▩ 연구논문

교체전 최소수리회수의 결정에 관한 연구

서용성 · 박영택
성균관대학교 산업공학과
손은일
진주전문대학 공업경영과

A Generalized Model for Determining Optimal Number of Minimal Repairs before Replacement

Yong-Sung Suh · Young-Taek Park
Dept. of Industrial Engineering, Sungkyunkwan University
Eun-il Son
Dept. of Industrial Engineering, Chinju Technical College

Abstract

A replacement policy under two types of failures, repairable or irrepairable, is considered. In the policy, the system is replaced at the n-th failure if all the previous $(n-1)$ failures are repairable; Otherwise it is replaced at the first irrepairable failure. Assuming that the j-th failure is repairable with probability α_j and minimal repairs are performed for repairable failures between replacements, we derive the expected cost rate through the application of NHPP in order to determine the optimal number n^*. The policy includes some previous studies as special cases.

1. 서론

오늘날 과학기술의 진보로 인간의 일을 대신하기 위한 설비의 성능은 향상되었고, 그 기능은 더욱 복잡하게 되었다. 이러한 설비가 작동중에 고장난다면 생산활동에 지장을 줄 뿐만 아니라 환경 및 인명에도 피해를 주게 되어 큰 손실을 초래한다. 따라서 설비의 고장을 방지하기 위한 활동과 고장시 복구활동 등에 관련된 사용단계에서의 정비활동은 설

계 및 제작기술과 함께 중요한 문제가 된다. 이러한 설비의 정비문제는 설비운용의 목적에 대한 영향력이 크기 때문에 정비분야의 기초지식이 없는 의사결정권자의 판단이나 정비담당자의 어림짐작에 맡길 수는 없다. 그러므로 정비활동에 관계되는 제반요소들의 과학적이고 수리적인 분석을 통하여 정비활동에 대한 지침을 찾는 것이 필요하다.

설비의 예방교체는 사용시간의 증가에 따라 마모 및 열화 등에 의해 고장률이 증가하는 설비에 대하여 실시하게 된다. 교체정책에 관한 기존연구는 대개 사용시간 또는 고장회수를 기반으로 수명교체, 일제교체, 수리사용후 교체 등으로 분류된다[1, 3, 8, 9, 12, 13]. 복잡한 설비의 정비문제에 주로 응용되는 수리사용후 교체정책은 Barlow와 Hunter(1960)에 의해 제시되었는데, 이는 설비의 가동시간을 기반(; time-based)으로 1회 수리비용이 일정한 경우 단위시간당 총비용을 최소화하는 최적의 예방교체시점(T^*; T^* 시간 가동후 교체)을 결정하는 것이다. 그러나 Park(1979)은 Barlow와 Humter(1960)의 모형을 고장회수를 기반(; failure numbers-based)으로 한 예방교체시점(n^*; n^*번째 고장에서 교체)을 결정하였다. 이러한 고장회수를 기반으로 한 교체정책은 Phelps(1983)에 의해 가동시간을 기반으로 한 교체정책보다 비용면에서 유리하다고 밝혀졌다. Nakagawa(1981)와 Park(1987)은 Park(1979)의 모형에서 고장형태로 수리가능한 고장(; minor failure)과 수리불가능한 고장(major failure)의 두 가지를 고려하여 최적 예방교체시점을 구였다. 한편 1회 수리비용이 일정하지 않다면 수리비용이 많이 드는 고장은 수리하지 않고 교체해주는 것이 보다 경제적일 수 있다. 이와 같이 수리비용이 어떤 한계치(수리비한계, repair cost limit)를 넘지 않는 고장에만 수리하는 것을 수리비한계모형[4, 10]이라 하며, 수리비한계를 넘어서는 고장을 수리불가능한 고장으로 해석한다면 수리비한계모형은 Nakagawa(1981)의 모형과 유사하다고 할 수 있다. 또한 Block, et.al.(1988)과 Sheu(1993)는 수리비용이 설비의 수명 및 수리회수에 비례하고 수리가능할 확률이 설비의 사용수명에 비례하는 경우의 예방교체정책을 다루었으며, Makis와 Jardine(1993)은 수리비용이 설비의 수명 및 수리회수에 비례하고 고장난 설비의 수리후 상태가 신품과 고장직전의 상태 사이에 존재하는 경우의 예방교체정책을 연구하였다.

