▩ 응용논문

공정능력지수에 대한 붓스트랩과 모의실험연구

김평구
충청전문대학 품질관리과
조중재
충북대학교 자연대학 통계학과

Bootstrapping Some Process Capability Indices

Peyong-Koo Kim
Dept. of Quality Control, Chung Cheong Junior College
Joong-Jae Cho
Dept. of Statistics, Chung Buk National University

Abstract

Process capability indices are used to determine whether a production process is capable of producing items within a specified tolerance. We could estimate the finite sample distributions of some process capability indices with bootstrap method. In this paper, we derive the asymptotic bootstrap distributions of some process capability indices $\hat{C}_p^*$, $\hat{C}_{pk}^*$ and $\hat{C}_{pm}^*$ under general proper conditions. These asymptotic distributions would be used in constructing some bootstrap confidence intervals. Also, we examine some small sample properties related to these estimators by some simulations.

1. 서론

공정능력지수들은 품질과 생산성의 지속적인 향상을 위해 공정평가 등의 여러 분야에서 꾸준히 이용되어 왔다. 이러한 공정의 분석을 위한 공정능력지수들로는 $C_p=(USL-LSL)/6\sigma$, $C_{pk}=\text{Min}\{(USL-\mu)/3\sigma,\ (\mu-LSL)/3\sigma\}$ 그리고 $C_{pm}=(USL-LSL)/6\tau$ (단, USL와 LSL은 규격상한과 규격하한이고, μ와 σ^2는 공정평균과 공정분산, $\tau^2=E(X-$

$T)^2$, T는 목표치) 등으로 이들은 특히 공정의 품질달성능력에 대한 정보로서 품질관리의 제 계획에 중요한 역할을 해왔다. 그런데 이들 공정능력지수들에서 C_p는 공정평균 μ와 무관한 지수이며, C_{pk}는 공정평균 μ와 공정분산 σ^2이 고려되고 있지만 목표치 T를 반영하지 못하는 결점이 있다. 이로부터 Chan et al.(1988)는 공정분산 σ^2 대신 $\tau^2=E(X-T)^2$을 고려한 공정능력지수 C_{pm}을 제안하였고, Taguchi(1985)은 손실함수의 개념을 도입하여 공정능력을 평가한 바 있다. 여기서 공정능력지수들의 관계는 $C_{pk}=(1-k)C_p$ (여기서 $k=2|m-\mu|/(USL-LSL)$, $m=(USL+LSL)/2$이 되며 $\mu=m$ 일때 $C_{pk}=C_p$가 된다.

한편, 어떤 공정으로 부터 확률표본 $X_1, X_2, \cdots, X_n$이 주어지고 표본평균과 표본분산이 각각 $\overline{X}=\Sigma X_i/n$와 $S_n^2=\Sigma(X_i-\overline{X})^2/(n-1)$라 할때 모수 μ와 σ^2을 모르는 경우 위에서 정의된 공정능력지수들은 다음과 같이 추정된다 (편의상, USL은 U로 LSL은 L로, 그리고 $d=(U-L)/2$로 표기하도록 함).

$$\hat{C}_p = d/3S_n$$

$$\hat{C}_{pk} = (d-|\overline{X}-m|)/3S_n \quad (\overline{X}\in[L,U])$$

$$\hat{C}_{pm} = d/\{3\sqrt{S_n^2+(\overline{X}-T)^2}\}$$

여기서 공정분포가 정규분포일때 공정능력지수의 추정량 $\hat{C}_p$의 분포는 S_n^2의 분포를 통해 유도되며 $\mu=T$ 일때 Chan et al. (1988)은 공정능력지수의 추정량 $\hat{C}_{pm}$의 분포를 유도하였다. 더나아가 Chan et al. (1990)은 보다 일반적으로 추정량 $\hat{C}_p$, $\hat{C}_{pk}$ 그리고 $\hat{C}_{pm}$의 극한분포가 정규분포임을 증명한 바 있다.

