구조(information structure)를 갖고 있으며, 이 정보구조는 외생적으로 결정된다. 모델경제 내에서 생성되는 정보는 Ω의 분할(partition)인 σ-field로 표시된다. 연속모형에서 정보구조를 정의하기 위하여는 filtration의 개념이 필요하다. 사건 또는 事象(events)은 filtration에 따라 시간의 흐름에 걸쳐 밝혀지기 때문이다. 이와 같은 의미에서 filtration이 불확실성에 대한 정보를 제공하는 개념이다. 확률공간 (Ω, F, P)의 filtration $\mathbb{F} = \{F_t : t \in [0, T]\}$는 σ-field의 族으로 (1) 모든 $0 \le s \le t \le T$에 대하여 $F_s \subset F_t$이고, (2) F_0은 확률이 0인 모든 사상을 포함하고, (3) 각각의 $0 \le t \le T$에 대하여 $F_t = \bigcap_{u>t} F_u$ 이다. 따라서 filtration $\mathbb{F}$는 $t \ge s$이면 $F_s \subset F_t$의 성질을 갖는 F의 sub-sigma field들의 增加族이다. 불가능한 사상은 모두 모델경제의 시초에 알려진다. filtration은 F의 sub-sigma field들의 右側連續 增加族으로 $F_T = F$이고 F_0는 거의 자명(almost trivial)하다.[1] 따라서 시간 t에 있어서의 새 정보는 시점 t 이후의 순간에 도착하는 것

1) 모든 t에 대하여 $F_t = \bigcap_{s>t} F_s$ 이면 filtration은 우측연속이다. 이것은 t 후의 모든 시점

이 아니라 정확히 시점 t에 도착한다. σ-field들의 집합 $\{F_t\}$은 어떤 현상의 역사를 기술하고 있는 것으로 볼 수 있으며 F_t는 시간 t의 직전에 발생하는 사건 또는 사상의 σ-field인 것이다. F_t는 시간 t나 또는 그 이전에 서로 구별이 되는 모든 사건을 포함한다. filtration $\mathbb{F}$ = $\{F_0, F_1, \cdot\cdot\cdot, F_T\}$는 정보가 시간의 흐름에 걸쳐 어떻게 밝혀지는 가를 제시해 준다. filtration $\mathbb{F}$가 갖추어진 測度空間 (Ω, F)는 filtered space이다. 측도공간 (Ω, F)나 확률공간 (Ω, F, P) 上의 확률과정 S_t는 S_t가 각 t에 있어서 F_t 測度的(F_t-measurable)이면 filtration $\mathbb{F}_t$에 adapt된다. F_t는 시점 t와 그 이전에 발생할 수 있는 모든 사상의 집합으로 생각할 수 있다. $\mathbb{F}$가 증가($F_s \subset F_t$, $t > s$) 한다는 가정은 사상이 일단 밝혀지면 이 사상이 발생하였다는 사실을 경제주체가 결코 망각하지 않는다는 것을 의미한다. F_T = F라는 가정은 모든 불확실성이 시점 T에서 해소(resolve) 된다는 의미이다. 따라서 filtration $\mathbb{F}$ = $\{F_t : t \in [0, T]\}$는 모델경제의 정보구조로 간주될 수 있다.

Revuz와 Yor (1991)가 지적하고 있는 바와 같이 filtration의 도입에 의하여 母數 t를 시간으로 간주할 수 있다. σ-field F_t는 시점 t와 그 이전에 발생하는 사상의 집합이다. 즉 시점 t까지의 가능한 過去들(pasts)의 집합인 것이다. 定常確率過程(stationary process)의 경우, filtration은 사상을 시간속에 위치시키는 F_t에 대한 측도인 것이다. $\mathbb{F}$는 사상이 시간의 흐름에 걸쳐 어떻게 경제주체에 밝혀지는가(reveal)를 규정해 주고 있다. 따라서 filtration은 확률과정논의 근본적 특성인 것이다.

$\mathbb{F}$가 filtration이면, adapted process B는 ① 이 과정이 브라운 운동(Brownian motion)이고 ② 각 $t \geq 0$에 대하여 확률과정 $B_{t+s} - B_t$, $s > 0$가 $\mathbb{F}$와 독립적이면

에서 알려진 임의의 사건(event)은 시간 t에서도 알려진다는 것을 의미한다. $s \geq t$ 일 때 $F_t \subset F_s$이면 filtration은 증가한다. 이것은 과거를 잊지 않는다는 것을 뜻한다. sub-sigma field가 ω에 의하여 생성되는 σ-field이고 모든 확률 0의 사건이 F에 있으면 거의 자명하다.

$\mathbb{F}$ Brownian motion이다. S가 確率測度族 P_θ, $\theta \in \Theta$을 갖춘 측도공간 (Ω, F) 상의 과정이라 하자. $\mathbb{F}^S$는 S가 adapt되는 가장 적은 우측연속완비(right-continuous and complete filtration)이다.[2] $\mathbb{F}^S$ stopping time은 S의 stopping time이라 한다. 브라운 운동의 경우 $F_t^B = F_t$ 이며 이 filtration을 Brownian filtration이라 한다.[3] 그리고 filtration $\mathbb{F}$는 브라운 운동의 정의의 일부분이다.

Huang(1985)은 브라운 운동 filtration이 연속정보구조라는 점을 증명한 바 있다. 多次元 브라운 운동에 의하여 생성된 filtration도 연속이다. 연속시간의 모델경제에서는 정보구조가 연속이므로 균형가격체계는 연속적 標本路 또는 標本道들(sample paths)을 갖고 균형자산가격 과정(equlibrium asset price process)은 Itô 적분 (Itô integral)이다. 거래가 연속적으로 이루어지는 경제에서 정보의 흐름이 filtration에 의하여 주어지는데, 정보가 연속적으로 밝혀지고 경제주체의 선호가 특정 위상(topology)에서 연속일 때, Huang (1985)에 의하면 균형가격과정은 연속 표본도들을 가져야만 한다. 특히 정보가 브라운 운동에 의하여 생성되면 균형자산가격은 Itô 적분이다. 따라서 Itô 적분으로 자산가격을 표현하는데에는 filtration이 브라운 운동에 의하여 생성된다는 점이 요구되고 있다. N 次元 표준 브라운 운동 B = { B_t: t ∈ [0, T] }가 기본확률공간 위에서 정의될 때, 이 브라운 운동을 구성하는 확률과정 $B_{1t}, \cdots, B_{Nt}$는 독립적인 1次元 브라운 운동이다. $\mathbb{F}$ = { F_t^B: t ∈ [0, T] }는 B에 의하여 생성된 완비 filtration이다.[4] B의 표본도들이 서로 구별되는 모든 事象을 완벽하게 규명・규정해 주며 이를 수식으로 표시하면 $\mathbb{F}^B = \mathbb{F}$이다. 표준 브라운 운동은 시점 0에서 확률 1로 출발하므로 F_0^B는 거의 자명(almost trivial)하다.

---

2) F_0이 모든 P 空集合(P-null set)을 포함하면 filtration $\mathbb{F}$는 완비(complete) filtration이다.
3) 예컨대 Karatzas and Shreve (1991. Section 2.7)가 깊이 있게 이점을 논술하고 있다.
4) 完備 filtration은 subsigma-field가 $\mathbb{F}$의 P측도가능 0의 집합에 의하여 augment된 filtration이다.

요컨대 이 모델경제의 확률공간 (Ω, F, P) 상의 정보구조는 filtration $\mathbb{F} = \{F_t : t \in [0, T]\}$이며 P(A) = 0이거나 P(A) = 1이면 $A \in F_0$이다. 연속시간 모델경제에 있어 불확실성은 브라운 운동을 통하여 발생한다. 정보의 흐름은 filtration $\mathbb{F}$에 의하여 이루어진다. 모든 과정은 $\mathbb{F}$에 adapt가 된다.

모델경제의 확률공간과 filtration에 의하여 정보구조가 주어진 만큼 endowment와 소비에 대하여 정보적 일관성을 유지하기 위해서는 각 경제주체의 최종 endowment와 소비는 주어진 확률공간 (Ω, F, P) 상의 확률변수가 된다. 따라서 가격과정, endowment process와 소비과정은 브라운 운동과정(Browrian motion process)으로 표현되며 각 경제주체는 공통확률측도 P가 갖추어져 있다고 가정한다.

모델경제는 불확실성하의 마찰이 없는 순수교환경제로서 경제활동이 연속시간의 틀 속에서 전개된다. 모든 경제주체에 공통적인 시장선택의 벡터공간 L이 이 경제내에 존재한다. 모든 경제 활동은 이 벡터공간 L 위에서 이루어진다. 소비재는 한 종류만이 모델경제내에 존재하며 이 재화는 벡터공간 L에 포함되어 있다. 모델경제의 존속기간, 즉 계획기간 [0, T]의 각 시점 t에서 자본자산이 거래되는 시장과 소비재가 거래되는 시장이 존재한다. $c \in L$를 소비과정(consumption process)이라 할 때 각 시점의 소비율 c_t는 그때까지의 이용가능한 정보에 기초하여 결정된다. 그리고 $E\left[\int_0^T c^2 dt\right] < \infty$이다.

이 모델경제내에는 유한의 경제주체가 경제활동을 전개하고 있으며 경제주체의 집합은 $I = \{1, 2, \cdot\cdot\cdot, I\}$로 표시한다. 각 경제주체는 소비과정 $c^i \in L_+$, endowment process $e^i \in L_+$, 그리고 완비율(completeness)과 전이율(transitivity)이 유지되는 二項選好關係 $\succsim_i$를 갖는다. 이항선호관계 $\succsim_i$는 L_+ 위에서 정의된다. 각 경제주체의 특성은 소비과정의 L_+의 陽의 錐體(positive cone) 상에서 정의되

는 효용함수 u^i로 표시한다. 자본시장은 완전경쟁시장이며 마찰(friction)이 존재하지 않는다. 따라서 경제주체는 자본자산의 가격을 여건(price taker)으로 본다.

자본시장에는 $(N + 1)$개의 자본자산이 거래되고 있으며 純供給(net supply)는 0이다. 거래가 형성되고 있는 증권들의 용인가격체계(admissible price system)는 실질유계(essentially bounded) semimatingale의 $(N + 1)$ 차원 右側連續過程 $\{S_0(t),\ S(t)';\ t \in [0, T]\}$이며 $\mathbb{F}$에 adapt된다. $S(t)' = (S_1(t), \cdot\cdot\cdot, S_N(t))^T$이며 이 때 $S_n(t)$는 시점 t에서 형성되는 증권 n의 가격이다.[5] 증권은 배당을 지급하며 배당직후(ex-dividend)로 거래된다고 가정한다. 따라서 모든 n에 대하여 $S_n(T) = 0$ a.s. 이다. 배당이 지급되므로 $S_0(t) > 0,\ \forall t \in [0, T]$ a.s.이다. 위에서 $S_0(t)$는 局部的으로 위험이 존재하지 않고 배당을 지급하지 않은 증권의 t시점에서의 가격이다. 시점 t에 있어 거래가격은 $S_0(t) = \exp\left[\int_0^t r(S(u), u)du\right]$ 이며, 이 때 $r(S(t), t)$는 시점 t에 있어서 순간적 무위험 이자율이다. $S_0(t)$는 모든 곳에서 0이 아니고 유계이다. 무위험자산의 용인 가능 가격과정이 0이 아니라는 가정은 이 증권의 보상이 0이 아니라는 것을 뜻한다. 어느 시점에서의 증권의 가격은 경제주체들의 효용에 대한 증권의 한계 기여를 반영하고 있는 만큼, 시점 T에 배달되는 소비재 한 단위의 시점 t에서의 한계사회가치평가가 0이 아닌 한, 시점 t에 있어서 증권 0의 가격은 0이 아니며 유계라고 예상하게 된다. 한계사회가치평가가 0이 아니라는 것은 유한의 소비에 있어서는 경제주체가 포만(satiate) 되지 않는다는 것을 의미한다.

각 자산은 시점 T의 보상(payoff)에 의하여 그 특성이 표상된다. 이 보상은 증권의

---

5) semimartingale은 국부적 martingale, adapt된 증가과정과 adapt된 감소과정의 합으로 형성되는 과정이다. 확률과정 x가 모든 $(\omega, t) \in \Omega \times [0, T]$에 대하여 $\lim_{s \downarrow t} x(\omega, s) = x(\omega, t)$이면 이 과정이 우측연속과정이다. 우측연속 filtration에 adapt된 martingale은 언제나 우측연속과정을 갖는다.