본 연구에서는 고장의 발생은 확률적이고 고장률이 시간에 따라 증가하는 경우에 대해 단위시간당 비용을 최소화하는 최적 예방교체시점을 구하는 하나의 교체정책을 제시하였다. 특히 지금까지 연구된 결과를 바탕으로 고장회수를 기반으로 예방교체시점을 구하였는데, 이는 일일이 교체와 수리에 관한 시간을 계산해야 하는 번거로움을 없애고, 단지 고장이 몇 회인가를 기억하면 되는 이점이 있는 것이다. 또한 현실적으로 설비의 사용시간이 증가함에 따라 고장시 수리불가능할 확률이 증가하는데, Block, et.al.(1988)과 Sheu(1993)는 수리불가능할 확률이 설비의 사용수명에 비례한다고 하였으나, 본 연구에서는 고장시 수리가능할 확률이 고장회수에 비례하여 작아지는 경우를 고려하여 고장회수를 기반으로 하는 예방교체정책을 일반화하여 교체전 최소수리회수를 결정하는 문제를 다루었다.

본 연구에서 다루는 모형은 다음과 같은 가정하에서 유도되었다.

(i) 설비의 고장에는 수리가능하거나 수리불가능한 경우의 두 가지 형태가 존재한다.

(ii) 고장회수가 커질수록 수리가능할 확률은 일정한 비율로 작아진다.

(iii) 설비의 교체 및 수리에 소요되는 시간은 가동시간에 비해 무시할 수 있을 정도로 작다.

(iv) 설비의 고장시 수행하는 수리는 설비를 신품과 같은 상태로 바꾸는 것이 아니라 고장직전의 상태로 환원시키는 최소수리(minimal repair)[2, 8]이다.

본 연구에서 사용된 기호들은 다음과 같다.

n : 예방교체시점을 나타내는 고장회수

α_j : j번째 고장이 수리가능할 확률

$\alpha = \alpha_1$: 최초 고장이 수리가능할 확률

ρ : 고장회수의 증가에 따라 수리가능할 확률이 줄어드는 형태를 나타내는 상수 ($\alpha_{j+1} = \rho\alpha_j$, $0<\rho\le 1$)

C_r : 1회 교체비용의 기대치

C_f : 1회 수리비용의 기대치

$C(n; \alpha, \rho)$: 단위시간당 비용함수

$\overline{F}_j(t)$: j번째 고장시간의 누적확률밀도 여함수

$H(t)$: 누적고장률(cumulative hazard)

$p(j; H(t)) = \dfrac{\{H(t)\}^j e^{-H(t)}}{j!}$: 평균이 $H(t)$인 Poisson 분포의 확률밀도함수

2. 교체전 최소수리회수의 결정

본 연구에서는 설비의 고장이 수리가능한 고장과 수리불가능한 고장의 두 가지 형태가 존재한다고 가정하였다. 이와 같이 고장의 형태가 두 가지인 경우에 대하여 Nakagawa (1981)는 설비의 고장시 수리가능할 확률이 항상 일정한 경우에 대하여 최적 예방교체시점을 결정하는 문제를 고려한 바 있으나, 본 연구에서는 이를 보다 일반화시켜 설비의 고장회수가 증가함에 따라 수리가능할 확률이 감소하는 경우의 최적 예방교체시점을 결정하는 문제를 다루었다

본 연구의 모형은 고장회수를 근거로 한 예방교체정책으로서, 설비의 고장시 수리가능한 고장만 계속 발생한다면 최소수리를 하면서 사용하다가 n번째 고장시점에서 교체하고, n번째 고장 이전에 수리불가능한 고장이 발생하면 그 시점에서 교체하게 된다.

2.1 단위시간당 비용계산

(1) 주기당 기대비용의 계산

① 주기당 교체비용

설비의 한 주기를 교체시점에서 다음 교체시점까지로 할 수 있으므로 주기당 교체회수는 1회가 되어 주기당 교체비용은 C_r 이다.