한편, 현장에서는 데이타 채취시 시간과 비용이 많이 소요되는 경우, 혹은 공분산 구조 등을 알고자 할 경우가 종종 있다. 이런 경우 표본 재추출법인 붓스트랩 방법을 적용하게 된다. 이러한 붓스트랩 방법에 대한 연구로는 붓스트랩의 전반적인 내용을 다룬 Efron (1982, 1986)과 붓스트랩 방법들을 적용하여 공정능력지수의 신뢰구간의 성질들을 연구한 Franklin과 Wasserman(1991, 1992) 등이 있다.

본 논문에서는 이러한 붓스트랩 방법을 공정능력지수 추정량에 적용하였을 경우 극한분포 이론을 정립하여 실제적으로 근사적 통계적 추론을 위한 이론적 기초를 마련 하고자 한다. 또한 위에서 제시된 이론적 성질들과 관련하여 모의실험을 통하여 여러 소표본 성질들을 연구・분석할 것이다.

2. 추정량과 극한 분포

공정능력지수 C_p, C_{pk}, C_{pm}들은 통계적 공정관리 분야에서 구간 추정이나 가설 검정 등의 통계적 추론에 널리 이용되고 있는 관심모수이다.

한편, 공정 특성치들의 확률 분포는 정규성으로 부터 종종 벗어나곤 하는데, 이러한 경

우 추정량 $\hat{C}_p$, $\hat{C}_{pk}$, $\hat{C}_{pm}$의 표본분포를 파악하여 추론하기란 대단히 어렵다. 물론 이들 추정량들에 대한 극한 정규분포 이론을 적용하여 통계적 추론을 하게 되는데, 이런 경우 바람직한 기법의 하나인 붓스트랩 방법에 의한 표본 재추출로 통계적 추론을 하게 된다. Efron(1987)과 Hall(1988)은 일반적인 경우에 대해 보다 나은 붓스트랩 신뢰구간 추정과 관련하여 여러가지 방법들을 이론적으로 비교 연구하였다.

특히 Franklin과 Wasserman(1991, 1992)은 이론적으로 세가지 형태의 붓스트랩(SB : Standard Bootstrap, PB : Percentile Bootstrap, BCPB : Bias-Corrected Percentile Bootstrap) 신뢰구간을 고려하여 위의 추정량들의 통계적 추론에 대한 연구를 했다. 우수한 방법으로 밝혀진 붓스트랩(SB, BCPB) 신뢰구간들은 기본적으로 정규성을 가정하였는 바, 이에 대한 이론적 규명이 요구된다.

2.1 공정능력지수 추정량의 극한 분포

Kane(1986)은 공정능력지수 C_p와 C_{pk}에 대한 통계적 추론에 대한 포괄적인 연구조사를 하였고 Chan et al.(1988)은 공정능력지수 C_{pm}을 분석하기 위하여 검사특성(Operating Characteristic) 곡선 접근방법과 베이지안 접근방법을 사용하였다. 이러한 방향의 결과들은 모집단 정규분포로 부터의 소표본 연구이었다. 한편, 대표본 연구 결과로는 공정능력지수의 추정량 $\hat{C}_p$, $\hat{C}_{pk}$, $\hat{C}_{pm}$의 기본적인 극한 분포이론을 연구한 Chan et al. (1990) 등이 있다.

먼저 "$\xrightarrow{d}$"은 분포적으로 수렴함을 뜻하고, 중심적률 $\mu_3 = E(X-\mu)^3$, $\mu_4 = E(X-\mu)^4$ 그리고 공분산행렬 $\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma^2 & \mu_3 \\ \mu_3 & \mu_4 - \sigma^4 \end{pmatrix}$라 표기하자.

정리 1 : 공정 특성 확률변수 X의 4차 중심적률 μ_4이 존재하면, 다음의 극한 분포이론이 성립한다[Chan et al., 1990].

