The Journal of Natural Science,
Pai Chai University, Korea
Volume 7: 5~9, 1995

되돌이 본뜨기를 이용한 Lorenz식의 혼돈제어

김칠민, 조창호, 박종대
배재대학교 물리학과

Controlling Chaos of Lorenz Equation by Using Return Map

Chil-Min Kim, C.H. Cho, and J.D. Park
Department of Physics, Pai-Chai University

되돌이 본뜨기를 이용하여 Lorenz 식에서 생기는 혼돈을 제어하였다. 그 결과 조그만 섭동에 의해 Lorenz 식에서의 혼돈은 OGY 혼돈제어법에서 할 수 있는 것과 동일한 불안정 주기 1T, 2T, 3T로 각각 제어되었고 이때의 위상도 안정화 되었다.

We have controlled the chaotic output of Lorenz equation by using a return map. By applying small perturbations, the chaotic temporal behaviors and phase diagrams have been stabilized to period-1T, -2T, -3T which are unstable fixed points respectively as the same behaviors as the OGY method.

Keywords : Chaos, Control, Lorenz Equation, Return Map

1. 서론

혼돈 제어법은 최근 혼돈도 제어할 수 있다는 새로운 이론들이 밝혀짐에 따라 이것들을 어떻게 제어할 것인가에 대한 많은 이론과 실험들이 이루어 졌다[1,2]. 과거에는 혼돈은 비선형적인 특성으로 인하여 초기치에 매우 민감하게 반응하기 때문에 그 제어는 불가능하다고 생각했으나 최근 Ott, Grebogi, Yorke (OGY) 등에 의해 혼돈의 기이한 끌개 내부에 존재하는 다양한 수렴다양체 (manifold) 구조 안에 있는 안정 (stable) 수렴다양체 속으로 혼돈을 제어함으로서 혼돈의 제어가 가능함을 밝혔다[2]. 수렴다양체는 안정 수렴다양체와 불안정 수렴다양체가 서로 만나고 있는데 이때 안정 수렴다양체 위로 궤도가 진행할 수 있도록 조그만 간섭을 주어 계속 그 위에 머물 수 있게 해주면 궤도는 수렴 다양체들이 만드는 위상공간 즉 불안정 궤도 위로 안정화 되게 된다. 이런 OGY방법에 의한 혼돈제어 방법들이 최근 이론적으로나 실험적으로 연속적으로 발표되었고 그 이론도 매우 정밀하게 발달되어 많은 비선형계에 쉽게 적용되고 있다. 이런 OGY 방법은 이때까지의 다른 방법들과는 달리 대충적인 것이 아니고 수학적으로 엄밀하기 때문에 전체계를 이용하여 아주 명료하게 혼돈제어를 할 수 있어 자동적으로 혼돈을 제어할 수 있는 기구 제작의 가능성 때문에 더욱 연구되었다.

이 방법은 복잡한 혼돈 끌개 내부에 존재하는 모든 수렴다양체들의 특성을 분석하여야 하는데 이런 수렴다양체들은 혼돈의 특성상 한 좌표계의 궤적만 알면 다른 변수의 궤적도 구할 수 있어 다양한 수렴 다양체들을 파악할 수 있다[3]. 그래서 다른 vector 좌표계에서의 특성을 전혀 몰라도 실험적으로 구한 한변수 값의 변화만 알면 혼돈을 제어 할 수 있게 된다. 그럼에도 불구하고 실

제계에서는 한 변수에 영향을 주는 많은 변수들이 서로 연결되어 있고 이것이 숨어 있기도하여 얼마나 많은 변수를 구해야 하는지명확히 알 수 없기 때문에 다른 좌표계의 모든 특성을 다 아는 것은 쉽지 않다. 이것을 알기 위해서는 이론적으로 엄밀하게 시간의 변화에 따른 파형을 정확히 분석해야하고 적절한 시간지연계 (time delayed coordinate)를 구해야 하는데[4] 이때 시간지연계의 특성상 좋은 상관관계(correlation)를 갖는 시간지연좌표를 구하는게 쉽지 않다. 그래서 복잡한 계에서는 혼돈의 제어가 실제로는 쉽지 않은데 이런 경우 OGY방법의 하나인 되돌이 본뜨기(return map) 방법을 이용하면 보다 쉽게 혼돈을 안정화 시킬 수 있게 된다[5].