② 주기당 수리비용의 계산

주기당 수리비용은 주기당 수리회수에 1회당 수리비용의 기대치를 곱하면 구할 수 있다. 주기당 수리회수는 다음의 식으로 나타낼 수 있다:

$$
\begin{aligned}
&E[\text{주기당 수리회수}] \\
&= \sum_{j=1}^{n} (j-1)\, Pr\{j\text{번째 고장이 처음으로 수리불가능}\} \\
&\quad + (n-1)\, Pr\{n\text{번의 고장이 모두 수리가능}\} \\
&= \sum_{j=1}^{n} (j-1) \prod_{i=1}^{j-1} \alpha_i (1-\alpha_j) + (n-1) \prod_{j=1}^{n} \alpha_j \\
&\quad (\alpha_1 = \alpha,\ \alpha_{j+1} = \rho\, \alpha_j \text{로부터 } \alpha_j = \alpha \rho^{j-1} \text{이므로}) \\
&= \sum_{j=1}^{n-1} \alpha^j \rho^{j(j-1)/2} \qquad (1)
\end{aligned}
$$

그러므로 주기당 기대수리비용은 다음과 같다:

$$
C_f \sum_{j=1}^{n-1} \alpha^j \rho^{j(j-1)/2} \qquad (2)
$$

(2) 기대주기길이의 계산

설비의 주기는 교체시점에서 다음 교체시점까지이므로, 그 기대치는 다음의 식으로 나타낼 수 있다:

$$
\begin{aligned}
&E[\text{주기길이}] \\
&= \sum_{j=1}^{n} \{j\text{번째 고장까지의 기대시간}\}\, Pr\{j\text{번째 고장에서 교체}\} \\
&= \sum_{j=1}^{n} \{j\text{번째 고장까지의 기대시간}\}\, Pr\{j\text{번째 고장이 처음으로 수리불가능}\} \\
&\quad + \{n\text{번째 고장까지의 기대시간}\}\, Pr\{n\text{번의 고장이 모두 수리가능}\} \qquad (3)
\end{aligned}
$$

j번째 고장까지의 기대시간은 NHPP이론에 의해 $\int_0^\infty \overline{F}_j(t)dt = \sum_{i=0}^{j-1} \int_0^\infty p(i;\, H(t))dt$이고 [Nakagawa와 Kowada, 1882)], j번째 고장에서 처음 수리불가능한 고장이 발생할 확률은 $\prod_{i=1}^{j-1} \alpha_i (1-\alpha_j)$이므로 식 (3)은 다음과 같이 쓸 수 있다:

$$
\begin{aligned}
&E[\text{주기길이}] \\
&= (1-\alpha_1) \int_0^\infty \overline{F}_1(t)dt + \alpha_1 (1-\alpha_2) \int_0^\infty \overline{F}_2(t)dt + \cdots \\
&\quad + \alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_{n-1} (1-\alpha_n) \int_0^\infty \overline{F}_n(t)dt + \alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_n \int_0^\infty \overline{F}_n(t)dt \\
&= \int_0^\infty \overline{F}_1(t)dt + \alpha_1 \int_0^\infty \{\overline{F}_2(t) - \overline{F}_1(t)\}dt + \alpha_1 \alpha_2 \int_0^\infty \{\overline{F}_3(t) - \overline{F}_2(t)\}dt
\end{aligned}
$$

$$+ \cdots + \alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_{n-1} \int_0^\infty \{\overline{F}_n(t) - \overline{F}_{n-1}(t)\} dt$$

$(\overline{F}_{j+1}(t) - \overline{F}_j(t) = p(j; H(t))$ 이므로)

$$= \int_0^\infty e^{-H(t)} dt + \sum_{j=1}^{n-1} \prod_{i=1}^{j} \alpha_i \int_0^\infty p(j; H(t)) dt$$

$$= \sum_{j=0}^{n-1} \alpha^j \rho^{j(j-1)/2} \int_0^\infty p(j; H(t)) dt \tag{4}$$

(3) 단위시간당 비용

Renewal reward 정리[Ross, 1970]에 의하여 주기당 기대비용을 기대주기길이로 나누어 주면 단위시간당 비용을 구할 수 있다:

$$C(n; \alpha, \rho) = \frac{\text{주기당 교체비용} + \text{주기당 수리비용}}{\text{기대주기길이}}$$

$$= \frac{C_r + C_f \sum_{j=1}^{n-1} \alpha^j \rho^{j(j-1)/2}}{\sum_{j=0}^{n-1} \alpha^j \rho^{j(j-1)/2} \int_0^\infty p(j; H(t)) dt} \tag{5}$$

2.2 최적해 탐색

단위시간당 비용식을 단위시간당 교체비용과 단위시간당 수리비용으로 나누어 보면, 식 (5)를 최소화하는 절충점이 존재하는 것을 다음과 같이 설명할 수 있다.