경우 배당으로 볼 수 있으며 증권 n의 배당과정(diviend process)은 $D = (D^n, t) \in R^N$이다. 배당과정은 adapt된 우측연속 좌측극한과정으로 시점 t의 배당 D(t)는 시점 t를 포함하여 t까지 해당 증권이 지불하는 누적배당이다. 각 시점에 증권들은 完備(completeness)의 완전경쟁시장에서 거래된다. 자산가격과 배당은 Itô형의 확률미분방정식 체계로 표현된다. 정보의 연속성에 의하여 상대가격들의 벡터는 연속 표본도들(sample paths)을 갖어야 한다. 그런데 배당 $D^n \in L$이고 D^n은 $\mathbb{F}$에 대하여 측정가능하므로 증권 n의 불확실한 배당의 실현이 시점 T에서 경제주체에게 알려진 정보 이외의 정보를 제공하지 않는다. 이것은 위에서 논의한 정보구조에서 기인한다.

이 증권중 하나를 numeraire로 선정하고 배당은 이것을 계산단위로 하여 지급된다. 이 numeraire를 하나의 계산 단위에 대하여 종료점 T에 배상하는 순할인채(pure discount bond)로 취급토록 한다. 일반성을 저해하지 않고 (N + 1) 증권중 증권 0을 numeraire, 즉 순할인채로 간주한다. 그리고 이 numeraire의 누적배당을 확률과정 D^0으로 표시하며 $D^0_t = 0$, $t < T$이고 $D^0_T = 1$로 정의한다.6) 기타 증권의 누적배당을 확률과정 $D^1, \cdot\cdot\cdot, D^N$으로 표시하고, 각 증권 n에 대하여 D^n은 연속 표본도들(sample paths)을 갖는 adapted process이다. D^n_t는 모든 t에 대하여 분산이 유한이라고 가정한다.

누적배당과정이 적분가능·예측가능 semimartingale로 상정한다. 배당과정 D에 대하여 확률변수 D_t는 시점 t를 포함하여 t까지 증권이 배당으로 지급한 누적배당이다. 증권은 배당이 지급직후에 (ex-dividend)로 거래된다. semimartingale은 좌측의 극한

---

6) 명목경제(nominal economy)에서는 순할인 채권을 numeraire으로 삼을 수 있다. 그러나 실질경제에 있어서는 화폐가 야기시키는 모든 문제점을 제거하기 위하여 소비재 중 하나를 numeraire로 선택하여 가격과정을 정의할 수도 있다. 단일재화만이 존재하는 경우에는 이 재화가 numeraire가 되며, 자본자산의 가격과 배당이 이 numeraire를 계산단위로하여 표시된다.

을 갖은 우측연속이며 따라서 D_t는 모든 t에 대하여 $\lim_{s \downarrow t} D_s$ a.s.이고 $D_{t-} = \lim_{s \uparrow t} D_s$ a.s.가 존재한다. $\nabla D_t = D_t - D_{t-}$ 시점에서의 jump, 즉 일괄배당(lump sum dividend)을 의미한다. 증권을 시점 s에 매수하여 시점 t에 매도하고 s와 t가 거의 동일한 순간적 거래가 아니면 이 증권을 소유한 사람은 일괄배당으로 받고 S(s) - S(t)의 자본이득을 얻을 것이다. 그러나 증권이 시간의 함수로서 확률과정 δ로 배당을 지급하면 이 증권의 소유자는 시점 s와 시점 t 간에 배당으로 $\int_s^t \delta(\tau)d\tau$를 받게 될 것이다. S가 배당과정 D를 갖는 증권의 가격확률과정이므로

$G_t = S_t + D_t$는 시점 0에서 시점 t까지 증권 한 단위를 보유하여 발생하는 시점 t에서의 계산 단위의 개수이며 이 과정이 이 증권의 자본이득과정(gain process)이다. 시점 t에서 시점 τ까지의 어느 증권을 θ_t 단위 보유하였다면 배당이득은 $\theta_t(D_\tau - D_t)$이고 자본이득은 $\theta_t(S_\tau - S_t)$이다. 거래과정(trading process)는 예측가능과정으로 상정한다. 예측가능(predictable)하다는 것은 시점 t는 포함시키지 않고 시점 t까지 축적된 정보에 기초하여 $\theta(t)$를 선택한다는 것을 의미한다. 이것은 사실상 arbitrage의 가능성을 배제하고 있음을 의미한다. G가 semimartingale이고 예측가능과정의 집합인 $L^2(G)$에서 어떤 과정 θ를 선택한다면 이 두시점 t와 τ 사이의 총 이득은 확률적분 $\int_t^\tau \theta_s dG_s$이다. 총이득은 $\theta_t(G_\tau - G_t)$이다. 거래과정이 θ이고

배당과정이 D이고 증권의 가격과정이 S일 때 시점 0에서 한 증권을 매수하여 시점 t까지 보유할 때 이 증권을 보유하여 얻는 총이득은 배당에서 생성되는 수익과 자본이득으로 얻는 수익의 총계이다. 즉, $\int_0^t \theta(s)dD(s)$와 $\int_0^t \theta(s)dS(s)$의 합이다. 이 때

총이득은 $t \in [0, T]$에 대하여 $G(t) = S(t) - S(0) + D(t)$로 정의되며 이 때 배당과

정 D를 갖는 증권이 adapted process S인 가격과정은 semimartingale을 갖도록 정의할 수 있다.

경제주체는 현물소비 가격과정(spot consumption process) $p \in L$을 주어진 여건으로 간주한다. 소비과정은 이 모델경제에서 시장화(marketed)가 된다. 자본자산의 집합이 주어져 있을 때, 소비과정에 소요되는 자금을 조달하기 위하여 요구되는 현물시장의 가치흐름이 자본자산의 배당과 매도에 의하여 생성된 가치와 정확한 일치를 형성하도록 시간의 흐름에 걸친 자산의 거래전략이 존재하면 특정한 소비과정 c는 시장화된다. 주어진 filtration의 martingale multiplicity가 N일 때, 각 소비과정이 시장화되도록 즉, 동태적으로 완비된 시장들(dynamically complete market)이 되도록 (N + 1)개 증권의 집합을 형성할 수 있다. 증권의 이득과정 G는 가격과정과 누적배당과정의 합으로 정의되었는 바, martingale multiplicity가 N이면 다음과 같은 성질을 갖는 N개의 이득과정을 형성시킬 수 있다. 즉, 고려하고 있는 임의의 martingale X에 대하여 적절한 확률과정 $\theta = (\theta_1, \cdot\cdot\cdot, \theta_N)$이 존재하여 모든 t에 대하여 다음이 형성된다.[7]

$$X_t = X_0 + \sum_{n=1}^{N} \int_0^t \theta_{ns} dG_{ns}$$

이것은 기본적으로 martingale multiplicity의 정의이며 이와 같은 spanning property를 갖는 martingale 중 가장 작은 martingale이다. 이것은 Kunita와 Watanabe (1967)의 마팅게일 표상정리(martingale representation theorem)에 의하여 정립이 된다. 이 정리에 의하면 $X \in H$일 때 어떤 $\alpha \in \prod$에 대하여 다음이 형성된다.

$$E(X \mid F_t^B) = E(X) + \sum_{n=1}^{N} \int_0^t \alpha_{ns} dB_{ns}$$

$$= E(X) + \int_0^t \alpha_s dB_s$$

7) martingale은 모든 $s \geq t$에 대하여 $E[x(s) \mid F_t] = x(t)$라는 성질을 갖고, 우측연속 표본도를 그리는 과정이다.

Filtration이 구비된(filtered) 확률공간 (Ω, $\mathbb{F}$, P) 위의 자승적분가능 martingale은 자승 $E[X(T)]^2 < \infty$와 모든 $t \geq s$에 대하여 $E[X(t)| F_s] = X(s)$를 만족시키는 adapted process이다. $X(0) = 0$이 되는 자승적분가능 martingale의 공간을 M_p^2라 하자. N개 자승적분가능 martingale $m = (m_1, \cdot\cdot\cdot, m_N)$의 주어진 벡터가 다음의 성질을 갖으면 M_p^2를 생성시킨다. 즉, 임의의 자승적분가능 martingale X에 대하여 $1 \leq n \leq N$에 대하여 $\theta_n \in L^2[m_n]$ 이 존재하여 다음이 형성되면 M_p^2를 주어진 벡터가 생성시킨다.

$$X_t = X_0 + \sum_{n=1}^{N} \int_0^t \theta_n(s) dm_n(s) \quad \text{a.s.} \quad \theta_t \geq 0.$$

말하자면 M_p^2 내의 임의의 martingale X를 기저집합(basis set) m에 대한 확률적분들의 합으로 표현할 수 있으면 martingale의 집합 m은 모든 자승적분가능 martingale의 공간을 생성시킨다. 그와 같은 martingale의 벡터 m을 martingale generator라 한다. 예컨대 어떤 여분증권(extra security)의 거래에서 발생하는 이득으로 보고 m을 이용 가능한 N개 증권의 이득벡터 G로 볼 때, G가 M_p^2를 생성시키게 되면 이 여분증권은 redundant security가 된다. 왜냐하면 증권 한 주를 보유하여 얻는 이득은 어떤 거래전략 θ에 의하여 $X = X_0 + \int \theta dG$로 모방(replication)할 수 있기 때문이다.

M_p^2의 multiplicity는 M_p^2를 생성시키는데 필요한 martingale의 최소 개수이다. 따라서 spanning을 유한차원에서 수행할 수 있고, 이것은 포트폴리오의 형성에 중요한 의미를 갖는다. 정보구조가 N차원 브라운 운동과정에 의하여 생성되는 filtration이

면 $L^2(\Omega,\ F,\ P)$의 차원은 무한대이지만 martingale multiplicity는 N이다. Huang (1987)에 의하면 정보가 확산 상태변수 과정(diffusion state variable process)의 N벡터에 의하여 생성되면 martingale multiplicity가 N이 될 수 있음을 보였다.

Duffie (1986)는 정보 filtration이 유한 martingale multiplicity를 갖으면 무한차원 소비공간은 유한개의 증권에 의하여 동태적으로 생성(span)시킬 수 있다는 점을 증명한 바 있다. spanning number는 외생적 정보 filtration과 경제주체의 확률평가 (probability assessment)의 관점에서 파악할 때 1 + N이 martingale multiplicity가 된다.

Martingale multiplicity가 N이면 N개의 자본이득과정 $G_1, \cdot\cdot\cdot, G_N$을 구성하여 고려대상의 임의의 martingale X에 대하여 적절한 확률과정 $\theta = \{\theta_1, \cdot\cdot\cdot, \theta_N\}$이 다음을 형성한다.

$$X_t = X_0 + \sum_{n=1}^{N} \int_0^t \theta_n(s)dG_n(s), \quad \text{all} \quad t \in [0,\ T]$$

이것이 martingale multiplicity의 정의이다. 즉, 이 spanning 성질을 갖는 가장 작은 수의 martingale인 것이다.

Duffie (1986)는 우리의 모델경제는 배당·가격과정 쌍이 시장을 완비하게 (completing)한다는 점을 증명한 바 있다. 뿐만 아니라 정칙성의 조건이 주어지면 이와 같은 시장은 동태적 완비성의 시장(dynamically complete market)이 됨을 입증하고 있다.

정보구조가 연속성을 갖을 때, 배당직후의 가격과정의 행동은 배당과정에 의하여 이루어진다. 배당과정이 연속적일 때 가격과정의 행동은 정보가 밝혀지는 방법에 의하여서만 결정된다. 따라서 이와 같은 경우는 배당과 정보가 서로 상반된 작용을 하는 경우로서 lump-sum ex-dividend dates에는 가격의 변화가 존재할 수 없다.

누적배당과정 D에 대하여 R^{N+1} 내의 martingale M(D)를 $M(D)_t = E(D_T)$라

고 정의하자. 그러면 D^0이 시점 T에서 만기가 되고 이 때 계산 단위 1을 지급하는 명목적 순수할인채권(zero-coupon unit bond)이고 M(D)가 martingale generator이다. 이것이 dynamic spanning condition이다.

