▩ 연구논문

지수수명분포에 대한 가속수명시험 샘플링검사방식의 설계: 제 II종 관측중단의 경우+

전영록
경남대학교 전산통계학과

Design of Accelerated Life Test Sampling Plans for Exponential Distribution under Type II Censoring

Young Rok Chun
Dept. of Computer Science and Statistics, Kyungnam University

Abstract

This paper considers the design of life test sampling plans based on Type II censored accelerated life tests. The lifetime distribution of products is assumed to be exponential. An estimator of acceleration factor between use condition stress and an accelerated level of stress higher than use condition stress is assumed to be known. The critical value for lot acceptance and the number of failure before censoring which satisfy the producer's and consumer's risk requirements are determined. The properties of the proposed life test sampling plans are investigated.

1. 서론

샘플링검사는 제품의 합격여부를 결정하기 위해서 널리 사용된다. 특히 제품의 품질특성치가 수명일 때 제품의 합격여부를 결정하기 위해서는 수명시험 샘플링(life test sampling)검사를 수행하며, 수명시험 샘플링검사를 신뢰성샘플링(reliability sampling) 검사라 부르기도 한다. 수명시험 샘플링검사는 로트(lot)로 부터 랜덤추출한 제품들을 동시에 시험하여 미리 정해진 시점까지 고장시간을 관측하거나 (제I종 관측중단), 주어진 개

+이 논문은 1994년도 경남대학교 학술연구조성비에 의하여 작성된 것임.

수의 고장이 관측될 때 까지 고장시간을 관측하여 (제II종 관측중단) 로트의 합격여부를 판정한다. 이때 시험 중 고장난 제품에 대해서는 새로운 제품으로 교체해서 시험하는 방법(sampling plans with replacement)과 교체하지 않는 방법(sampling plans without replacement)이 있다.

수명시험 샘플링검사에 대해서는 지금까지 많은 연구가 수행되었다. Epstein과 Sobel(1953, 1955), Epstein(1954), Aroian(1964), Bulgren과 Hewette(1973), Fairbanks(1988) 등은 수명이 지수분포(exponential distribution)를 따를 때 수명시험 샘플링검사를 제안하였다. 미국방성 품질관리 및 신뢰성 핸드북(Quality Control and Reliability Handbook) H108(1960)에서는 제I종 관측중단, 제II종 관측중단 그리고 축차시험(sequential test)에서 전자부품에 대한 수명시험 샘플링검사를 설명하고 있다.

와이블(Weibull) 수명분포에 대한 샘플링검사에 대해서는 미국방성 품질관리 및 신뢰성 기술보고서(U.S. Defense Department of Quality Control and Reliability Technical Report) TR-3(1961), TR-4(1962), TR-6(1963)에 제안되어 있으며, Harter와 Moore(1976)는 MIL-STD-781B(1967)를 수정한 샘플링검사를 제안하였다. Fertig와 Mann(1980)은 제II종 관측중단의 경우에 최량불변추정량(best linear invariant estimator)를 이용한 샘플링검사를 제안하였고, Schneider(1989)는 제II종 관측중단된 경우에 최우추정량(maximum likelihood estimator)을 이용한 샘플링검사방식을 제안하였다.

그러나, 앞의 수명시험 샘플링검사는 제품의 사용조건에서 시험하는 경우에 대한 것이므로 고신뢰도의 제품에 대해서는 긴 시험시간 혹은 많은 시험제품이 소요되어 현실적이지 못한 경우가 많다. 이를 극복하는 하나의 방편으로 제품의 사용조건 보다 열악한 조건에서 시험하여 제품의 고장정보를 빨리 얻고 이를 이용해서 사용조건에서의 수명을 추론하는 가속수명시험(accelerated life testing)이 고려될 수 있으며 Wallace(1985)는 MIL-STD-781의 개선 방향으로 가속수명시험의 도입을 강조하였다. 가속수명시험에 대해서 지금까지 많은 연구가 수행되었다. 가속수명시험 자료의 분석과 시험방법에 대해서 Nelson(1990)은 기존의 연구결과들을 체계적으로 정리하였다. 이러한 가속수명시험 기법을 샘플링검사에 도입하여 Yum과 Kim(1990)은 수명이 지수분포를 따르는 경우에 제II종 관측중단하의 두 수준 가속수명시험으로 로트의 합격여부를 판정하는 가속수명시험 샘플링검사계획을 제안하였고, Hsiesh(1994)는 이를 개선하여 샘플링검사계획을 쉽게 구하는 절차를 제안하고, 총고장관측개수를 최소화하는 최적 샘플링검사계획을 구하였다. Bai et al.(1993)은 제품의 수명분포가 와이블 및 대수정규(lognormal)분포인 경우에 대해서 제II종 관측중단하의 가속수명시험 샘플링검사방식을 제안하였고, Bai et al.(1995)에서는 이를 개선하여 각 스트레스 수준에서의 시험종결시점의 기대값이 동일하도록 하는 가속수명시험 샘플링검사방식을 제안하고 있다.