ⓐ $$\sqrt{n}(\hat{C}_p - C_p) \xrightarrow{d} N(0, \sigma^2) \qquad (1)$$

ⓑ $$\sqrt{n}(\hat{C}_{pk} - C_{pk}) \xrightarrow{d} \begin{cases} N(0, \sigma^2_{pk}) & m > \mu \text{인 경우} \\ -\frac{1}{3\sigma}|Y| - d/6\sigma^3)Z\text{의 분포} & m = \mu \text{인 경우} \\ N(0, \sigma^{*2}_{pk}) & m < \mu \text{인 경우} \end{cases} \qquad (2)$$

ⓒ $$\sqrt{n}(\hat{C}_{pm} - C_{pm}) \xrightarrow{d} N(0, \sigma^2_{pm}) \qquad (3)$$

단,

$$\sigma^2_p = (\mu_4 - \sigma^4)d^2/36\sigma^6$$

$$\sigma^2_{pk} = \frac{1}{9} - (\mu_3 d/9\sigma^4)(1-(m-\mu)/d) + (1-(m-\mu)/d)^2(\mu_4 - \sigma^4)d^2/36\sigma^6$$

$$\sigma^{*2}_{pk} = \frac{1}{9} + (\mu_3 d/9\sigma^4)(1+(m-\mu)/d) + (1+(m-\mu)/d)^2(\mu_4 - \sigma^4)d^2/36\sigma^6$$

$$(Y, Z) \sim BN((0, 0), \Sigma)$$

$$\sigma^2_{pm} = (d^2/9(\sigma^2 + (T-\mu)^2)^3)(\sigma^2(T-\mu)^2 - (T-\mu)\mu_3 + \frac{1}{4}(\mu_4 - \sigma^4))$$

위의 정리에 의하면 다음 사실을 알 수 있다.
첫째, 추정량 $\hat{C}_p$, $\hat{C}_{pk}$, $\hat{C}_{pm}$는 표본의 크기 n이 충분히 크면 근사적으로 정규분포에 따른다. 둘째, 추정량 $\hat{C}_p$, $\hat{C}_{pk}$, $\hat{C}_{pm}$는 각각 공정능력지수 C_p, C_{pk}, C_{pm}의 일치추정량이다.

2.2 붓스트랩 알고리즘

먼저 공정능력지수들의 붓스트랩 추정이론에 필요한 붓스트랩 알고리즘은 다음과 같다.

단계 1 : 주어진 확률표본 $X_1, X_2, \cdots, X_n$으로 부터 복원 추출방법에 의해 붓스트랩 표본 $X^*_1, X^*_2, \cdots, X^*_n$을 얻는다 ($n^n$ 가지의 붓스트랩 표본 가능).

단계 2 : 단계 1의 붓스트랩 표본으로 부터 붓스트랩 표본평균 $\overline{X}^*$와 표본분산 S^{*2}_n을 구한다.

$$\overline{X}^* = \frac{1}{n}\Sigma X^*_i \qquad S^{*2}_n = \frac{1}{n-1}\Sigma(X^*_i - \overline{X}^*)^2$$

단계 3 : 단계 2로 부터 다음의 붓스트랩 공정능력지수 추정량 $\hat{C}^*_p$, $\hat{C}^*_{pk}$, $\hat{C}^*_{pm}$을 얻는다 (n^n 가지의 붓스트랩 추정치 가능).

$$\hat{C}^*_p = \frac{d}{3S^*_n}$$

$$\hat{C}^*_{pk} = \frac{d - |\overline{X}^* - m|}{3S^*_n} \qquad \overline{X}^* \in [L, U] \text{ 인 경우}$$

$$\hat{C}^*_{pm} = \frac{d}{3\sqrt{S^{*2}_n + (\overline{X}^* - T)^2}}$$

따라서 n^n개의 가능한 붓스트랩 추정치들은 추정량 $\hat{C}^*_p$, $\hat{C}^*_{pk}$, $\hat{C}^*_{pm}$에 대한 붓스트랩 분포의 구성요소가 될 것이다.

2.3 붓스트랩 추정량의 극한 분포

붓스트랩 추정량 $\hat{C}^*_p$, $\hat{C}^*_{pk}$, $\hat{C}^*_{pm}$에 관련된 극한 분포 결과들을 제시하기 전에, 이에 필요

한 두개의 보조정리를 제시하면 다음과 같다.