거래과정 θ는 포트폴리오 과정 $\theta \in R^{N+1}$이며, 용인가능거래전략(admissible trading strategies)의 집합은 Θ이다. 거래전략은 예측가능해야 한다. 즉, adapt된 좌측연속과정에 의하여 생성된 $\Omega \times [0, T]$상의 σ-field $\mathbb{F}$에 대하여 측도가능해야 한다. 예측가능성은 시간 t는 포함하지 않고 시간 t까지 받은 정보에 기초하여 $\theta(t)$를 선택하는 것을 의미한다. 이로 인하여 arbitrage의 가능성이 제거된다. 이득과정 G가 0이 아닌 증권의 거래과정에 의하여 생성되는 예측과정으로 정의한다. 이때에는 확률적분 $\int \theta dG$가 잘 정의(well defined)된다. 그리고 이 때 G의 2차현 변이과정 (quadratic variation process)을 [G]라 하면 $E\int_0^T \theta(t)^2 d[G]_t < \infty$이다. 이와 같이 자승적분이 유한이라는 조건을 만족시키는 예측가능과정 θ族을 $L^2(G)$라 한다. Dellacherie와 Meyer (1972)는 이와 같은 θ의 조건에 의하여 확률적분 $\int \theta dG$가 존재한다는 점을 증명하였다. 거래과정을 통하여 이룩되는 이득과정은 다음과 같은 확률미분형의 Itô 과정으로 표시할 수 있다.

$$dG_t = \eta_t d_t + \sigma_t B_t$$

위에서 η는 (N + 1) 차원 예측가능과정이다. 정칙성 조건(regularity)을 충족시키기 위하여 포트폴리오 과정은 자승적분가능(square integrable)하다고 가정한다. 따라서 $E\left[\int_0^T \theta_t^T \sigma_t \sigma_t^T \theta_t dt\right] < \infty$. 그리고 $\int_0^T |\theta_t \cdot \eta_t| dt$는 확률 1로 (almost surely) 유

한이다.

모델경제를 표상하는 모든 확률과정은 다음의 일반형태를 갖는 Itô 적분방정식을 만족시키는 과정으로 표상할 수 있다.

$$Z_t = Z_0 + \int_0^t \mu(Z(s), s)ds)t + \int_0^t \sigma(Z(s), s)dB_s, \ \forall\ t \in [\ 0,\ T] \quad \text{a.s.}$$

위에서 Z_0는 상수의 벡터이다. Arnold (1974)는 Z가 위의 적분방정식의 유일한 解이며 擴散過程(diffusion process)이라는 점을 증명한 바 있다. $\mathbb{F}^z$를 Z가 생성시킨 完備 filtration (completed filtration)이라 하자. μ와 σ가 Lipschitz 條件과 成長條件을 만족시키고 있다고 가정하고 $\sigma((Z \mid t),\ t)$가 각 $Z(t)$와 t에 대하여 정칙(nonsingular)이라고 가정하면 $\mathbb{F} = \mathbb{F}^z$이다. 이 모델경제의 불확실성은 브라운 운동 B에 의하여 기술된다. 경제주체들은 벡터과정 Z를 관찰할 수 있으며 시간의 흐름에 걸친 Z의 진화(evolution)는 예측할 수 없는 방법으로 B에 의존한다. 정보구조 $\mathbb{F}^z$는 경제주체들이 마치 B를 직접 관찰할 수 있는 것과 동일한 양의 정보를 경제주체들에게 제공한다. X가 martingale이고 $\theta \in L^2[\ X]$ 이면 $\int \theta dX$도 martingale이다.

III. 經濟의 均衡

불확실성하의 세계에서 시점 t = 0에서 시점 t = T까지 생존하는 경제주체(agent)를 고려해 보자. 경제내에 존재하는 경제주체는 유한으로 각 경제주체 i는 효용함수 $U^i : c_+ \rightarrow R$에 의하여 그 특성이 표상되며 이 효용함수 U^i는 미끄러운 函數 (smooth function) u^i에 의하여 다음과 같이 표현된다.

$$U^i(c) = E\left[\int_0^T u_i(c_t, t)dt \right], \quad \forall\ c \in C_+. \tag{1}$$

위에서 C_+는 C의 부분공간이다. 식 (1)은 다음을 만족시키도록 형성된다. 즉, ν를 測度(measure)라 하면 모든 $c \in C_+$에 대하여 $\nu\{c(\omega, t) \geq 0\} = 1$이고 $u_i(z,t) : R_+ \times [0,T] \rightarrow R$은 첫째 변수(argument)에 대하여 연속이고 오목하고 강하게 증가하며, 둘째 변수에 대하여 Borel 측도적(Borel-measurable)이다. (0, ∞) 위의 $u_i(\cdot, t)$의 첫번째 도함수를 $u_{ic}(\cdot, t)$라 하면 이 도함수는 Inada 條件 즉 $\lim_{z \downarrow \downarrow 0} u_{ic}(z,t) = +\infty$을 만족시킨다. 미끄럽다(smooth)는 뜻은 충분히 적은 어떤 상수 $\bar{a} > 0$이 존재하여 임의의 $a \in (0, \bar{a})$에 대하여 $\bar{a} + a(a, \bar{e}+a) \times [0, T)$에 대한 u_i의 제한이 C^∞이고, 소비에 대하여 有界 제2차 도함수 $u_{icc}(z,t) = \partial^2 u_i(z,t)/\partial z^2$를 갖는다는 것이다. 위에서 $\bar{e}$는 총량소비과정(aggregate consumption process)의 實質上限(essential supremum)이며 $-\infty$가 될 수도 있다.

이 모델경제의 균형은 다음의 두개 조건이 만족될 때 이루어지는 증권가격의 벡터 $S = (S^0, \cdots, S^N)$이다. 즉, ① 거래전략 즉 포트폴리오 $\theta = (\theta^0, \cdots, \theta^N) \in R^{N+1}$이 존재하되 포토폴리오의 합계는 0이 되도록 형성된다. ② 각 경제주체 i에 대하여 예산제약조건 하에서 최적소비와 포트폴리오 선택의 문제의 解를 구할 때 형성되는 증권가격의 벡터가 존재한다. 균형은 예산제약 조건식 아래에서 목적함수의 극대화를 이루는 해를 구할 때 얻을 수 있다. 이 문제의 목적함수는 식 (1)이다. 경제주체 i의 예산실행 가능계획(budget feasible plan)은 雙 $(c, \theta) \in L_+ \times \Theta$로서 임의의 시점 $t \in [0, T]$에 대하여 다음과 같이 형성된다. 배당부 가격과정 S에 대하여

$$\theta_t \cdot S_t = \int_0^t \theta_s dG_s + \int_0^t p_s \cdot (e_s^i - c_s^i) ds \quad \text{a.s.} ; \tag{2}$$

$$\theta_T = 0$$

위에서 p는 소비현물 가격과정(consumption spot price process)이다. 이 경제는 명목과정(nominal process)이다. 위의 식은 현재의 포토폴리오의 가치는 거래를 통한 자본이득과 소비재의 순매입에 의하여 이루어진다는 의미이다. 거래전략 θ가 $c^i - e^i$의 자금을 조달해 준다. 계획기간의 종료시점 T에 대한 제약으로 부과된 조건인 $\theta_T = 0$은 시점 t = T에서 거래가 종료된다는 사실에 의하여 형성된다. 경제주체 i의 예산실행 가능계획 (e, θ)는 $u^i(c') > u^i(c)$가 되는 다른 예산실행 가능계획 (e', θ)가 존재하지 않으면 최적이다. 集合 $\{(S, p), (c^1, \theta^{11}), \cdot\cdot\cdot, (c^I, \theta^I)\}$은 다음으로 구성되는 경제의 균형이다. (1) 자산의 가격과정이 $S = (S^0, \cdot\cdot\cdot, S^N)$ 로서 이 자산들이 생성시키는 배당 $D = (D^0, \cdot\cdot\cdot, D^N)$의 증권들의 集合. 이 때 $1 \leq n \leq N+1 < \infty$에 대하여 $D^n \in L$이다. (2) 거래전략들 $\theta^i \in \Theta(s)$의 집합, 이 때 각 경제주체 $i \in I$에 대하여 하나의 거래전략이 존재한다. (3) 현물소비과정(consumption spot process) p의 集合, t = 0의 소비의 가격은 $k \in R_+$이다. 위의 이 세조건이 다음의 두 조건 선호를 만족시키는 예산제약조건과 시장청산(market clearing)조건을 만족시켜야 한다. 즉, (4) $\succeq_i$를 경제주체 i의 선호라 할 때, 각 경제주체 i에 대하여 소비 포트폴리오계획 (c^i, θ^i)가 예산실행가능 (e, θ)에서 $\succeq_i$ 최적이고, (5) 모든 $t \in [0, T]$에 대하여 시장청산조건이 충족된다. 즉, $\sum_i (c^i - e^i) = 0$이고 $\sum_i \theta^i = 0$ a.s.이다. 이 경제에는 균형이 존재한다.

[定理 1] aggregate endowment process $e = e^1+e^2+\cdots+e^I$는 Itô 과정이며 0이 아니고 유계이다. 이 과정의 확률미분 방정식은 다음과 같이 표현된다.

$$de_t = \mu_e(t)dt + \sigma_e(t)dB_t$$

이 확률미분 방정식에서는 $\sigma_e(t)$는 $E\left[\int_0^T \sigma_e(t)\cdot\sigma_e(t)dt\right] < \infty$이 형성된다. 임의의 $t \in [0, T]$에 의하여 정의된 martingale $M^1,\cdots,M^N$이 $M_t^M = E[\ D_T^n \mid F_t]$ martingale generator를 형성한다. 각 경제주체 i에 대하여 식 (1)이 유지된다. 위의 모든 조건이 충족되면 다음의 두개의 성질을 갖는 경제의 균형 $((S,p),(c^i,\theta^i))$이 존재한다. 첫째, 임의의 시점 t에서

$$S_t = \Pi(D)_t = E[\ D_T - D_t \mid \mathcal{F}_t],\quad t \in [0, T] \tag{3}$$

위에서 Π는 증권의 현시장가치가 증권이 지급하는 나머지 배당의 조건부 기대값이 되도록 사상하는(mapping) 함수이다. 말하자면 적분가능 배당과정을 증권가격 과정의 공간으로 사상하는 함수이다. 이것은 이득과정이 martingale이므로 얻게 된다.
둘째, 경제균형의 정칙성 조건(regularity condition)인 식 (1)을 만족시키는 (대표적 경제주체의) 效用 $\bar{u}: R_+\times[\ 0,T] \rightarrow R$이 존재하여 이 효용이 다음을 만족시킨다.

$$p_t = \bar{u}_c(e_t,\ t)$$

(證明) Duffie와 Zame (1989, 定理 1) 이나 Huang (1987) 또는 Duffie와 Huang (1985, 定理 2)를 보라. (Q.E.D.)

위의 定理 1에서 $\bar{u} : R_+ \times [0, T] \rightarrow R$은 각 시점 $t \in [0, T]$에 있어서 다음과 같이 정의된다.

$$\bar{u}(c,t) = \sup_{c_1, \cdots, c_I} \sum_{i=1}^{I} \lambda_i u_i(c_i, t)$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{i=1}^{I} c_i < c.$$

따라서 $\bar{u}$는 강오목 연속 효용함수이다. 음함수정리에 의하여 $\bar{u}$는 미끄럽다 (smooth). 말안장점 정리(saddle point theorem)에 의하여 Lagrange 승수 λ_i가 존재하고 이 승수 λ_i에 의하여 총량소비과정은 다음 대표경제추제 문제에 대한 해가 존재케 한다.

$$\operatorname*{Max}_{c \in L_+} \; E\left[\int_0^T \bar{u}(c_t, t)dt \right]$$

$$\text{s.t} \quad E\left[\int_0^T p_t(c_t - e_t)dt \right] \leq 0$$

따라서 위 식에 대하여 라그랑주 승수 $\lambda > 0$가 존재하여 $\bar{u}_c(e_t, t) = \gamma p_t$ a.e. 가 형성된다. 일반성을 저해시키지 않고서 $\gamma = 1$로 할 수 있다.