되돌이 본뜨기로 안정화시키는 방법은 이때까지 알려지기에는 모든계에 다 사용할 수 없고 다만 1차원 본뜨기의 경우 수렴다양체 들을 구할 수 없기 때문에 이런 방법을 쓰게 된다. 1차원 혼돈의 경우는 수렴다양체 대신 되돌이 본뜨기와 대각선이 만나는 불안정점 위로 혼돈을 가두어 안정화시킬 수 있다. 그러나 이러한 결과는 전체계가 1차원이 아니라도 구하고자하는 한 변수가 깨끗한 되돌이 본뜨기를 만들면 1차원계로 차원을 축소시켜 되돌이 본뜨기에 의해 안정화시킬 수 있게 된다. 그래서 여기서는 이러한 시도로서 3차원계의 Lorenz 식을 이용하여 이 식 중의 한 변수가 깨끗한 되돌이 본뜨기를 만드는가를 보고 이때 만들어진 되돌이 본뜨기를 통하여 혼돈을 제어할 수 있다는 것을 보이고자 한다.

2. 되돌이 본뜨기를 이용한 혼돈제어 방법

OGY 혼돈제어법은 한 좌표계에서의 혼돈의 시간적 궤적을 시간 지연계를 사용하여 N 좌표공간으로 확장할 수 있어 그 내부에 존재하는 전체계의 변화를 파악할 수 있다는 것이다. 즉 한 $\vec{X}(t) = [z(t),\ z(t\text{-}T),\ z(t\text{-}2T),\ \ldots,\ z(t\text{-}NT)]$ 좌표계의 궤적을 알면 다음과 같이 N차원의 궤적을 구할 수 있게 된다. 여기서의 차원은 Poincare 단면을 선택하므로 실제계의 차원보다 한 차원 낮은 계를 선택할 수 있다. 이 좌표계에서의 궤적내부에는 수많은 안정 수렴다양체와 불안정 수렴다양체들이 존재하게 되는데 두 다양체가 서로 만나는 점이 불안정 고정점으로 나타나고 있고 궤적의 움직임은 불안정 수렴다양체의 궤적에 의해 불안정 고정점에서 바깥으로 밀려나고 안정 수렴다양체의 궤적에 의해 불안정 고정점쪽으로 밀리는 형태로 나타난다. 이때의 수렴다양체의 특성은 불안정수렴다양체의 경우는 그 고유값의 절대치는 1보다 크고 안정 수렴다양체의 경우는 1보다 작다. 이때 우리는 $\xi = \xi_F = 0$ 을 고정점으로 둘 때 궤적이 ξ_F에서 떨어져 있을 때 대개변수 p을 p로 움직이면 궤적이 이 불안정 점 위로 움직일 수 있다고 하면 우리는 불안정 점 위로 궤적을 움직일 수 있게 되는 것이다. 그러면 Poincare 단면 위에서 n+1 번째 나타나는 점과 불안정 고정점 사이에는 선형근사를 이용해 풀면 $\xi_{n+1} - \xi_F(p) = \boldsymbol{M}[\xi_n - \xi_F(p)]$의 관계가 성립한다. 여기서 $g = \partial\xi_F(p)/\partial p)_{p=0} = p^{1}\xi_F(p)$로 둘 수 있고 그러면 n+1번째의 궤적은 $\xi_F(p) = pg$를 이용하여 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\xi_{n+1} = p_n g + [\lambda_u \boldsymbol{e}_u f_u + \lambda_s \boldsymbol{e}_s f_s][\xi_n - p_n g]$$

여기서 λ는 고유치이고 첨자 s, u는 불안정과 안정의 의미를 지니고 있으며, $\boldsymbol{e}$, f는 방향의 단위 벡터와 함수의 벡터를 각각 나타낸다. 이 결과를 이용하면 우리는 불안정점으로 궤적을 옮기기 위하여 필요한 매개변수의 변화량을 다음과 같이 구할 수 있다.

$$p_{n+1} = \lambda_u(\lambda_{u-1})^{-1}(\xi_n f_u)/(g f_u)$$

이 결과를 보면 OGY의 방법은 구해야할 변수의 값이 얼마나 많고 혼돈을 일으키는 하나의 시간궤적을 엄밀히 풀어헤쳐서 수많은 값들을 정밀하게 구해야 한다는 문제점이 있게 된다. 이러한 과정을 모두 거쳐서 실제 다이오드 레이저로 들띄워진 Nd:Yag 레이저의 2차 고조파의 혼돈을 안정화시키기도하였고 6개의 변수를 가지는 NMR레이저의 출력 혼돈을 안정화시키기도 하였다[6]. 그러나 이러한 방법보다는 되돌이 본뜨기를 이용한 안정화 방법은 전체계의 움직임은 몰라도 구하고자하는 한 혼돈궤적의 되돌이 본뜨기만 구하면 쉽게 안정화시킬 수 있게 된다.