보조정리 1 : 붓스트랩 표본 $X_1^*, X_2^*, \cdots, X_n^*$에 대하여 다음의 결과가 성립한다.

$$\sqrt{n}\,(\bar{X}^* - \bar{X},\ S_n^{*2} - S_n^2) \xrightarrow{d} BN(\,(0,0),\ \Sigma\,) \tag{4}$$

〈증명〉 확률표본 $\begin{pmatrix} X_1 \\ X_1^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} X_2 \\ X_2^2 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} X_n \\ X_n^2 \end{pmatrix}$의 경험분포를 F_n이라 하면, 붓스트랩 표본 $\begin{pmatrix} X_1^* \\ X_1^{*2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} X_2^* \\ X_2^{*2} \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} X_n^* \\ X_n^{*2} \end{pmatrix}$은 확률분포 F_n을 갖으며 조건부적으로 서로 독립이다. 따라서 Bickel과 Freedman(1981)의 정리 2.1과 정리 2.2(p. 1197-1198), 그리고 Mallows (1972)로 부터 다음의 극한 분포를 얻는다.

$$\sqrt{n}\,\left(\bar{X}^* - \bar{X},\ \frac{1}{n}\,(\Sigma X_i^{*2} - \Sigma X_i^2)\right)$$

$$\xrightarrow{d} BN\left(\,(0,0),\ \begin{pmatrix} \sigma^2 & \mu_3 + 2\mu\sigma^2 \\ \mu_3 + 2\mu\sigma^2 & \mu_4 + 4\mu\mu_3 + 4\mu^2\sigma^2 - \sigma^4 \end{pmatrix}\right) \tag{5}$$

그리고 간단한 계산에 의해 보조정리 1의 결과를 얻는다.

보조정리 2 : 함수 $g(u, v)$이 미분가능 함수라면, 다음의 극한 분포 이론이 성립한다.

ⓐ $\sqrt{n}\,(g(\bar{X}, S_n^2) - g(\mu, \sigma^2))$

$$\xrightarrow{d} N(0,\ D\Sigma D') \tag{6}$$

ⓑ $\sqrt{n}\,(g(\bar{X}^*, S_n^{*2}) - g(\bar{X}, S_n^2))$

$$\xrightarrow{d} N(0,\ D\Sigma D') \tag{7}$$

단, $D = \left(\frac{\partial g(u,v)}{\partial u}\Big|_{\mu,\sigma^2} \quad \frac{\partial g(u,v)}{\partial v}\Big|_{\mu,\sigma^2} \right) \neq (0, 0)$

〈증명〉 보조정리 1과 Serfling(1980)의 정리A(p. 122)로 부터 계산됨.

공정능력지수 붓스트랩 추정량들 $\hat{C}_p^*, \hat{C}_{pk}^*, \hat{C}_{pm}^*$과 관련한 다음의 중요한 극한 분포결과를 얻게 되는 바, 이는 공정능력지수 C_p, C_{pk}, C_{pm}에 대한 통계적 추론시 유용하게 사용할 수 있을 것이다[Franklin과 Wasserman, 1991, 1992].

정리 2 : 공정 특성치 확률변수 X의 4차 중심적률 μ_4이 존재하는 경우, 다음의 결과들이 성립한다.

ⓐ $$\sqrt{n}(\hat{C}_p^* - \hat{C}_p) \xrightarrow{d} N(0, \sigma_p^2) \tag{8}$$

ⓑ $$\sqrt{n}(\hat{C}_{pk}^* - \hat{C}_{pk}) \xrightarrow{d} \begin{cases} N(0, \sigma_{pk}^2) & m > \mu\text{인 경우} \\ -\frac{1}{3\sigma}\,|\,Y\,| - d/6\sigma^3)Z\text{의 분포} & m = \mu\text{인 경우} \\ N(0, \sigma_{pk}^{*2}) & m < \mu\text{인 경우} \end{cases} \tag{9}$$

ⓒ $$\sqrt{n}(\hat{C}_{pm}^* - \hat{C}_{pm}) \xrightarrow{d} N(0, \sigma_{pm}^2) \tag{10}$$

〈증명〉 정리 2의 증명은 우선 공정능력지수 C_p, C_{pk}, C_{pm} 각각에 대하여 함수 $g(u, v)$를 다음과 같이 선택한다.