IV. 資産價格決定의 危險因子

앞 절에서는 경제를 명목경제로 상정하여 경제의 균형을 살펴 보았다. 명목경제는 실질경제도 쉽게 변환시킬 수 있다. 그것은 소비현물가격이 정의되어 있으며 실질 이자율을 도출할 수 있기 때문이다. 명목과 실질과정의 관계를 정립하기 위하여 우선 명목자산가격과 실질자산가격과의 관계를 살펴 보도록 하자. 이것은 채권을 numeraire로 한 것과 소비를 numeraire로 한 것과의 대비와 같다고 할 수 있다. 소비배당율과정 $\delta \in L$에 따른 실질배당을 지급하는 증권을 고찰해 보도록 한다. 명목누적배당과정 D는 $D_t = \int_0^t p_s \delta_s ds$로 정의된다. 定理 1에 의하여 균형에서 이 증권의 명목가격과정은 다음과 같다.

$$S_t = E\left[\int_t^T p_s \delta_s ds \mid F_t \right], \quad t \in [0, T] \tag{4}$$

정리 1에 의하여 실질가격과정은 $\hat{S}_t = S_t / p_t$로서 다음의 가격결정 방정식을 만족시킨다.

$$\hat{S}_t = \frac{1}{\bar{u}_c(e_t, t)} E\left[\int_t^T \bar{u}_c(e_s, s) \delta_s ds \mid F_t \right] \tag{5}$$

연속시간에서 실질균형 이자율은 확률과정 $r = \{r_t : t \in [0, T]\}$으로 정의할 수 있으며 이것은 실질가격이 언제나 1인 증권의 실질배당율이다. 따라서 r은 다음의 조건이 만족한다면 정의에 의하여 주어진 균형 $((S, p), (e^i, \theta^i))$에 대한 실질이자율이다. 즉 임의의 시점 t와 $\tau > t$에 대하여

$$p_t = E\left[\int_t^T p_s r_s ds + p_\tau \mid F_t \right] \tag{6}$$

자본자산의 거래시장에서 거래되는 시장포트폴리오는 Itô 과정으로 다음의 확률미분방정식의 형태를 갖는다.

$$d\mu_t = \phi_\mu(t) + \sigma(t)dB_t \tag{7}$$

경제주체는 dynamic spanning condition에 의하여 균형 이자율로 자금을 조달할 수 있다. 왜냐하면 어느 증권의 가격이 일정하여 이 가격과 이자율 r_t의 곱하기에 해당되는 배당을 지급하는 증권이 실제로 존재하거나 또는 적절한 거래전략을 형성시킬 수 있기 때문이다. 定理 1의 條件에 의하여 $p_t = \bar{u}_c(e_t, t)$이므로 Itô 보조정리에 의하여 p도 균형에서 Itô 과정이다. 따라서 p_t는 어떤 예측가능과정 $\mu_p(t)$에 의하여 다음의 확률미분형태로 쓸 수 있다. $\bar{u}$는 endowment process e_t와 시장포트폴리오 μ_t의 함수이므로

$$\begin{aligned} dp_t = {} & \mu_p(t)dt + [\, \bar{u}_{cc}(e_t, \mu_t, t)\sigma_e(t) + \bar{u}_{cc}(e_t, \mu_t, t)\sigma(t) \\ & + \bar{u}_{cc}(e_t, \mu_t, t)\sigma_e(t)^T \sigma(t)]\; dB_t \end{aligned} \tag{8}$$

위에서 $\bar{u}_{cc}(\cdot, \cdot, t)$는 $\bar{u}(\cdot, \cdot, t)$의 제2차 도함수이다. $\mu_p(t)$도 구체적으로 표현할 수 있다. 위에서 $\sigma_p(t) = \bar{u}_{cc}(e_t, t)\sigma_e(t)$이다. $p_t = \bar{u}_c(e_t, t)$이므로 확률과정 $\{-\mu_p(t)/p_t : t \in [0, T]\}$은 총량소비에 대한 대표경제주체의 한계효용의 음의

성장률이다. 다음의 정리에 의하여 균형이자율을 얻을 수 있다.

[定理 2] 전절의 조건 (a), (b)와 (c) 아래에서 균형이 존재하고 이 균형에서 실질이자율과정 r은 $r_t = -\mu_p(t)/p_t$를 만족시킨다.

(證明) 이것은 $\bar{u}_{cc}(e_t, t)$가 유계과정(bounded process)이라는 사실에서 연유한다. 따라서 과정 $\int \bar{u}_{cc}(e_t, t)\sigma_e(t)dB_t$는 martingale이다. 대표경제주체의 최적화를 통하여 $p_t = \bar{u}_c(e_t, t)$가 됨을 얻었다. 식 (6)과 (8)에 의하여 다음이 형성된다.

$$r_t = -\mu_p(t)/p_t. \qquad \text{(Q.E.D)}$$

실질 배당률과정 $\delta \in L$을 갖는 증권의 균형기대 수익률의 결정을 분석해 보자. 가격결정 방정식인 식 (4)에 의하여 이 증권의 균형명목가격과정은 Itô 과정으로 다음과 같은 확률미분형태로 쓸 수 있다.

$$dS_t = -\delta_t \bar{u}_c(e_t, \mu_t, t)dt + \bar{\sigma}(t)dB_t \tag{9}$$

위에서 $\bar{\sigma}$는 N 次元 예측가능과정이다. 이에 대응되는 실질가격과정 $\hat{S}$는 $\hat{S}_t = S_t/p_t$로서 Itô 보조정리에 의하여 Itô 과정이다. 따라서 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$d\hat{S}_t = \hat{\mu}(t)dt + \hat{\sigma}(t)dB_t. \tag{10}$$

위에서 $\hat{\mu}$도 예측가능과정이고 $\hat{\sigma}$는 N 차원예측가능과정이다. Itô 보조정리에 의하여 식 (11)을 사용하여 다음을 얻는다.

$$dS_t = [\ p_t\hat{\mu}(t) + \hat{S}_t\mu_p(t) + \hat{\sigma}(t)^T\bar{u}_{cc}(e_t, \mu_t, t)\sigma_e(t)$$

$$+\ \hat{\sigma}(t)^T\bar{u}_{cc}(e_t, \mu_t, t)\sigma_t]\ dt + \bar{\sigma}(t)dB_t \tag{11}$$

위에서 $\bar{\sigma}(t)$는 $\{p_t\hat{\sigma}(t) + \hat{S}_t[\ \bar{u}_{cc}(e_t, \mu_t, t)\sigma_e(t) + \bar{u}_{cc}(e_t, \mu_t, t)\sigma(t)]\ \}dB_t$이다. 따라서 $p_t d\hat{S}_t\ +\ \hat{S}_t dp_t\ +\ d\hat{S}_t dp_t$는 다음과 같이 표현된다.

$$p_t\hat{\mu}(t)dt\ +\ p_t\hat{\sigma}(t)dB_t\ +\ \hat{S}_t\mu_p(t)dt$$

$$+\ \hat{S}_t[\ \bar{u}_{cc}(e_t, \mu_t, t)\sigma_e(t) + \bar{u}_{cc}(e_t, \mu_t, t)\sigma_t + \bar{u}_{cc}(e_t, \mu_t, t)\sigma)e(t)^T\sigma(t)^T]\ dB_t$$

$$+\ [\ \hat{\sigma}^T(t)\bar{u}_{cc}(e_t, \mu_t, t)\sigma_e(t) + \hat{\sigma}(t)\bar{u}_{cc}(e_t, \mu_t, t)\sigma(t)$$

$$+\ \hat{\sigma}(t)^T\bar{u}_{cc}(e_t, \mu_t, t)\sigma_e(t)^T\sigma(t)]\ dt$$

위에 제시된 식에 의하여 다음을 얻는다.

$$p_t\delta_t + p_t\hat{\mu}(t) + \hat{S}_t\mu_p(t) + \hat{\sigma}(t)^T\bar{u}_{cc}(e_t, \mu_t, t)\sigma_e(t)$$

$$+\hat{\sigma}(t)^T\bar{u}_{cc}(e_t, \mu_t, t)\sigma(t) + \hat{\sigma}(t)^T\bar{u}_{cc}(e_t, \mu_t, t)\sigma_e(t)^T\sigma(t) = 0 \tag{12}$$

그런데 $p_t\ =\ \bar{u}_c(e_t, \mu_t, t)$이므로 (12)는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\delta_t + \hat{\mu}_t(t) + \hat{S}_t \frac{\mu_p(t)}{p_t} + \frac{1}{p_t}\hat{\sigma}(t)\bar{u}_{cc}(e_t, \mu_t, t)\sigma_e(t) + \frac{1}{p_t}\hat{\sigma}(t)\bar{u}_{cc}(e_t, \mu_t, t)\sigma(t)$$

$$+\frac{1}{p_t}\hat{\sigma}(t)^T\bar{u}_{cc}(e_t, \mu_t, t)\sigma_e(t)^T\sigma(t)] \quad = \quad 0 \qquad (13)$$

$\bar{u}_c \; = \; p_t$이므로 식 (13)은 다음과 같이 정리가 된다.

$$\delta_t + \hat{\mu}_t(t) + \hat{S}_t - r_t + \frac{\bar{u}_{cc}(e_t, \mu_t, t)}{\bar{u}_{cc}(e_t, \mu_t, t)}[\;\hat{\sigma}(t)^T\sigma_e(t) + \hat{\sigma}(t)^T\sigma_t + \hat{\sigma}(t)^T\sigma_e(t)^T\sigma(t)] \;=0$$

위의 식 (13)에 의하여 소비의 변동성과 시장변동성이 구비된 資本資産의 價格을 決定하는 模型이 다음과 같이 정립됨을 알 수 있다.

[定理 3] 경제주체의 소비와 자본시장의 행동을 포함하여 경제 전체가 동시에 고려·반영된 자본자산의 가격결정모형은 다음과 같다.

$$\hat{\mu}(t) + \delta(t) - r_t s_t$$

$$= \; -\frac{\bar{u}_{cc}(e_t, t)}{\bar{u}_c(e_t, t)}[\;\hat{\sigma}(t)^T\sigma_e(t) + \hat{\sigma}(t)^T\sigma_t + \hat{\sigma}(t)^T\sigma_e(t)^T\sigma(t)] \qquad (14)$$

이 모형은 消費·生産基底 資産價格決定 模型(consumption-production based capital asset pricing model)이라 할 수 있다.

위 식 (14)에 변형을 가하면 보다 간편하고 사용하기 용이한 식을 얻을 수 있다. $\hat{S}_t \; = \; 0$에 대하여 시점 t에서 증권의 총실질기대수익률은 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$R_t^s = \frac{\hat{\mu}(t)+\delta(t)}{\hat{S}(t)}$$

위 식은 기대수익률이 자본이득수익률과 배당수익률의 합이라는 것을 보여 주는 단순한 개념이다. $\sigma_s(t) = \hat{\sigma}(t)/\hat{S}(t)$, $\mu_s(t) = \hat{\mu}_t(t)/\hat{S}_t$라 하면 $\hat{S}_t$는 다음과 같다.

$$d\hat{S}_t = \hat{S}_t\mu_s(t) + \hat{S}_t\sigma_s(t)dB_t \tag{15}$$

그런데 $\sigma_s(t)^T\sigma_s(t)$는 시점 t에서 주어진 증권의 수익의 순간적 분산으로 볼 수 있으며, $\sigma_s(t)^T\sigma_e(t)$는 시점 t에서 이 증권의 수익과 총량소비의 성장율과의 순간적 공분산이다. 식 (14)는 다음과 같이 쓸 수 있는데 이 형태는 이 증권의 초과기대수익률로 표현되는 식인 것이다.

$$R_t^s\hat{S}_t - r_t\hat{S}_t = -\frac{\bar{u}_{cc}(e_t,\mu_t,t)}{\bar{u}_c(e_t,\mu_t,t)}\left[\ \hat{\sigma}(t)^T\sigma_e(t) + \hat{\sigma}(t)^T\sigma(t) + \hat{\sigma}(t)^T\sigma_e(t)^T\sigma(t)\right] \tag{16}$$

위에서 정의된 $\hat{S}_t$를 사용하여 위의 식에서 $\hat{S}_t$를 제거하면 다음을 얻는다.

$$R_t^s - r_t = -\frac{\bar{u}_{cc}(e_t,\mu_t,t)}{\bar{u}_c(e_t,\mu_t,t)}\left[\ \sigma_s(t)^T\sigma_e(t) + \sigma_s(t)^T\sigma(t) + \sigma_s(t)^T\sigma_e(t)^T\sigma(t)\right] \tag{17}$$

대표경제주체의 Pratt-Arrow의 절대적 위험기피도인 $-\bar{u}_{cc}(e_t,\mu_t,t)/\bar{u}_c(e_t,\mu_t,t)$는

식 (17)의 左項인 초과기대수익률과 우항인 증권의 수익과 소비증가와의 공분산 간의 비례상수(constant of proportionality)이다. 위험기피계수를 식 (17)에서 제거할 수 있으면 CAPM이나 CCAPM과 유사한 형태의 자산가격결정모형을 얻을 수 있다. dynamic spanning condition에 의하여 $\sigma_s(t) = \sigma_e(t)$가 형성되며 식 (17)을 만족시키는 증권이나 포트폴리오가 존재한다는 가정은 일반성을 잃지 않고 부가할 수 있다. 이 증권의 총 실질 초과기대수익률을 R_t^e로 표시하면 식 (17)에 의하여 다음을 얻을 수 있다.