Yum과 Kim(1990), Bai et al.(1993, 1995)이 제안한 가속수명시험 샘플링검사계획은 수명과 스트레스 수준이 대수선형관계(log-linear relationship)가 있다는 가정하에서 구한 것이고, 만일 이 관계식의 가정이 현실적이지 못할 경우에는 검사오류가 커지게 된다. 가속계수(acceleration factor)는 제품의 사용조건과 가속조건에서의 수명시간의 비율을 나타낸 것으로서 (1) 물리·화학적 이론으로부터 직접 계산하는 방법, (2) 수명과 스트레스

수준과의 관계식을 가정할 수 있는 경우에는 가속수명시험자료로 통계적으로 추정하는 방법, (3) 수명과 스트레스 수준과의 관계식의 가정이 현실적이지 못할 경우에는 제품의 사용조건과 하나의 가속조건에서 시험하는 부분가속수명시험(partially accelerated life testing)자료로 추정하는 방법 등으로 구할 수 있다[Nelson(1990, pp. 253-254)]. 그리고 샘플링검사로 로트의 합격여부를 판정하는 제품은 대부분 대량으로 계속 생산되는 제품이고, 이런 제품은 가속수명시험이나 부분가속수명시험으로 가속계수를 통계적으로 추정할 수 있는 경우가 많다.

가속계수의 추정치를 구할 수 있는 경우에는 두 개의 가속조건에서 시험하는 것 보다 하나의 가속조건에서 시험하여 로트의 합격여부를 판정하는 것이 시험시간이나 비용의 측면에서 더 유리하다고 볼 수 있다. 따라서 본 연구에서는 제품의 수명이 지수분포를 따르고 주어진 가속 스트레스 수준에서의 가속계수의 값을 과거 자료를 이용하여 통계적으로 추정이 가능한 경우와 이론적으로 계산할 수 있는 경우에 대해서 하나의 가속조건에서 수명시험을 하여 로트의 합격여부를 결정하는 가속수명시험 샘플링검사방식을 제안한다. 관측중단의 형태로 미리 정해진 개수의 고장이 관측되었을 때 시험을 종결하는 제II종 관측중단을 고려하여 생산자 요구조건(producer's risk requirement)과 소비자 요구조건(consumer's risk requirement)을 만족하는 합격판정을 위한 임계치(critical value)와 고장관측개수(number of failures before censoring)를 결정하고 제안한 샘플링검사 방식의 성질을 규명한다.

2. 모형

2.1 기호 및 가정

〈기호〉

n 샘플의 크기

s_0 사용조건에서의 스트레스 수준

s 스트레스 수준

$\theta(s)$ 스트레스 수준 s에서 제품의 평균수명

$\varphi(s)$ 스트레스 수준 s에서 가속계수

T 사용조건에서 제품의 수명

Y 스트레스 수준 s에서 제품의 수명

r^* 고장관측 개수

C^* 합격판정을 위한 임계치

α 생산자 위험

β 소비자 위험

〈가정〉

본 연구에서 가정한 상황은 다음과 같다.

(1) 제품의 수명을 T라 할 때, T는 지수분포를 따른다.