공정능력지수 C_p에 대하여

$$g(u, v) = \frac{d}{3\sqrt{v}} \tag{11}$$

공정능력지수 C_{pk}에 대하여

$$g(u, v) = \begin{cases} (1 - \frac{|\,m-u\,|}{d})\frac{d}{3\sqrt{v}} & u \in [L, U] \\ 0 & u \notin [L, U] \end{cases} \tag{12}$$

공정능력지수 C_{pm}에 대하여

$$g(u, v) = \frac{d}{3\sqrt{v + (T-u)^2}} \tag{13}$$

그리고 보조정리 1과 보조정리 2를 적용하면 정리 2의 결과를 얻는다.

이상으로 부터 정리 1과 정리 2에 의해 붓스트랩 방법의 일치성이 성립한다[Beran, 1984].

3. 모의실험연구

본 절에서는 앞 절에서 유도된 이론적인 결과, 특히 추정량들과 관련된 일치성 및 정규

성 등을 모의 실험을 통해 그 타당성을 확인 고찰하고자 한다. 본 모의실험 연구는 프로그램언어 SAS/IML을 이용하였다.

3.1 모의실험의 설계 및 절차

공정능력지수 추정량의 성질에 관한 모의실험을 위해 다음을 가정한다. 먼저 공정 특성치의 분포는 상태 변화에 따른 추정량의 성질을 쉽게 알아 보기위해 정규분포와 균등분포로 하며 공정의 평균과 표준편차는 각각 $\mu=50$, $\sigma=2$로 한다. 또 규격상한, 규격하한 및 목표치는 $USL=61$, $LSL=40$, $T=49$로 한다. 따라서 $C_p=1.75$, $C_{pk}=1.667$, $C_{pm}=1.565$가 된다. 본 실험의 표본은 $n=30$, $n=60$, $n=180$으로 하여 표본이 증가함에 따른 추정량의 성질들을 알아 보고자 한다.

이상의 실험 설계를 통하여 다음의 절차를 고려한다. SAS의 RANNOR 함수와 RANUNI 함수를 사용하여 이상에서 가정한 공정조건하에서 표본 $x_1, x_2, \cdots, x_n$을 생성한다. 그리고 n개의 생성된 표본으로 부터 세가지 추정치 $\hat{C}_p$, $\hat{C}_{pk}$, $\hat{C}_{pm}$을 구한다. 이 과정을 1000번 반복하여 표본의 크기 n에 따라 추정량들의 변화되는 성질을 고찰한다. 여기서 정규성의 검정은 샤피로 윌크검정을 사용한다.

한편, 붓스트랩 방법의 적용에 따른 모의실험 절차는 기존의 표본 $x_1, x_2, \cdots, x_n$에 2.2 절의 붓스트랩 알고리즘 단계 1에서 단계 3까지를 적용하여 붓스트랩 추정치 $\hat{C}^*_p$, $\hat{C}^*_{pk}$, $\hat{C}^*_{pm}$을 구한다. 이 과정 역시 1000번 반복하여 붓스트랩 방법의 일치성과 표본의 크기 n에 따라 추정량들의 변화되는 성질을 고찰한다.

3.2 모의실험 결과 및 고찰

위의 과정에 의해 추정된 1000개의 추정치 $\hat{C}_p$, $\hat{C}_{pk}$, $\hat{C}_{pm}$과 붓스트랩 표본에 의한 1000개의 추정치 $\hat{C}^*_p$, $\hat{C}^*_{pk}$, $\hat{C}^*_{pm}$들의 각각의 편의(평균), 표준편차 및 샤피로 윌크 통계량에 의한 정규성 검정의 유의확률(p값)을 표본의 크기에 따라, 또 공정의 분포에 따라 〈표 1〉과 〈표 2〉에 제시했다. 그런데 공정능력지수 C_p의 경우 편의(평균)는 원표본의 값은 1000개의 $\hat{C}_p-C_p$에 대한 산술평균을 뜻하고, 붓스트랩의 값은 1000개의 $\hat{C}^*_p-\hat{C}_p$에 대한 산술평균을 뜻한다(단, 붓스트랩의 값에 있어서 $\hat{C}_p$는 맨 처음 원표본에 대한 추정치임). 물론 공정능력지수 C_{pk}와 C_{pm}에 대하여 원표본과 붓스트랩의 값도 비슷한 방법으로 계산하였다