$$-\frac{\bar{u}_{cc}(e_t,t)}{\bar{u}_c(e_t,t)} = \frac{R_t^e - r_t}{[\ \sigma_e(t)^T\sigma_e(t)+\sigma_e(t)^T\sigma(t)+\sigma_e(t)^T\sigma_e(t)\sigma(t)]}$$

위의 식을 식 (17)에 대입하면 다음 식이 정립된다.

$$\begin{aligned} &R^s(t) - r(t) \\ &= \left[\frac{\sigma_s(t)^T\sigma_e(t)+\sigma_s(t)^T\sigma(t)+\sigma_s(t)^T\sigma_e(t)^T\sigma(t)}{\sigma_e(t)^T\sigma_e(t)+\sigma_e(t)^T\sigma(t)+\sigma_e(t)^T\sigma_e(t)^T\sigma(t)}\right][\ R_t^e - r_t] \end{aligned} \qquad (18)$$

이제 임의의 증권에 대하여 다음과 같이 정의하자.

$$\beta_e(t) = \frac{\sigma_s(t)^T\sigma_e(t)}{\sigma_e(t)^T\sigma_e(t)+\sigma_e(t)^T\sigma(t)+\sigma_e(t)^T\sigma_e(t)\sigma(t)};$$

$$\beta_m(t) = \frac{\sigma_s(t)^T\sigma(t)}{\sigma_e(t)^T\sigma_e(t)+\sigma_e(t)^T\sigma(t)+\sigma_e(t)^T\sigma_e(t)\sigma(t)};$$

$$\beta_{em}(t) = \frac{\sigma_s(t)^T\sigma_e(t)\sigma(t)}{\sigma_e(t)^T\sigma_e(t)+\sigma_e(t)^T\sigma(t)+\sigma_e(t)^T\sigma_e(t)\sigma(t)};$$

위의 정의를 식 (18)에 대입하면 보다 간편한 소비·생산기저모형을 얻게 된다.[8] 즉, 임의의 증권에 대하여

$$R^{s}(t) - r(t) = [\ \beta_{e}(t) + \beta_{m}(t) + \beta_{em}(t)]\ [\ R_{t}^{e} - r_{t}] \tag{19}$$

그런데 식 (19)은 해석이 용이하지 않고 실증분석에도 어려움이 존재한다. 식 (18)을 좀 더 분석하면 식 (19) 보다 유용한 형태의 모형을 얻을 수 있다.

V. 資本資産의 價格決定

앞 절에서 정립된 모형은 일반모형이다. 이 모형은 현실에 적용하기에 적합한 형태로 변형시킬 수 있으며 변형된 모형이 자본자산의 가격결정에 대한 성질과 경제적 의미를 오히려 보다 잘 제공해 줄 수 있다. 식 (18)을 다시 살펴 보도록 하자. 이 식의 네모괄호 마지막 항은 $\sigma_{s}(t)^{T}\sigma_{e}(t)^{T}\sigma(t)$이다. 여기에서 $\sigma_{e}(t)^{T}\sigma(t)$는 소비와 시장포트폴리오와의 공분산이다. $\{\sigma_{s}(t)^{T}(\sigma_{e}(t)^{T}\sigma(t)\}$는 증권의 수익과 이 공분산과의 공분산이다. 따라서 이 위험은 소비와 시장포트폴리오를 동시에 고려할 때 발생되는 위험이다.

식 (18)에서 우변의 첫째 네모괄호 안에 있는 분모는 경제내에 존재하는 총위험이다. 소비의 분산, 소비와 시장포트폴리오와의 공분산, 그리고 소비의 분산과 시장포트폴리오의 일종의 표준편차의 합이 총위험이다. 따라서 $\beta_{e}(t)$는 이 총위험에 대하여

8) Huang (1987)은 마팅게일 표상을 사용하여 경제주체가 hedging mutual fund들과 무위험자산을 보유한다는 점을 밝히고 있으며, 시장포트폴리오는 헤지에서 아무런 역할도 담당하지 못하였다. 이것은 상태변수들의 존재 때문에 발생한다. 상태변수의 역할이 강하면 시장포트폴리오의 역할은 미미하게 된다. 상태변수들이 시장포트폴리오로 수렴해가도 완전하게 수렴하지 못하게 되므로 CAPM에서 내포되고 있는 바와 같은 헤지를 시장포트폴리오가 담당하지 못한다. 여기에서 식 (19)의 정합도가 탄생된다.

자산의 수익과 소비와의 공분산이 공헌하는 부분으로 일종의 소비위험이다. $\beta_m(t)$는 자산의 수익과 시장포트폴리오와의 공분산이 총위험에 기여하는 비율로서 일종의 시장위험이다. $\beta_{em}(t)$는 총위험에 대한 소비와 시장포트폴리오의 공분산의 민감도이다. 그러나 이 모형에서 제시된 소비위험과 시장위험은 CCAPM의 베타와 CAPM의 베타와는 유사점을 갖고 있으나 그 내용은 상이하다.

위의 분석을 통하여 식 (18)로 부터 자본자산의 가격을 결정하는 연속시간모형을 다음과 같이 얻을 수 있다.

[定理 4] 총소비증분의 순간적 변화율의 기대값을 $R^c(t)$, 시장포트폴리오의 순간적 수익률의 기대값을 $R^\mu(t)$, 그리고 총소비증분의 순간적 변화율과 시장포트폴리오의 순간적 수익률의 총량적 기대값(aggregate expectation)을 $R^{c\mu}(t)$라 하면, 자본자산의 가격결정의 소비·생산기저모형은 다음과 같다.

$$R^s(t)-r(t)$$
$$= \beta_c(t)[\ R^c(t)-r(t)] + \beta_\mu(t)[\ R^\mu(t)-r(t)] + \beta_{c\mu}(t)[\ R^{c\mu}(t)-r(t)] \quad (20)$$

위에서

$$\beta_c(t) = \beta_e(t); \quad (21)$$

$$\beta_\mu(t)=\frac{\sigma_s(t)^T\sigma_\mu(t)}{\sigma_e(t)^T\sigma_e(t)+\sigma_e(t)^T\sigma(t)+\sigma_e(t)^T\sigma_e(t)^T\sigma(t)}; \quad (22)$$

$$\beta_{c\mu}(t)=\frac{\sigma_c(t)^T\sigma_\mu(t)}{\sigma_e(t)^T\sigma_e(t)+\sigma_e(t)^T\sigma(t)+\sigma_e(t)^T\sigma_e(t)^T\sigma(t)} \quad (23)$$

여기에서 $\sigma_c(t)\sigma_\mu(t)$는 소비와 시장포트폴리오의 공분산이다.

(證明) 위의 모형의 도출에서 총소비의 증가율과 완전한 정의 상관관계를 갖는 포트폴리오 μ가 존재한다는 가정과 소비의 증가율과 자산의 수익율의 총량기대값이 총소비의 증가율과 완전한 정의 상관관계를 갖는 프트폴리오를 구성할 수 있다는 가정을 사용하면 용이하게 도출된다.9) (Q.E.D.)

위의 정리는 자본자산의 가격은 소비위험과 시장위험, 그리고 이 양자의 관계에서 발생되는 위험의 보상으로 정립되어야 한다는 점을 제시하고 있다. 자본자산의 가격은 세개 위험에 대한 프리미엄의 총화이다. 자산의 가격을 결정하기 위하여 가격화(pricing)되는 위험이 세개라는 것은 중요한 함의를 갖고 있다고 볼 수 있다. 자산의 가격은 소비와 자산시장에 의하여 결정된다. 소비와 자산시장은 독자적 행동영역과 서로 상대에게 영향을 미치는 상호작용 영역을 갖고 있다. 이 양자의 독립적 부분 영역에서 발생하는 체계적 위험이 소비위험모수와 시장위험모수로 표상된다. 상호작용 영역에서 생성되는 위험이 相生危險母數로 귀일된다.

현대 시장경제에 있어서는 소비시장과 자본시장은 별도의 시장인 것은 사실이지만, 이 양자는 소득을 매개로 하여 연결되어 있다. 소비위험과 시장위험은 통계적으로 유의하게 의존되어 있다.10) 이 의존성을 고려하면 소비의 위험에 대한 프리미엄과 자본자산이 거래되는 시장위험에 대한 프리미엄이 요구되며 이 두 요소 간의 상호작용에 의하여 발생되는 위험에 대한 프리미엄도 경제주체는 요구할 것이다. 이 두 요소 간의 상호작용은 소비기회집합과 투자기회집합의 상호작용을 의미하며 이 두집합들이 불리한 이동(unfavorable shift)을 야기하면 불리함을 극복하기 위한 헤지의 작용요소

9) 위험을 부담하는 행동을 다루는 모형들은 위험의 원천이 한개라는 가정을 취하고 있다. 그러나 실사회에서는 위험의 원천은 여러개이다. 위험들이 독립적이라고 해도 상호간에 작용을 하고 있다. 이와 같은 상호작용을 고려하지 않으면 최적 위험부담(optimal risk-taking)을 크게 잘 못 추정하는 이론적 모형이 정립된다. 자산들의 최적 포트폴리오를 산정할 때 인적자본(human capital)에 대한 위험을 고려하지 않으면 위험성 자산의 수요가 과대 추정된다. 따라서 위험성 자산의 가격은 과대 추정되고 주식의 프리미엄은 과소 추정된다.

10) 위험들이 통계적으로 독립적일 때 하나의 위험을 취하면 다른 위험을 취할 용의가 없거나 다른 위험을 받아 들이는데 썩 마음이 내키질 않을 것이다. 말하자면 독립적 위험들은 대체안으로 작용할 것이다. CAPM과 CCAPM은 소비위험과 자본시장위험이 통계적으로 독립된 것 처럼 무시적으로 가정하여 그 중 어느 하나만을 취한 것이다. 이것은 이 두모형이 정립되는 경제상태(economic setting)의 상정에서 기인한 것이다.

로서의 역할을 수행할 것이다.

이 모형은 증권의 변동성을 이론적 틀 속에서 정립하고 있다. 이점을 보기 전에 소비와 자산시장의 상호작용관계에서 도출되는 생성위험모수는 보다 경제적 해석과 추정이 용이한 모수로 변환시켜 보자. 국민경제의 총생산량을 Y(t)라 하자. 생산은 자본과 노동의 함수이므로 Y(t) = F(K, L)이다. 이 때 Y(t)는 Itô 과정으로 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$dY_t = \mu_y(K, L, t) + \sigma_y(K, L, t)dB_t \tag{24}$$

위에서 자본 K는 자본시장의 함수이고 소득은 노동 L과 자본시장의 함수이다. 소비가 소득의 함수이므로 결국 소비는 노동과 자본시장의 함수이다. 국민생산은 생산에 공헌한 분야로 분배되므로 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$dY_t = \mu_y(K, L,t) + \sigma_e(t)^T \sigma(t)dB_t \tag{25}$$

위에서 $\sigma_e(t)$와 $\sigma(t)$는 각각 소비와 자본시장의 "순간적 표준편차"이다. 왜냐하면 자본시장이 존재하는 시장경제에 있어서는 총생산은 소비와 "저축"으로 분배되며 저축은 모두 자본자산의 거래시장에 투자되기 때문이다.

위의 식 (24)과 (25)를 결합하면 다음을 얻는다.

$$\sigma_t(t) = \sigma_e(t)\sigma(t) \text{이므로}$$

$$\sigma(t) = [\ \sigma_e(t)]^{-1}\sigma_y(t) \tag{26}$$

위에서 $\sigma_y(t)$는 GDP 또는 GNP의 성장율을 의미한다. 위의 식 (26)을 식 (20) - (23)에 대입하면 다음의 정리를 얻는다.