먼저, 단위시간당 교체비용을 나타내는

$$\frac{C_r}{\sum_{j=0}^{n-1} \alpha^j \rho^{j(j-1)/2} \int_0^\infty p(j; H(t)) dt} \tag{6}$$

에서, 분모인 기대주기길이는 예방교체시점을 나타내는 고장회수 n에 대한 증가함수이므로 단위시간당 교체비용은 감소함수이다.

단위시간당 수리비용을 나타내는

$$\frac{C_f \sum_{j=0}^{n-1} \alpha^j \rho^{j(j-1)/2}}{\sum_{j=0}^{n-1} \alpha^j \rho^{j(j-1)/2} \int_0^\infty p(j; H(t)) dt} \tag{7}$$

에서, 분자와 분모는 모두 n에 관한 증가함수이다. 분모에 포함된 $\int_0^\infty p(j; H(t)) dt$는 j번째 고장시점과 다음번 고장시점인 $(j+1)$번째 고장시점의 시간간격의 기대치이므로 j에 관한 감소함수이다[Nakagawa와 Kowada, 1982]. 따라서 분모의 증가율은 분자의 증가율보다 작으므로 단위시간당 수리비용은 증가함수이다.

그러므로 단위시간당 비용을 나타내는 식 (5)는 예방교체를 위한 고장수 n이 커짐에 따

라 감소하는 교체비용과 증가하는 수리비용의 합이므로 이를 최소화하는 n^*가 존재한다 따라서 최적 예방교체시점 n^*는 $C(n+1) \geq C(n)$을 만족하는 최초의 n값이라고 볼 수 있다.

3. 수치예 분석

본 연구의 이해를 돕기 위해 설비의 고장이 형상모수(shape parameter) β와 척도모수(scale parameter) λ인 Weibull 분포를 따르는 경우를 고려해 보자. Weibull 분포의 일반성의 상실없이 $\lambda=1$이 되도록 척도를 조정하면, 신뢰도함수는 $\overline{F}(t)=\exp\{-t^{\beta}\}$ 이며, $\beta>1$이면 설비는 증가고장률을 갖는다.

또한 j번째 고장과 $(j+1)$번째 고장사이의 간격은

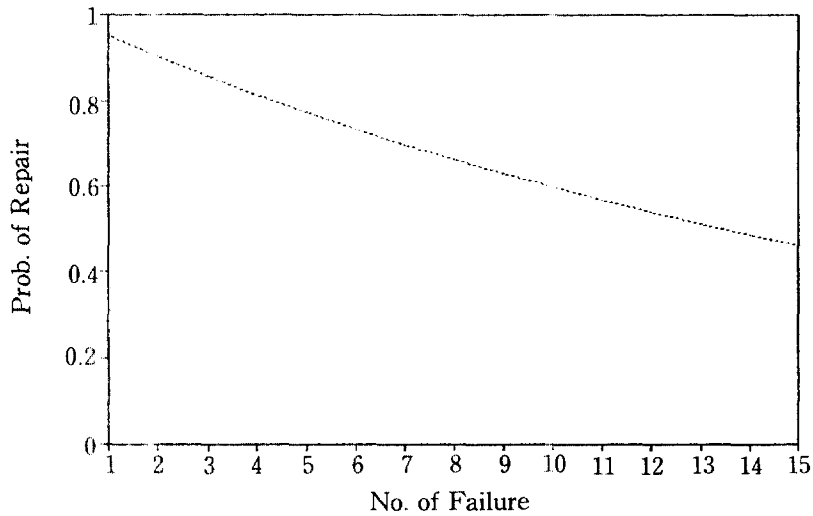
$$\int_0^{\infty} p(j;\, H(t))\,dt = \frac{\Gamma(j+1/\beta)}{\beta\Gamma(j+1)}$$

이 된다.