되돌이 본뜨기에 의한 제어식은 OGY 방법보다는 쉬운데 먼저 변수가 x이고 매개변수가 λ일 때 되돌이 본뜨기로 구한 함수를 $f(\lambda, x)$로 두면

궤도는 이 함수 위의 한점인 x_n점에서 한 번의 순환에 의하면 x_{n+1} 점으로 이동하게 된다. 그러나 혼돈을 제어할려면 불안정점으로 x_{n+1}로 이동시켜야 하는데 이 불안정 점은 대각선과 $f(\lambda, x)$과 만나는 점인 x_f이다. 이 점으로 다음 점을 이동하기 위해서 매개변수 λ에서 구한 되돌이 본뜨기의 함수 $f(\lambda, x)$를 매개변수 $\lambda+\Delta\lambda$에 의한 되돌이 본뜨기 함수 $f(\lambda+\Delta\lambda, x)$로 바꾸어 주어야 한다. 그러면 그림1에서 처럼 다음점은 x_f로 수렴할 수 있게 된다. 여기서 우리는 $\lambda+\Delta\lambda$의 값을 알아야 하는데 이때 바꾸어 주는 양 $\Delta\lambda$는 $f(\lambda+\Delta\lambda, x)$를 전개시키면 간단히 구할 수 있어 아래와 같이 구할 수 있게 된다.

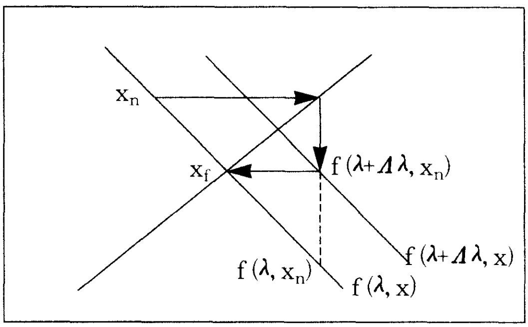

그림1) Schematic diagram for controlling chaos in return map.

$$
\begin{aligned}
x_{n+1} = x_f &= f(x_n, \lambda+\Delta\lambda) \\
&= f(x_f + (x_n - x_f), \lambda+\Delta\lambda) \\
&= f(x_f, \lambda) + \frac{\partial f(x_f, \lambda)}{\partial x}(x_n - x_f) + \frac{\partial f(x_f, \lambda)}{\partial x}\Delta\lambda
\end{aligned}
$$

여기서 $\partial f(x_f, \lambda) = x_f$ 이고 우리는 $x_{n+1} = x_f$이기를 원하므로 이 두 식을 대입 시키면 여기서 섭동량을 다음과 같이 구할 수 있게 된다.

$$
\Delta\lambda = \frac{\partial f(\lambda, x_f)/\partial x}{\partial f(\lambda, x_f)/\partial x}(x_n - x_f) \qquad (1)
$$

이 식은 혼돈제어를 위해 얼마나 매개변수를 바꾸어 주어야 하는지 알려 주는데, 이 식은 불안정점 주위의 함수의 변화량과 매개변수의 변화에 따른 함수의 변화량 그리고 x_n의 값만 알면 x_f 값으로 혼돈을 제어할 수 있다는 것을 보여준다.

3. 되돌이 본뜨기를 이용한 Lorenz식의 혼돈제어

Lorenz식은 유체역학에서 유체의 흐름을 기술하는 식으로 다음과 같이 간략화된 식으로 주어진다.

$$
\frac{dx}{dt} = \alpha(-x+y)
$$

$$
\frac{dy}{dt} = -xz+\gamma x-y
$$

$$
\frac{dz}{dt} = -bz+xy
$$

이 식에서 x, y, z는 각각 변수를 나타내고 α, β, γ는 각각 매개변수를 나타낸다. 이식의 중요한 특징들은 이미 많이 조사되어 있는데 이식은 Hopf갈래질을 통하여 혼돈에 이르는 것으로 알려져 있으며 변수 z는 a = 10, b = 8/3에서 γ에 따라서 주기배가 갈래질을 하며 그 형태는 tent map과 비슷한 것으로 알려져 있다.