[定理 5] 총소비증분의 순간적 변화율의 기대값을 $R^c(t)$, 시장포트폴리오의 순간적 수익률의 기대값을 $R^\mu(t)$, 그리고 국민총생산 또는 국내총생산의 순간적 변화율의 기대값을 $R^y(t)$라 하면, 자본자산의 가격결정의 소비·시장포트폴리오모형은 다음과 같다.

$$R^s(t) - r(t)$$
$$= \beta_c(t)[\ R^c(t) - r(t)] + \beta_\mu(t)[\ R^\mu(t) - r(t)] + \beta_\mu(t)[\ R^\mu(t) - r(t)] \quad (27)$$

위에서

$$\beta_c(t) \ = \ \frac{\beta_e(t)^T \sigma_e(t)}{\sigma_e(t)^T \sigma_e(t) + \sigma_e(t)^T \sigma(t) + \sigma_e(t)^T \sigma_y(t)}; \quad (28)$$

$$\beta_\mu(t) = \frac{\sigma_s(t)^T \sigma_\mu(t)}{\sigma_e(t)^T \sigma_e(t) + \sigma_e(t)^T \sigma(t) + \sigma_e(t)^T \sigma_y(t)}; \quad (29)$$

$$\beta_y(t) = \frac{\sigma_c(t)^T \sigma_\mu(t)}{\sigma_e(t)^T \sigma_e(t) + \sigma_e(t)^T \sigma(t) + \sigma_e(t)^T \sigma_y(t)} \quad (30)$$

위의 정리는 [定理 4] 보다 간편하며 해석이 한결 용이하다. 임의의 자산의 초과수익은 소비, 자본자산의 시장과 전체경제가 제시하는 위험들의 선형관계에 의하여 형성된다는 것이다. 시장과 소비 이외의 모든 상태변수에서 발생하는 위험은 전체경제의 위험으로 귀일(collapse)된다. 따라서 이와 같은 관계는 정합성(validity)를 갖는다. 경제내에 존재하는 체계적 위험은 소비의 위험, 소비와 자산시장의 상호작용에서 발생하는 위험과 소비와 국민생산의 의존성에 의하여 발생하는 위험의 합이다.

자본시장은 국민경제의 생산과정의 거울이고 생산과정은 자본시장의 거울이라는 관계를 갖고 있다. 소비는 일반 근로소득과 자본시장의 투자를 통하여 얻은 수익의

합계인 개인소득에 기초하여 이루어진다. 이와 같은 의미에서 자본자산의 거래시장과 소비의 상호작용은 국민생산의 성장으로 표시된다고 볼 수 있다. 이 생산모수가 자산가격의 변동성을 해명해 주는 변수이다. 자산의 가격은 소비위험모수와 시장위험모수에 의하여 결정된다. 자산가격의 변동성(volatility)은 소비위험에 대한 프리미엄과 시장위험에 대한 프리미엄에서 발생하고 있다는 점을 부인할 수 없다. 그러나 변동성이 이 양자가 단독적으로 미치는 영향의 단순한 합에 의하여 발생한다고 보기에는 그 양이 너무 크다. 이 두요소의 단독적 영향 이외에 변동성을 야기시키는 요소가 발견되어야 비로서 변동성의 해명을 적절히 수행할 수 있다. 이 제삼의 요소가 바로 소비집합과 투자기회집합의 의존성에서 발생되는 위험이다.

Kimball (1990, 1993)에 의하면 加算的 時間分離效用이 구비된 이시적 맥락에서는 $-u'''/u''$이 예비적 저축동기의 강도를 측정해 주고 있다는 점을 제시하고 있다. 이것은 위험이 손실의 악화(loss aggravation)을 야기시키고 있어 이 악화를 극복하기 위하여 저축동기의 강도화가 연유한다고 할 수 있다. 연속시간경제에 있어서는 소비와 포트폴리오를 연속적으로 조정할 수 있으므로 손실의 악화에 대한 장치가 필요하다. 모형의 정립과정에서 u''/u'만이 명시적으로 도입되었지만 u'''/u''은 묵시적으로 도입되어 있다고 볼 수 있다. u''이 명시적으로 방정식에 존재하고 있어 이 u''를 통하여 u'''/u''의 요소가 반영되어 있으며 이 영향이 공분산항에 묵시적으로 반영되어 있는 것이다.

Pischke (1995)에 의하면 개인소득은 총량에 의하여 산출된 1인당 소득보다 변동성이 크다. 따라서 총량에 대한 정보는 개인의 소비결정에 중요성을 갖고 있지 못하다. 평생소비사이클(life cycle)에 의하여 소비행동을 결정하는 경우 경제주체는 자신의 소득과정에 최적으로 대응하여 소비를 결정한다. 경제전반에 걸친 정보는 등한시한다. 이에 따라 소비자는 총량소득의 변동(variation)에 거의 반응하지 않게 된다. 총량소비는 과도하게 미끄럽다(excessively smooth). 총량정보는 소비에 느린 속도로 반영된다. 총량소비는 시차소득(lagged income)과 상관성을 갖고 있다. 따라서 CCAPM은 개인데이타에는 적절하지만 총량데이타에는 부적절하다 하겠다. 본 논문에서 정립

된 모형은 이와 같은 점을 반영한 모형이라고 할 수 있다.

Constantinides (1990)와 Heaton (1995)은 habit persistence가 변동성을 증가시키고 있다는 점을 제시하고 있다. Hindy와 Huang (1992)은 국부적 대체(local substitution)가 변동성을 증가시키고 있다는 점을 증명하였다. 국부적 대체와 habit persistence는 소비집합의 이동을 야기시킨다. Habit persistence는 한계대체율이 큰 변동성(volatility)를 갖도록 만드는 효과를 갖고 있다. 국부적 대체가 발생하면 현재의 소비를 억제하고 인접한 시점에 소비를 증가해도 경제주체의 만족도가 변하지 않게 되므로 소비의 지연은 자본시장에 영향을 미치게 되며, habit persistence도 일종의 "국부적 대체"에 의하여 형성되므로 동일한 효과를 창출한다. 소비집합과 투자기회집합이 의존관계와 상호작용을 갖게 된다. 따라서 의존위험은 국부적 대체와 habit persistence에서 생성되는 위험을 포함한다.

그런데 위의 분석에서는 식 (8)에서 $\sigma_e(t)^T\sigma(t)$가 존재한다는 가정 위에서 자산가격을 결정하는 위험인자를 밝혔다. $\sigma_e(t)^T\sigma(t)$에서 소비와 자산시장의 상호의존성이 존재하지 않는다고 자정하다. 이때에도 定理 1의 條件에 의하여 $p_t = \bar{u}_c(e_t,t)$이다. Itô 보조정리에 의하여 p도 균형에서 Itô 과정을 형성한다. 따라서 다음의 확률미분형태로 쓸 수 있다.

$$dp_t = \mu_p(t)dt + [\ \bar{u}_{cc}(e_t,t)\sigma_e(t) + \bar{u}_{cc}(e_t,t)\sigma(t)]\ dB_t \tag{31}$$

Itô 보조정리에 의하여

$$dS_t = [\ p_t\hat{\mu}(t) + \hat{S}_t\mu_p(t) + \hat{\sigma}(t)^T\bar{u}_{cc}(e_t,t)\sigma_e(t) + \hat{\sigma}(t)^T\bar{u}_{cc}(e_t,t)\sigma_t]\ dt + \bar{\sigma}(t)dB_t \tag{32}$$

따라서 다음을 얻는다.

$$p_t\delta_t + p_t\hat{\mu}_t(t) + \hat{S}_t\mu_p(t) + \hat{\sigma}(t)^T\bar{u}_{cc}(e_t, t)\sigma_e(t) + \hat{\sigma}(t)^T u_{cc}(e_t, t)\sigma(t) = 0 \quad (33)$$

그런데 $p_t = \bar{u}_c(e_t, t)$이므로 (33)은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\delta_t + \hat{\mu}(t)\hat{S}_t\frac{\mu_p(t)}{p_t} + \frac{1}{p_t}\hat{\sigma}(t)\bar{u}_{cc}(e_t, t)\sigma_e(t) + \frac{1}{p_t}\hat{\sigma}(t)\bar{u}_{cc}(e_t, t)\sigma(t) = 0 \quad (34)$$

위의 식 (34)에 의하여 상관성이 존재하지 않을 때, 경제주체의 소비와 시장의 행동이 동시에 고려·반영된 자본자산의 가격은 다음 식에 의하여 결정된다.

$$\hat{\mu}(t) + \delta(t) - r_t\hat{s}_t = -\frac{\bar{u}_{cc}(e_t, t)}{\bar{u}_c(e_t, t)}[\ \hat{\sigma}(t)^T\sigma_e(t) + \hat{\sigma}(t)^T\sigma(t)] \quad (35)$$

식 (35)는 R_t에 대한 정의에 의하여 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$R_t\hat{S}_t - r_t\hat{S}_t = -\frac{\bar{u}_{cc}(e_t, t)}{\bar{u}_c(e_t, t)}[\ \hat{\sigma}(t)^T\sigma_e(t) + \hat{\sigma}(t)^T\sigma(t)]$$

이 식을 $\hat{S}_t$에 대한 정의를 사용하여 $\hat{S}_t$를 제거할 수 있으므로 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$R_t - r_t = -\frac{\bar{u}_{cc}(e_t, t)}{\bar{u}_c(e_t, t)}[\ \sigma_s(t)^T\sigma_e(t) + \sigma_s(t)^T\sigma(t)] \quad (36)$$

동태적 생성조건에 의하여 $\sigma_s(t) = \sigma_e(t)$를 갖는 식 (36)을 만족시키는 증권이 존재한다고 가정할 수 있다. 이 증권의 총실질초과기대수익률을 R_t^e로 표시하면 식 (36)에 의하여 다음을 얻을 수 있다.

$$-\frac{\bar{u}_{cc}(e_t,t)}{\bar{u}_c(e_t,t)} = \frac{R_t^e - r_t}{[\ \sigma_e(t)^T\sigma_e(t)+\sigma_e(t)^T\sigma(t)]}$$

위의 식을 식 (36)에 대입하면 다음 식이 정립된다.

$$\begin{aligned} & R^s(t) - r(t) \\ &= \left[\ \frac{\sigma_s(t)^T\sigma_e(t)}{\sigma_e(t)^T\sigma_e(t)+\sigma_e(t)^T\sigma(t)} + \frac{\sigma_s(t)^T\sigma(t)}{\sigma_e(t)^T\sigma_e(t)+\sigma_e(t)^T\sigma(t)}\right] [\ R_t^e - r_t] \end{aligned}$$

이제 임의의 증권에 대하여 다음과 같이 정의하자.

$$\beta'(t) = \frac{\sigma_s(t)^T\sigma_e(t)}{\sigma_e(t)^T\sigma_e(t)+\sigma_e(t)^T\sigma(t)};$$

$$\beta'_m(t) = \frac{\sigma_s(t)^T\sigma(t)}{\sigma_e(t)^T\sigma_e(t)+\sigma_e(t)^T\sigma(t)};$$

위의 정의를 식 (36)에 대입하면 소비와 자산시장의 관련성이 존재하지 않을 때 형성되는 CPCAPM을 얻게 된다. 즉, 임의의 증권에 대하여

$$R_t - r_t = [\ \beta_e(t) + \beta_m(t)]\ [\ R_t^e - r_t] \tag{37}$$

$\beta_e(t)$는 일종의 소비베타이다. 경제전체를 소비의 관점에서 파악할 때 발생하여 존재하는 총위험 가운데 증권과 소비와의 공분산으로 표현되는 위험이 차지하는 비율이다. 그리고 R_t^e는 총소비증분의 순간적 변화율의 기대값이다.

총소비 증가율과 완벽한 正의 상관관계를 갖는 증권이나 포트폴리오 μ가 존재하며 $R_t^e = R_t^\mu$가 된다. 그리고 $\beta_m(t)$는 다음과 같이 변환된다.

$$\beta_\mu(t) = \frac{\sigma_s(t)\sigma(t)}{\sigma_k(t)^T\sigma_k(t) + \sigma_k(t)^T\sigma(t)}$$

위의 식은 자본시장을 중심으로 하여 전개되는 총위험 가운데 증권과 자본시장과의 공분산으로 표상되는 위험이 차지하는 비율이다. 따라서 이것을 일종의 시장위험이라고 정의할 수 있다. 따라서 식 (37)은 다음과 같이 변형된다.

$$R_t^s - r_t = \beta_c(t)(R_t^e - r_t) + \beta_\mu(t)(R_t^\mu - r_t) \tag{38}$$

위의 식 (38)은 소비와 자본자산이 거래되는 시장이 상호작용을 하지 않는 경우에 성립되는 모형이다.

VI. 消費・生産基底模型과 旣存模型

소비기저모형은 소비가 미끄러운 형태(smooth pattern)를 갖고 있어 소비베타의 변동성이 적어 자본시장의 변동성을 해명하는데 실패하고 있다. CAPM은 변동성을 유지하고 있으나 단일기간에서 가격과 위험과의 관계로 비선형인 바, 선형으로 정립되어 현실을 제대로 반영하지 못하고 있다. 그러나 소비・생산기저모형은 이 문제들을 해

결해 주고 있다.