먼저 표본이 커지면서 편의와 표준편차는 작아짐을 알 수 있고 이것으로 부터 정리 1과 정리 2에 제시한 붓스트랩 방법의 일치성 등이 성립함을 모의 실험을 통해 확인할 수 있다.

한편, 추정량의 정규성에 있어서는 〈표 1〉과 〈표 2〉에서 알 수 있듯이 표본이 커지면서 샤피로 윌크 통계량에 의한 정규성 검정 결과는 대체로 정규성을 보여주고 있다.

이상의 모의실험에서 특이한 점은 추정량은 공정분포와 표본추출법 등에 따라 정규성의 변화 정도가 매우 민감함을 알 수 있다. 한편 〈표 1〉과 〈표 2〉에서 원표본에 대한 모든 경우의 편의(평균)값이 양수(positive)로 계산되었는 바, 이는 모집단 공정분포가 정규분포일때 세가지 공정능력지수에 대하여 편의의 구체적인 형태의 값들이 양수인 사실(Pearn et al., 1992)에 기인한다.

〈 표 1 〉 공정분포가 정규분포를 하는 경우

모수		$n=30$		$n=60$		$n=180$	
		원표본	붓스트랩	원표본	붓스트랩	원표본	붓스트랩
$C_p=$ 1.75	편의(평균)	0.0455	0.0476	0.0187	0.0082	0.0071	0.0021
	정규성검정	0.0906	0.0064	0.1079	0.0249	0.6044	0.4120
	S.D.	0.2597	0.2007	0.1693	0.1598	0.0941	0.0924
$C_{pk}=$ 1.667	편의(평균)	0.0886	0.0903	0.0162	0.0094	0.0066	−0.0008
	정규성검정	0.0001	0.0001	0.0745	0.0608	0.3497	0.1106
	S.D.	0.2536	0.1894	0.1656	0.1732	0.0925	0.0967
$C_{pm}=$ 1.565	편의(평균)	0.0145	0.0184	0.0071	0.0008	0.0038	−0.0019
	정규성검정	0.0005	0.0001	0.0987	0.3273	0.1006	0.2055
	S.D.	0.2118	0.2206	0.1463	0.1115	0.0829	0.0710

〈 표 2 〉 공정분포가 정규분포를 하는 경우

모수		$n=30$		$n=60$		$n=180$	
		원표본	붓스트랩	원표본	붓스트랩	원표본	붓스트랩
$C_p=$ 1.75	편의(평균)	0.0320	0.0298	0.0115	0.0172	0.0041	0.0039
	정규성검정	0.1441	0.0572	0.2350	0.1006	0.4990	0.1963
	S.D.	0.1568	0.1726	0.1045	0.0973	0.0610	0.0549
$C_{pk}=$ 1.667	편의(평균)	0.0259	0.0250	0.0097	0.0010	0.0025	−0.0014
	정규성검정	0.0034	0.0001	0.0830	0.0887	0.0974	0.1725
	S.D.	0.1569	0.1452	0.1091	0.0896	0.0645	0.0532
$C_{pm}=$ 1.565	편의(평균)	0.0069	0.0028	0.0030	−0.0007	0.0032	0.0015
	정규성검정	0.0001	0.0060	0.0431	0.2632	0.4002	0.5230
	S.D.	0.1629	0.1887	0.1078	0.1130	0.0632	0.0642

4. 결론

본 논문에서는 공정능력지수 C_p, C_{pk}, C_{pm}에 대한 추정량들에 있어서 극한 분포의 이론적 결과를 유도하여 붓스트랩 방법의 일치성을 제시하고, 모의실험을 통해 그 타당성을 확인하였던 바, 결과는 다음과 같이 요약할 수 있다.