Tent map은 주기배가 갈래질을 통한 혼돈을 나타내는 1차원 본뜨기의 일종인데 이 본뜨기를 x_n과 x_{n+1}의 되돌이 본뜨기 위상면에서 보면 안정수렴다양체들은 존재하지 않고 불안정 수렴다양체만 존재하는 본뜨기 형태로 나타난다. 이 경우의 혼돈제어는 OGY방법을 쓰지 않고 되돌이 본뜨기 방법을 쓸 수 있다. 그러므로 Lorenz식의 경우에는 간단히 z 변수의 되돌이 본뜨기만 구하면 혼돈을 제어 할 수 있게 된다.

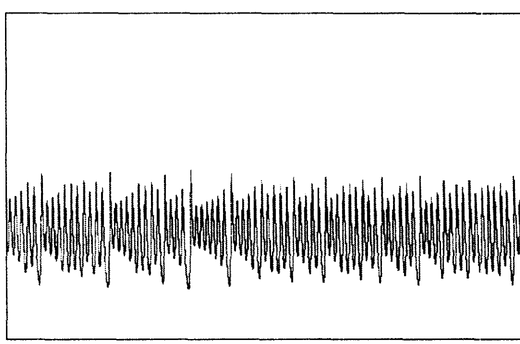

그림2) Temporal behavior of chaos in Lorenz map.

혼돈제어를 위하여 혼돈이 나타나는 영역의

매개변수들을 각각 구했는데 여기서 b = 28에서 혼돈의 모양을 구했고 또 이때의 혼돈을 제어하였다. 혼돈제어되기 전 나타나는 z의 값은 그림 2과 같이 파형의 모양이 매우 불규칙한 혼돈을 보였다. 이 혼돈을 각각 주기 1T, 2T, 3T로 제어하기 위하여 각각의 주기에 대한 되돌이 본뜨기를 구하였다. 그 결과 나타나는 되돌이 본뜨기가 그림 3에 주어져 있는데 주기 1T로 제어하고자 할 때는 제어하고자하는 값 x_f는 그림(3a)에서 보듯 대각선과 되돌이 본뜨기가 서로 만나는 점으로 이 위치의 되돌이 본뜨기의 기울기 절대치는 1 보다 크므로 이점이 바로 불안정 점이 된다. 이 경우는 매주기마다 이 점으로 수렴하도록 매개변수를 섭동시켜 주어야 한다. 주기 2T로 제어하기 위해서는 그림 (3b)와 같이 x_n vs x_{n+1}의 되돌이 본뜨기를 구하여야 하는데 이 그림에서 보면 불안정점이 세점으로 나타나는데 제어하여야 할 불안정 점은 양쪽의 두 점이며 가운데 점은 주기 1T의 불안정 점이다. 그러므로 제어는 매 주기 마다 제어를 하여야 하는데 교대로 한번은 위쪽 점으로 제어하고 한번은 아래쪽 점으로

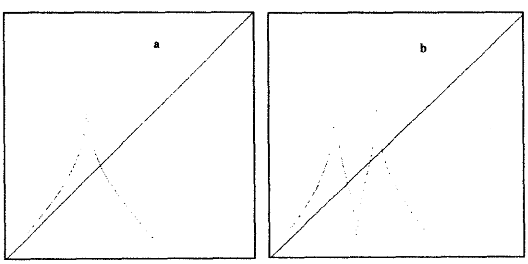

그림3) return map of z Lorenz equation (z-axis). (a) x_n vs x_{n+1} (b) x_n vs x_{n+1}.

제어하여야 한다. 이러한 방법으로 혼돈을 제어한 결과 그림 4와 같이 혼돈을 깨끗이 안정화 시킬 수 있었다. 여기서의 출력 파형을 보면 그림 윗쪽의 화살표 위치에서 부터 혼돈제어를 시작하였는데 혼돈제어 이전에는 그 출력이 아주 불규칙적이나 혼돈제어가 시작되면 곧 그 파형이 안정화되어 레이저의 출력이 아주 일정한 형태로 바뀌는 것을 볼 수 있다. 여기에서 그림 (4-a)는 혼돈이 주기 1T로 안정화된 것을 보이는 파형이고 그림(4-b)는 혼돈이 주기 2T로 안정화된 것을 나타내며 그림 (4-c)는 주기 3T로 안정화 된 것을 알 수 있다. 이것의 X-Y의 위상 공간에서 어떻게 바뀌었나를 보면 그림5에서 처럼 혼돈의 궤적이 모두 불안정궤도로 제어되었음을 알 수 있다. 여기서 그림 a, b, c, d는 각각 혼돈이 주기 1T, 주기 2T, 주기 3T로 제어 되었음을 나타낸다. 여기서의 주기적 궤도 운동은 안정궤도가 아니라 불안정 궤도이며, Poincare 단면에서 보면 불안정 고정점으로 나타나는 궤적이 된다.