CCAPM에 있어서는 임의의 증권의 기대 순간적 초과수익률은 이 초과수익과 총량소비의 증가와 순간적 공분산의 배수(multiple)에 의존하는 바, 이 배수는 모든 증권에 공통적이다. 이 공통적 배수가 대표적 경제주체의 Arrow-Pratt의 위험기피척도이다. Arrow-Pratt의 기대위험기피계수 E(-u''/u')는 CAPM, CCAPM과 ICCAPM의 형태를 확정하기 위하여 효용함수로 부터 유도된 근본 방정식들에 다같이 도입되어 존재하는 항목이다. 이 세모형의 도출을 가능케 하는 근본방정식들을 제시하여 그 의미를 천착하고 소비·생산기저모형과의 연관성을 검토해 본다.

1. 資本資産의 價格決定을 위한 模型의 根本方程式

A. 資本資産 價格決定模型

포트폴리오를 형성하여 보유하는 기간이 단일기간이면, 이 단일기간 말에 기업은 청산배당(liquidating dividend)을 지급하게 되고, 소비는 총량적 富(aggregate wealth)와 동일하게 된다. 모든 배당의 합계가 富(w)가 되고 동시에 소비가 된다. 따라서 기대수익은 다음과 같은 근본방정식으로 표현된다.

$$R^s(t) = -\frac{E[\ u_{ww}(w)]}{E[\ u_w(w)]} \cdot \mathrm{cov}[\ R_s(t), w(t)]$$

그러므로 기대초과수익은 초과수익과 기말의 富와의 공분산, 즉 초과수익과 시장포트폴리오와의 공분산에 비례한다.

시장이 완비적(complete)이면 이질적 경제주체를 대상으로 하여 얻은 균형가격과 총량소비(aggregate consumption)는 이질적 경제주체들이 소유하고 있는 endowment들의 합을 endowment로 갖고 있는 대표경제주체(representative agent)를 상정하여 얻게 되는 균형가격과 총량수요와 동일하다.

B. 消費베타模型

소비베타모형에서는 기대초과수익은 자산의 수익과 소비와의 공분산, 즉 소비베타에 비례한다. 소비베타는 $cov(r_i^t, c^t)/var(c^t)$이다. 소비베타의 정의에 있어 소비는 소비의 변화로 대체할 수 있으며 소비의 성장률로도 대체가 가능하다. 이와 같은 대체를 수행하여도 모형의 결과는 변동하지 않는다. 소비·가격과정이 $dp_t = \mu_p(t) + \sigma_p(t)dB_t$이면 다음의 근본방정식을 얻는다.

$$R^s(t) = \frac{E[\ \bar{u}_{cc}(t)]}{E[\ \bar{u}_c(t)]} \cdot cov[\ R^s(t), c(t)]$$

C. 異時的 資産價格決定模型

연속시간의 순수교환경제에서 상태변수들이 존재하여 이 변수들이 Itô 과정을 따르고 $d\theta = \mu_t(\theta; t)dt + \sigma_\theta(\theta, t)dB_t$의 형태를 취하면, 다음의 이시적 근본방정식을 얻는다.

$$R^s(t) = \sum_{j=1}^{m} - \frac{E(u_{cc}^t, \hat{c}_j^t)}{E(u_c^t)} \cdot cov[\ \theta_j(t), R^s(t)]$$

위의 이시적 모형은 상태변수를 인지(identification)하게 되면 경제적 중요성을 갖게 된다. 단일기간모형이면 기말의 수요와 기말의 富가 동일하므로 富가 유일한 상태변수이다. 따라서 단일기간에 있어서는 이시적 모형의 형태와 자본자산의 가격결정모형의 형태가 동일하게 된다. Merton (1973)은 무위험 수익률이 확률적이면 이 투자가에게 불리하게 움직일 수 있는 위험이 존재하게 되며 투자자는 이 위험을 헤지하려는 투자활동을 전개한다고 주장한다.

수익이 확률적인 무위험 자산과 완벽한 陰의 상관을 갖도록 포트폴리오를 구성하

여 보유하게 된다. 따라서 이 포트폴리오와 무위험 자산과 시장 포트폴리오라는 세개 펀드(fund)에서 선택하는 포트폴리오를 갖게 되어 3개 펀드 分離(three-fund separation)의 정리를 얻게 된다. 이 경우에는 다음의 이시적 모형을 얻게 된다.

$$R^s(t)-r(t) = \gamma_1[R^m(t)-r(t)] + \gamma_2[R^N(t)-r(t)] \tag{59}$$

단, $\gamma_1 = \dfrac{\beta_{jm}-\beta_{jN}\beta_{Nm}}{1-\rho^2_{Nm}}$

$$\gamma_2 = \frac{\beta_{jN}-\beta_{jm}\beta_{Nm}}{1-\rho^2_{Nm}}$$

ρ_{Nm} = 포트폴리오 N과 시장포트폴리오와의 상관계수

Fama (1970)는 이시적 맥락 속에서 상태변수의 원천으로 3개를 지적하고 있다. 첫째 원천은 상태의존적 직접효용이다. 둘째 원천은 소비재들의 상대가격이다. 여러 종류의 재화에 대한 소비의 효용은 장바구니(basket goods)의 소비의 간접효용(indirect utility)을 의미하며, 간접효용은 상태변수에 의존하며 이 상태변수는 이 재화들의 상대가격을 의미한다. 세째 원천은 변화하는 투자기회 집합이다. 상태변수로 가능한 것은 이질적 소비자들 사이의 富의 分布이다. 그러나 앞에서 언급한 바와 같이 이질적 소비가 존재하는 경제의 균형은 대표적 소비자가 한사람 존재하는 경제의 균형과 동일하므로 소비자들 간의 富의 分布는 redundant state variable이다. 다른 가능치로서는 배당과 aggregate endowment의 진행(evolution)이다.

Fama의 이와 같은 주장을 받아 들이면 다음과 같은 논의가 가능할 것이다. 즉, 상태 의존적 직접효용은 시장포트폴리오를 보유하고 이 포트폴리오로 부터 발생하는 수익에 의존하여 소비를 이룩하려고 할 것이다. 이 경우 위험은 시장포트폴리오에서 발생한다. 간접효용은 시장바구니의 소비에 의하여 달성된다. 이 때 발생되는 위험은 총량소비(agrregate consumption)에 의하여 발생한다. 세째 원천은 변화하는 투자기회집

합이다. 자본시장을 기초자산시장(underlying assets market)과 이 기초자산에서 도출되는 導資産 또는 파생자산시장(derivatives market)으로 분리될 수 있다고 가정하자. 기초자산시장에서 투자행동을 전개하고 있는 투자자는 이 자산들의 투자기회집합의 변동은 導資産들에 의하여 헤지하려고 할 것이다. 이 경우에 발생하는 위험은 導市場의 위험이다. 따라서 자산의 기대수익은 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$R^s(t)-r(t) = \beta_c[R^c(t)-r(t)] + \beta_m[R^m(t)-r(t)] + \beta_d[R^d(t)-r(t)] .$$

위에서 $R^c(t)$는 총량소비 또는 총량소비의 증가율이고 $R^d(t)$는 파생시장의 시장포트폴리오의 기대수익이다. 그런데 배당이나 endowment는 자본시장과 소비재시장을 연결시켜 주는 변수이므로 이 양자간의 공분산을 위험으로 인식하면 위 식은 다음과 같이 변형된다.

$$R^s(t)-r(t) = \beta_c[R^c(t)-r(t)] + \beta_M[R^m(t)-r(t)] + \beta_{cm}[R^\delta(t)-r(t)]$$

위에서 R^δ는 기대총량 배당수익률이다.

2. 消費·生産基底模型의 틀 속에서의 旣存 模型의 解析

A. 消費베타模型

前節에서 정립한 식 (17)을 검토해 보자. 분석을 용이하게 하기 위하여 다시 제시하면 아래와 같다.

$$R^s(t)-r(t) = -\frac{\bar{u}_{cc}(e_t,t)}{\bar{u}_c(e_t,t)}[\sigma_s(t)^T\sigma_e(t)+\sigma_s(t)^T\sigma_t+\sigma_s(t)^T\sigma_e(t)^T\sigma(t)] \quad (17)$$

위 식에서 資本資産이 거래시되는 시장에 대하여 투자자가 perfect foresight를 갖고

있다면 네모괄호안의 마지막 두항은 사라진다. 따라서 이 식은 다음과 같이 변형된다.

$$R^{s}(t)-r(t) \ = \ -\frac{\bar{u}_{cc}(e_t,t)}{\bar{u}_{c}(e_t,t)}[\ \sigma_s(t)^{T}\sigma_e(t)]$$

위의 식은 곧 Breeden (1979)의 전통적인 베타소비모형이다. CCAPM에서는 경제주체가 무위험자산 뿐만 아니라 시장포트폴리오와 有限次元過程 {Y(t)}와 가장 높은 상관성을 갖는 포트폴리오들을 보유한다. 시장포트폴리오는 사회적 위험(social risk)에 대하여 헤지(hedge)하고 상관성 포트폴리오들은 소비와 투자기회집합의 변화에 대하여 헤지를 한다.

베타소비모형은 평생의 소비를 마음에 두고서 시간의 흐름에 걸쳐 미끄러운 소비형태(smooth pattern of consumption)를 유지하기 위하여 투자활동을 전개한다. 이 때 자본자산의 시장에서 형성되는 투자기회의 집합이 투자자에게 불리하는 변동을 제거하기 위하여 endowment를 효율적으로 이용하게 된다. 모델경제가 연속시간의 관점에서 형성되고 있는 만큼, 불리하게 변동 이동하는 투자기회집합에 대하여 endowment process를 이용하여 투자자에게 유리한 방향으로 헤지를 이룩할 수 있다. 이와 같은 의미에서 이 시장에서는 perfect foresight가 형성된다. 그리고 합리적 기대형성이론(rational expectations theory)에서는 이점을 강조하고 있으며, 이와 같은 관점네서 정책의 중립성(policy neutrality)이 형성되고 있음을 극명하게 보여 주고 있다. 시장에 대하여 perfect foresight를 갖는다는 것은 투자자가 자본자산의 시장에서 이미 설정한 목표를 달성하기 위하여 dynamic portfolio insurance를 형성시키고 동태적 환경 속에서 연속적으로 portfolio insurance를 조정해 나간다는 것을 의미한다. Black-Scholes의 option 모형에서와 같이 일종의 "risk neutral valuation"의 관점에서 dynamic portfolio insurance가 형성되는 투자전략을 구사하여 위험을 제거하는 투자활동을 전개해 나간다는 것이다.

소비의 한계효용과 이 富의 한계효용과 연결(connect) 되지 않으면 CCAPM은 성립되지 않는다. 따라서 소비의 한계효용과 부의 한계효용이 연속적으로 연결되는 장

치가 CCAPM에 구비되어 있다. 그렇다면 소비의 한계효용에만 관심을 두면 자본시장에서 발생되는 富의 한계효용은 자동적으로 통제와 조정이 이룩될 것이다. 이와 같은 경우에 경제주체는 소비에만 관심을 갖게 되고 자본자산의 거래시장은 여건으로 간주할 것이다. 순간적 소비의 한계효용과 富의 한계효용이 일치하지 않으면 CAPM이 성립한다.

B. 資本資産價格決定模型

투자자가 소비에 대하여 perfect foresight를 갖고 있으면 식 (17)에서 네모괄호안에 있는 첫항과 마지막 항은 소멸한다. 이 때 식 (17)은 다음과 같이 된다.

$$R^s(t)-r(t) = -\frac{\bar{u}_{cc}(e_t,t)}{\bar{u}_c(e_t,t)}[\ \sigma_s(t)^T\sigma(t)] \tag{61}$$

말하자면 연속시간의 경제내에서 성립하는 자본자산의 가격결정모형이다. 따라서 CAPM은 소비에 대하여 perfect foresight를 형성하는 합리적 투자자가 존재할 때 성립하는 자산가격의 결정모형이다. 이 모형에서는 자산의 투자에서 발생하는 수익의 합계가 곧 소비가 된다. 이와 같은 의미에서 투자자·소비자는 perfect foresight를 갖는다는 것이다.