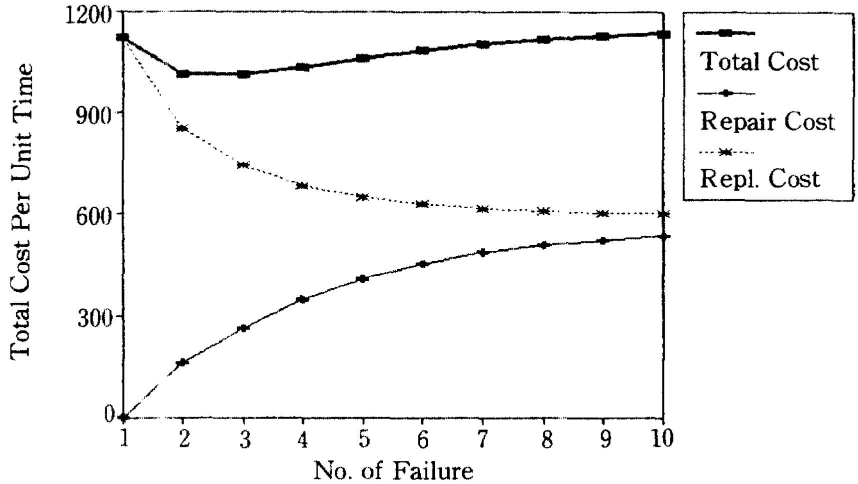
여기서, 1회 교체비용 $C_r=1000$, 1회 수리비용 $C_f=200$이며 최초고장에서 수리가능할 확률 $\alpha=0.95$, 고장증가에 따라 수리가능할 확률이 줄어드는 비율 $\rho=0.95$라 하자. Weibull 분포에서 형상모수 $\beta=3$인 경우, 단위시간당 비용식은 식 (5)에 의해 다음과 같이 나타낼 수 있다:

$$C(n;\, \alpha=0.95,\, \rho=0.95) = \frac{1000+200\sum_{j=1}^{n-1} 0.95^{j+j(j-1)/2}}{\sum_{j=1}^{n-1} 0.95^{j+j(j-1)/2}\,\dfrac{\Gamma(j+1/3)}{3\Gamma(j+1)}} \tag{8}$$

그러므로 식 (8)을 최소화하는 최적 예방교체시점인 고장수 n^*를 구해야 한다. 본 예제의 경우 고장회수에 따른 수리가능할 확률(; α_j, $j=1, 2, 3, \cdots$)의 변화는 〈그림 1〉과 같은 형태를 가지며, 단위시간당 비용은 〈그림 2〉와 같다.



〈 그림 1 〉 고장회수에 따른 수리가능할 확률 (α=0.95, ρ=0.95)



〈 그림 2 〉 예방교체시점에 따른 단위시간당 비용의 변화
(C_r=1000, C_f=200, β=3, λ=1, α=0.95, ρ=0.95)

〈그림 2〉에서 단위시간당 총비용은 n에 대한 단봉형(unimodal) 함수임을 볼 수 있다. 본 예제의 경우 최적 예방교체시점은 3번째 고장시점이며, 단위시간당 총비용은 약 1012이다. 따라서 설비의 교체는 3번째 고장 이전에 모두 수리가능한 고장이 발생하였다면 고장시마다 최소수리를 하여 사용하다가 3번째 고장발생시점에서 예방교체를 해주고, 3번째 고장발생 이전에 수리불가능한 고장이 발생하였다면 수리불가능한 고장발생시점에서 설비를 교체해주는 것이 최적이다.

다음의 〈표 1〉은 본 예제에서 수리비용을 변화시켰을 때 최적 예방교체시점 및 단위시간당 비용의 변화를 나타낸 것이다. 이를 보면, 1회 수리비용이 커질수록 예방교체시점은 앞당겨지는 것을 볼 수 있다.

〈 표 1 〉 수리비용의 변화에 따른 교체시점 및 단위시간당 비용

1회 수리비용	교체시점 (n^*)	단위시간당 총비용
50	11	735
100	5	856
200	3	1012
300	2	1093

또한 〈표 2〉는 관련모수들의 변화에 따른 최적해의 변화를 요약한 것인데, 최적해가 형상모수 β에 가장 민감한 것을 알 수 있다.

〈 표 2 〉 모수들에 따른 최적해의 변화 (; C_r =1000, C_f =200)

β	α	$\rho=1$		$\rho=0.9$		$\rho=0.8$		$\rho=0.7$		$\rho=0.6$	
		n^*	$C(n^*)$	n^*	$C(n^*)$	n^*	$C(n^*)$	n^*	$C(n^*)$	n^*	$C(n^*)$
2	1	4	825	5	833	5	842	5	850	5	858
	0.9	5	846	5	854	5	862	5	870	5	878
	0.8	5	869	5	878	5	886	5	893	5	900
	0.7	5	896	5	904	5	911	6	917	6	923
	0.6	6	925	6	932	6	938	6	943	6	948
3	1	3	1008	3	1008	3	1008	3	1008	3	1008
	0.9	3	1016	3	1016	3	1016	3	1016	3	1016
	0.8	3	1024	3	1024	3	1025	3	1025	3	1025
	0.7	3	1033	3	1034	3	1034	3	1034	3	1034
	0.6	3	1043	3	1044	3	1044	3	1044	3	1044
4	1	2	1060	2	1060	2	1060	2	1060	2	1060
	0.9	2	1063	2	1063	2	1063	2	1063	2	1063
	0.8	2	1067	2	1067	2	1067	2	1067	2	1067
	0.7	2	1071	2	1071	2	1071	2	1071	2	1071
	0.6	2	1075	2	1075	2	1075	2	1075	2	1075