3. 결론

일반적으로 Lorenz식은 3차원 운동이기 때문에 OGY방법을 사용하지 않고는 불가능한 것으로 생각할 수 있으나 주어진 궤도 운동 중에서 한 궤도운동만 깨끗하면 항상 혼돈을 제어할 수 있다. 이러한 결과를 이용하여 Lorenz식에서 생기는 혼돈을 제어할 수 있음을 전산시늉으로 보였다. 그 결과 혼돈을 주기운동 1T, 2T, 3T로 각각 제어하였고 이때의 위상공간의 모양도 불안정 주기궤도 위에 잘 머무를 수 있음을 보였다.

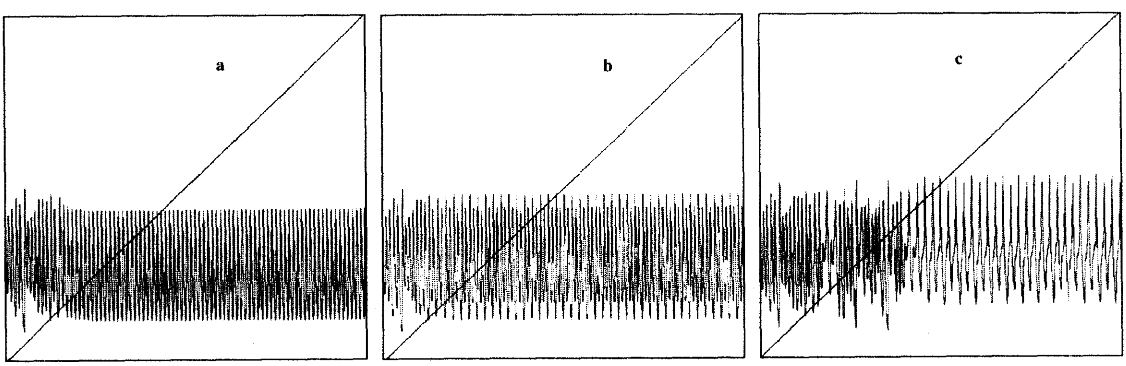

그림4) Stabilized temporal behavior by controlling chaos (a) Period 1T, (b) Period 2T, (c) Period 3T

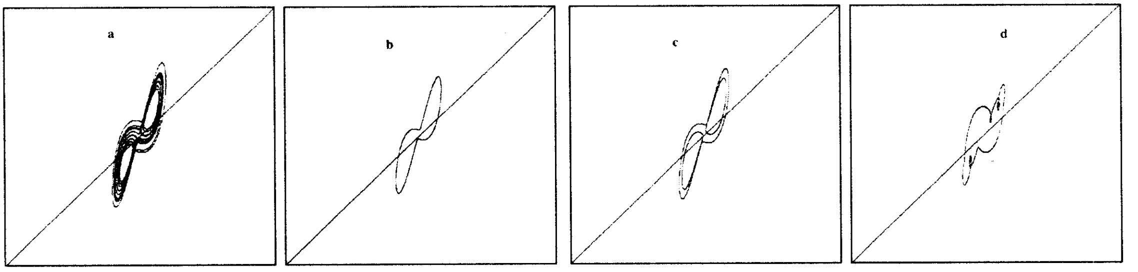

그림5) Stabilized phase diagram by controlling chaos (X-Y) (a) chaos, (b) Period 1T, (c) Period 2T, (d) Period 3T.

참고 문헌

1 I. Aranson, H. Levine, L. Tsimring, Phys. Rev. Lett, 72, 2561(1994); M.A. Martias, J. Guemez, Phys. Rev. Lett, 72, 1455(1994).; and references therein.

2 E.Ott, C. Grtebogi, J.A. Yorke, Phys. Rev. Lett, 64, 1196(1990),

3 J. Gukenheimer, P. Holmes, "Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields", Springer-Verlag, NewYork, 1983.

4 U. Dressler, G. Nitsche, Phys. Rev. Lett, 68, 1(1992); and references therein.

5 Y.C.Lai, Computer Phys, 8, 62(1994)

6 R. Roy, Z. Gills, K. S. Thornburg, Opt. Photo. News, 8, May, (1994); and references therein.