Hindy와 Huang (1993)은 경제주체가 국부적 대체(local substitution)를 갖고 있다는 점을 밝히고 있다. 시간적으로 인접한 경우에 있어 이 인접한 시간에 있어서의 소비는 거의 완벽한 대체(almost perfect substitute)가 가능한 것이 국부적 대체(local substitution)인 바, 짧은 기간 동안에 있어 소비를 연기시키거나 미리 소비하는 것은 만족에 별 영향을 미치지 못한다. 말하자면 경제주체는 인접한 날들의 소비를 매우 유사한 대안들(very similar alternative)로 보고 있다. 경제주체가 국부적 대체성을 갖는 선호를 갖을 때 덜 위험 기피적 방법으로 투자를 수행하여 자신의 富 중 보다 높은 비율을 위험성 자산에 투자한다. 자신의 富가 critical level 이하로 하락하면 소비를 자제한다. 경제주체가 이와 같이 국부적 대체를 갖거나 국부적 대체를 중요한 요

소로 하여 형성되는 habit persistance에서 소비 보다는 자본시장에 관심의 초점이 주어질 것이다.

단일기간모형으로 CAPM이 정립되면 위에서 지적한 바와 같이 수익의 총합계가 곧 富가 되고 동시에 총소비가 되므로 소비를 perfect foresight의 관점에서 파악하고 모든 경제활동을 자산에 대한 투자활동에 집중하게 되는 것이다. CAPM을 도출하기 위한 가정들을 면밀히 검토해 보면 이와 같은 결론에 이르게 된다. 이것은 모형의 정립기간이 단일기간이라는 속성에서 자연스럽게 유도되는 성질인 것이다.

C. 異時的 模型

Merton (1973)의 모형을 살펴 보자. 이 모형에서 $\hat{c}_t$는 상태변수 θ들의 함수이다. 이 상태변수로서 시장포트폴리오만 존재한다면 Merton의 근본방정식은 연속시간의 경제에서 성성되는 CAPM으로 단순화된다. 말하자면 소비는 perfect foresight의 관점에서 형성된다. 왜냐하면 투자에서 발생되는 모든 수익의 합이 곧 富가 되고 이 富를 모두 소비하기 때문이다. 그런데 $\hat{c}_t$가 소비만의 함수이면 근본방정식은 소비베타모형으로 변환된다. $\hat{c}_t$가 소비만의 함수라는 것은 자본자산의 시장에 대하여 투자자가 perfect foresight를 형성할 때 가능해 진다.

Chamberlain (1988)는 市場富와 과거 평균소비와의 관계를 규명하고 있다. 어떤 확률과정 S가 총량소비의 충분통계량 (sufficient statistic)이라 하자. 즉, 시점 T에 있어 총량소비의 조건부 분포는 S_t를 통하여서만 시점 t의 정보에 의존한다. 이때에는 市場 富(market wealth)와 가치함수의 富 導函數(wealth derivative)는 모두 국부적으로 완전 상관관계를 갖는다. 증권의 국부적 기대수익(local mean return)은 시장포트폴리오의 수익과 이 수익의 국부적 공분산과 선형의 관계를 갖는다. 이 경우에는 異時的 CAPM이 유도되며 가치함수는 富, 과거평균소비와 시간에 의존한다. 富가 과거평균소비에 비해 상당히 높으면 경제주체는 富를 소비로 변형시키고 반대로 富가 과거평균소비에 비해 낮으면 부를 축적하기 위하여 소비를 삼가고 과거의 소비에서 도

출되는 만족을 즐길 것이다.

본 논문에서 전개된 모형은 Merton의 이시적 모형과 동일한 결론에 이르게 된다.[11] 그러나 모형상에 뚜렷한 차이가 있다. Merton의 이시적 모형이 일반적인 상태변수들의 선형관계에 의하여 정립되고, 이 상태변수들의 인식·인지·선택의 방법을 제시하지 못하고 있는 반면, 본 논문에서 정립된 모형은 위험의 인자인 베타를 위험이 발생하는 원천을 분명하게 밝히고, 체계적 위험의 구성인자를 각 원천별로 밝혔다는데 큰 차이가 있다.

VII. 결 론

자본자산의 가격은 체계적 위험에 의하여 결정된다. 경제주체는 체계적 위험을 받아드리는 대신 이 체계적 위험에 대한 프리미엄을 요구한다. 본 논문에서는 체계적 위험이 소비위험모수, 시장위험모수와 생산위험모수에 의하여 결정된다. 이 세 개 모수가 가격화되는 체계적 위험인 것이다. 따라서 자본자산의 기대초과수익은 이 세 개 모수의 선형함수로 표시되고 있다. 이 세 개 모수에 의하여 위험에 대한 프리미엄이 결정된다. 이 논문에서 정립된 모형은 CAPM의 가정을 도입하면 CAPM으로 귀일하고, CCAPM의 가정을 전제로 하면 CCAPM으로 전환된다. 이와 같은 관점에서 이 모형은 robust하다고 할 수 있다.

자본자산의 가격은 세 개의 위험에 대한 프리미엄의 총화임이 도출되었다. 자산의 가격을 결정하기 위하여 가격화(pricing)되는 체계적 위험이 세개라는 것은 중요한 함의인 것이다. 자산의 가격은 소비와 시장에 의하여 결정된다. 소비와 시장은 자체의 독립적 영역과 서로 상대에 대하여 상호작용하는 영역을 갖는다. 독립적 영역에서 생

---

11) Merton (1973)의 이시적 모형은 Fama (1970)의 인식방법을 따르면서 상태가 세개만 존재하는 그의분석을 받아들일 때 3개의 베타로 구성되는 자산가격결정모형으로 단순화되고 동시에 베타위험의 상태변수가 인지된다는 점을 위에서 제시한 바 있다. Merton의 모형에서 소비와 시장포토폴리오를 동시에 고려한다면 이 두 베타로 구성되는 모형을 얻게 되는 바, 식 (59)에서 N을 C로 대체하면 얻게 되는 모형이다.

성되는 위험이 소비모수와 시장모수로 표상되며, 이 양자의 상호작용관계가 생산모수로 귀일한다. 이 모형은 자본시장의 변동성을 충분히 해명할 수 있는 새로운 가격결정모형이다. 자본자산의 가격이 소비위험모수, 시장위험모수와 생산위험모수에 의하여 결정된다는 사실은 이 모형이 시장에 존재하는 변동성(volatility)을 비롯하여 이상현상과 기존모형의 현실과의 괴리를 이론적으로 설명할 수 있다는 의미에서 중요성을 갖는다.

참 고 문 헌

具本烈, "資産價格決定의 生産基底模型에 대한 實證的 檢證," 財務管理硏究 第10卷 第2號, (1993), 117-136.

李逸均, "租稅를 고려한 資本資産의 價格決定을 위한 異時的 模型," 經營學硏究, 第17卷 第2號, (1988), 149-173.

李周熙 · 南周度, "GMM을 이용한 資本資産價格決定模型의 推定," 財務管理硏究, 第9卷 第2號, (1992), 57-75.

黃善雄 · 李逸均, "資本資産포트폴리오의 效率性에 대한 多變量 檢證," 證券學會誌 第13輯, (1991), 357-401.

Arnold, L., *Stochastic Differential Equations: Theory and Applications*. New York: John Wiley & Sons, (1974).

Breeden, D., "An Intertemporal Asset Pricing Model with Stochastic Consumption and Investment Opportunity," *Journal of Financial Economics* 7, (1979), 265-296.

Campbell, J. Y., "Understanding Risk and Return," *Journal of Political Economy* 104, (1996), 298-345.

Chamberlain, G., "Asset Pricing in Multiperiod Securities Markets," *Econometrica* 56, (1988), 1283-1300.

Constantinides, G. M., "Intertemporal Asset Pricing with Heterogeneous Consumers and Without Demand Aggregation," *Journal of Business* 55, (1982), 253-267.

Constantinides, G. M. and D. Duffie, "Asset Pricing with Heterogeneous Consumers," *Journal of Political Economy* 104, (1996), 219-240.

Cox, J. C. and C. Huang, "Optional Consumption and Portfolio Policies when

Asset Prices Follow a Diffusion Process," *Journal of Eonomic Theory* 49, (1989), 33-83.

Dellacherie, C., and P. Meyer, *Probabilities and Potential B: Theory of Martingales.* New York: North-Holland Publishing Company, (1982).

Detemple, J. B. and F. Zapatero, "Asset Prices in an Exchange Economy with Habit Formation," *Econometrica* 59, (1991), 1633-1657.

Duffie, D., "Stochastic Equilibria: Existence, Spanning Number, and the 'No Expected Gains From Trade' Hypothesis," *Econometrica* 54, (1986), 1161-1184.

Duffie, D. and C. Huang, "Implementing Arrow-Debreu Equilibria by Continuous Trading of Few Long-Lived Securities," *Econometrica* 53, (1985), 1337-1356.

Duffie D. and W. Zame, "The Consumption-Based Capital Asset Pricing Model," *Econometrica* 57, (1989), 1279-1297.

Epstein, L. G. and T. Wang, "Intertemporal Asset Pricing under Knightian Uncertainty," *Econometrica* 62, (1994), 283-322.

Fama, E. F., "Multiperiod Consumption-Investment Decisions," *American Economic Review* 60, (1970), 163-174.

Gollier, C. and J. W. Pratt, "Risk Vulnerability and the Tempering Effect of Background Risk," *Econometrica* 64, (1996), 1109-1123.

Grossman, S. J. and G. Laroque, "Asset Pricing and Optimal Portfolio Choice in the Presence of Illiquid Durable Consumption Goods," *Econometrica* 58, (1990), 25-51.

He, H. and D. M. Modest, "Market Frictions and Consumption-Based Asset Pricing," *Journal of Political Economy* 103, (1995), 94-117.

Heaton, J., "An Empirical Investigation of Asset Pricing with Temporally

Dependent Preference Specifications," *Econometrica* 63, (1995), 681-717.

Hindy, A. and C. Huang, "Intertemporal Preferences for Uncertain Consumption: A Continuous Time Approach," *Econometrica* 60, (1992), 781-801.

Hindy, A. and C. Huang, "Optimal Consumption and Portfolio Rules with Durability and Local Substitution," *Econometrica* 61, (1993), 85-121.

Huang, C., "Information Structure and Equilibrium Asset Prices," *Journal of Economic Theory* 35, (1985), 33-71.

Huang, C., "An Intertemporal General Equlibrium Asset Pricing Model: The Case of Diffusion Information," *Econometrica* 55, (1987), 117-142.

Jacod, J., *Calcul Stochastique et Problêmes de Martingales, Lecture Notes in Mathematics*, No. 714, Berlin: Springer-Verlag, (1979).

Karatzas, I. and S. Shreve, *Brownian Motion and Stochastic Calculus*, Berlin: Springer-Verlag, (1991).

Kimball, M. S., "Standard Risk Aversion," *Econometrica* 61, (1993), 589-611.

Kunita, H. and S. Watanabe, "On Square Integrable Martingales," *Nagoya Mathematics Journal* 30, (1967), 209-245.

Lintner, J., "The Valuation of Risk Assets and the Selection of Risky Investments in Stock Portfolios and Capital Budgets, *Review of Economics and Statistics* 47, (1965), 13-37.

Lucas, R. E., Jr., "Asset Prices in an Exchange Economy," *Econometrica* 46, (1978), 1429-1445.

MacKinlay, A. C., "Multifactor Models Do Not Explain Deviations from the CAPM," *Journal of Financial Economics* 38, (1995), 3-28.

Mehra, R. and E. C. Prescott, "The Equity Premium: A Puzzle," *Journal of Monetary Economics* 15, (1985), 145-161.

Merton, R., "An Intertemporal Capital Asset Pricing Model," *Econometrica* 41, (1973), 867-888.

Meyer, P., *Probability and Potentials,* Blaisdell Publishing Company, (1966).

Pischke, J. S., "Individual Income, Incomplete Information, and Aggregate Consumption," *Econometrica* 63, (1995), 805-840.

Protter, P., *Stochastic Integration and Differential Equation: A New Approach,* Berlin: Springer-Verlag, (1990).

Radner, R., "Existence of Equilibrium of Plans, Prices and Price Experctations in a Sequence of Markets," *Econometrica* 40, (1972), 289-303.

Revuz, D. and M. Yor, *Continuous Martingales and Brownian Motion,* Berlin: Springer-Verlag, (1991).

Rhee, Il King, "An Incomplete Information Structure and an Intertemporal General Equilbrium Model of Asset Pricing with Taxes," *Korean Journal of Financial Management* 8, (1991), 165-208.

Rhee, Il King, "Empirical Tests of the Consumption-Based Asset Pricing Model by Estimating the Risk Aversion Coefficient in the Korean Economy," *Research in International Business and Finance* 11A, (1994), 181-215.

Sharpe, W., "Capital Asset Prices: A Theory of Market Equilibrium under Conditions of Risk," *Journal of Finance* 19, (1964), 425-442.