첫째, 붓스트랩 방법을 적용한 붓스트랩 추정량 $\hat{C}^*_p$, $\hat{C}^*_{pk}$, $\hat{C}^*_{pm}$의 극한 분포들이 구체적으로 유도 · 증명되었고,

둘째, 2절에서 제시한 추정량의 일치성 및 정규성을 모의실험을 통해 확인하였던 바, 추

정량들은 〈표 1〉과 〈표 2〉를 통해서 알 수 있듯이 대체적으로 표본이 커지면서 어떤 경우에서나 각각의 모수에 수렴하고 정규분포에 따른다고 할 수 있음을 알 수 있었다 (붓스트랩 방법의 일치성).

끝으로 본 논문에서 제시된 내용을 바탕으로 보다 효율적인 구간추정 등의 연구가 요구되며, 더나아가 공정능력지수 C_{pmk}, C_{jpk}, C^{+}_{pm}등에 대한 극한 분포이론 및 응용에 관한 연구가 기대된다.

참고문헌

[1] Beran, R. (1984), "Bootstrap methods in statistics," *Jahresberichtr der Deutschen Mathematiker-Vereiningung*, Vol. 86, pp. 14-30.

[2] Bickel, P. J. and Freedman, D. A. (1981), "Some Asymptotic Theory for the Bootstrap," *Annals of Statistics*, Vol. 9, pp. 1196-1217.

[3] Chan, L. K. Cheng, S. W. and Spiring, F. (1988), "A New Measure of Process Capability: Cpm," *Journal of Quality Technology*, Vol. 20, pp. 162-175.

[4] Chan, L. K., Xiong, Z. and Zhang, D. (1990), "On the Asymptotic Distributions of Some Process Capability Indices," *Communications in Statistics-Theory and Methods*, Vol. 19(1), pp. 11-18.

[5] Efron, B. (1982), "The Jackknife, the Bootstrap and Other Resampling Plans," *Society for Industrial and Applied Mathematics CBMS-- National Science Foundation Monograph*, p. 38.

[6] Efron, B. and Tibshirani, R. (1986), "Bootstrap Methods for Standard Errors, Confidence Intervals, and Other Measures of Statistical Accuracy," *Statistical Science* 1, pp. 54-77.

[7] Efron, B. (1987), "Better Bootstrap Confidence Intervals," *Journal of the American Statistical Association*, Vol. 82, No. 397, pp. 171-200.

[8] Franklin, L. A. and Wasserman, G. (1991), "Bootstrap Confidence Interval Estimates of C_{pk}: An Introduction," *Communications in Statistics-simulations and computer*, Vol. 20, pp. 231-242.

[9] Franklin, L. A. and Wasserman, G. (1992), "A Note on the Conservative Nature of the Tables of Lower Confidence Limits for C_{pk} with a Suggested Correction," *Communications in Statistics-simulations and computer*, Vol. 21, No. 4, pp. 926-932.

[10] Hall, P. (1988), "Theoretical Comparison of Bootstrap Confidence Intervals," *Annals of Statistics*, Vol. 16, No. 3, pp. 927-953.

[11] Kane, V. E. (1986), "Process Capability Indices," *Journal of Quality Technology*, Vol. 18, pp. 41-52.

[12] Mallows, C. L. (1972), "A note on Asymptotic Joint Normality," *Annals of Math. Statistics*, Vol. 43, pp. 508-515.

[13] Pearn, W. L., Kotz, S. and Johnson, N. L. (1992), "Distributional and Inferential Process Capability Indices," *Journal of Quality Technology*, Vol. 4, No. 4, pp. 216-231.

[14] Serfling, R. J. (1980), *Approximation Theorems of Mathematical Statistics*, John Wiley & Sons.

[15] Taguchi, G. and Wu, Y. (1985), *Introduction to Off-Line Quality Control*, Central Japan Quality Control Association.