4. 결론

본 연구에서는 예방교체정책의 하나인 수리사용후 교체정책에서 고장형태가 수리가능하거나 수리불가능한 두 가지 경우가 있고, 고장회수에 따라 수리가능할 확률이 감소하는 모형에 대한 최적의 예방교체시점(n^*)을 결정하는 문제를 다루었다. 설비운용에 따른 단위시간당 비용은 예방교체시점을 크게 해줌에 따라 감소하는 교체비용과 증가하는 수리비용의 합으로 표현된다. 본 연구에서는 고장시 수리가 가능할 확률은 부품의 열화특성이나 사용시간의 증가에 따른 잔존가치의 하락을 고려하여 바로 직전의 고장시 수리확률에 일정한 상수(; $0<\rho\leq 1$)배 만큼 감소한다고 가정하고, 단위시간당 비용을 도출하였다. 수리가능할 확률의 감소형태를 반영하는 상수 α를 잘 선택한다면 본 연구내용을 적용함으로써 설비의 경제적 운용이 가능할 것이다.

참고문헌

[1] Barlow, R. E., and Hunter, L. C. (1960), "Optimum Preventive Maintenance Policies," *Operations Research*, Vol. 8, No. 1, pp. 90−100.

[2] Barlow, R. E., and Proschan, F. (1965), *Mathematical Theory of Reliability*, John Wiley & Sons, New York.

[3] Beichelt, F. (1981), "A Generalized Block Replacement Policy," *IEEE Transactions on Reliability*, Vol. R-30, No. 2, pp. 171−172.

[4] Beichelt, F. (1982), "A Replacement Policy Based on Limits for the Repair Cost Rate," *IEEE Transactions on Reliability*, Vol. R-31, No. 4, pp. 401−403.

[5] Block, H. W., Borges, W. S. and Savits, T. H. (1988), "A General Age Replacement Model with Minimal Repair," *Naval Research Logistics*, Vol. 35, pp. 365−372.

[6] Makis, V. and Jardine, A. K. S. (1993), "A Note on Optimal Replacement Policy under General Repair," *European Journal of Operational Research*, Vol. 69, pp. 75−82.

[7] Nakagawa, T. (1981), "Generalized Models for Determining Optimal Number of Repairs Before Replacement," *Journal of the Operations Research Society of Japan*, Vol. 24, No. 4, pp. 325−338.

[8] Nakagawa, T. and Kowada, M. (1982), "Analysis of a System with Minimal Repair and Its Application to Replacement Policy," *European Journal of Operational Research*, Vol. 12, pp. 176−182.

[9] Park, K. S. (1979), "Optimal Number of Minimal Repairs Before Replacement," *IEEE Transactions on Reliability*, Vol. R-28, No. 2, pp. 137−140.

[10] Park, K. S (1983), "Cost Limit Replacement Policy under Minimal Repair," *Microelectronics and Reliability*, Vol. 23, No. 2, pp. 347-349.

[11] Park, K. S. (1987), "Optimal Number of Minor Failures before Replacement," *International Journal of Systems Science*, Vol. 18, No. 2, pp. 333-337.

[12] Phelps, R. I. (1981), "Replacement Policies under Minimal Repair," *Journal of Operational Research Society*, Vol. 32, pp. 549-554.

[13] Phelps, R. I. (1983), "Optimal Policy for Minimal Repair," *Journal of Operational Research Society*, Vol. 34, pp. 425-427.

[14] Ross, S. M. (1970), *Applied Probability Models with Optimization Applications*, Holden-Day, San-Francisco.

[15] Sheu, S. H. (1993), "A Generalized Model for Determining Optimal Number of Minimal Repairs before Replacement," *European Journal of Operational Research*, Vol. 69, pp. 38-49.