(2) 제품의 수명분포의 형태는 스트레스 수준의 변화에 따라 달라지지 않는다. 다만, 모수의 값만 스트레스 수준에 따라 변화한다. 즉, 스트레스 수준 s에서 수명의 확률밀도함수 $f(t)$는

$$f(t) = \frac{1}{\theta(s)} \exp(-t/\theta(s)),\ t \geq 0 \tag{1}$$

이다. 여기서 $\theta(s)$는 스트레스 수준 s에서 평균수명이다.

(3) 각 제품의 수명은 통계적으로 서로 독립이다.

2.2 가속 모형

가속조건(accelerated condition)에서 시험한 자료를 사용조건(use condition)에서의 수명추정에 이용하기 위해서는 가속조건과 사용조건에서의 수명의 관계를 나타내는 모형이 필요하며 흔히 사용되는 모형으로서 가속고장시간모형(accelerated failure time model)과 비례고장률모형(proportional hazard model)이 있다. 본 연구에서는 가속고장시간모형을 사용한다. 비례고장률모형에 대해서는 Lawless(1982)를 참고할 수 있다. 그러나 지수분포하에서는 가속고장시간모형에서 얻어진 결과와 비례고장률모형에서 얻어진 결과가 동일하게 됨을 보일 수 있다.

$R(t;s)$를 스트레스 수준이 s일 때 제품의 신뢰도함수(reliability function)라 할 때 가속고장시간모형은

$$R(t;s) = R_0(\varphi(s)t) \tag{2}$$

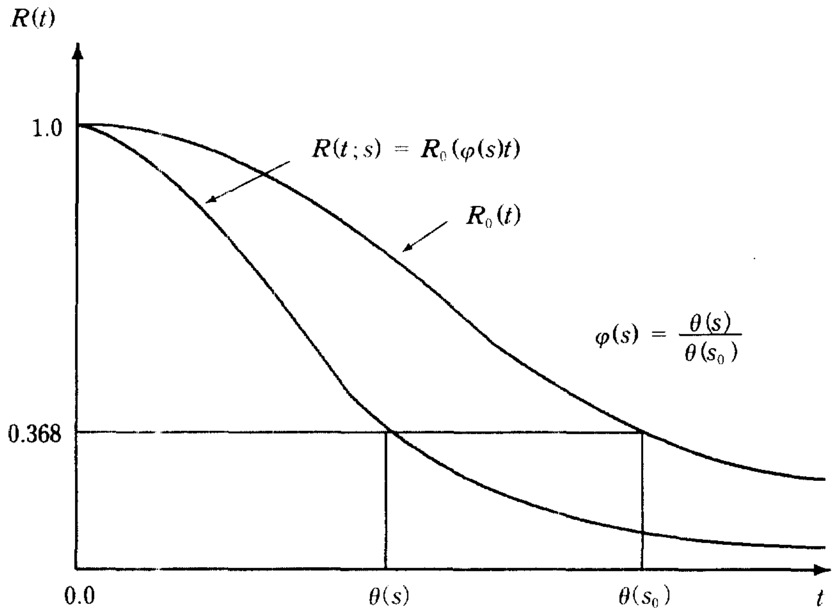
로 정의된다. 여기서 $R_0(\cdot)$는 사용조건에서 제품의 신뢰도함수로서 지수분포의 경우 $R_0(t) = \exp(-t/\theta(s_0))$ 이고, $\varphi(s)$는 스트레스 수준이 높아짐에 따라 줄어드는 수명의 비율을 나타내는 것으로 가속계수(acceleration factor)라 한다. 지수분포의 경우 식(2)는

$$\begin{aligned} R(t;s) &= \exp\left(-\frac{\varphi(s)t}{\theta(s_0)}\right) \\ &= \exp\left(-\frac{t}{\theta(s_0)/\varphi(s)}\right) \end{aligned} \tag{3}$$

로 나타낼 수 있고, 스트레스 수준 s에서의 평균수명이 $\theta(s)$이므로, 가속계수 $\varphi(s)$는

$$\varphi(s) = \frac{\theta(s_0)}{\theta(s)} \tag{4}$$

로 얻어진다. 〈그림 1〉은 가속고장시간모형에서 $R_0(t)$와 $R(t;s)$의 관계를 그림으로 나타낸 것이다.



〈 그림 1 〉 가속고장시간모형

가속계수는 스트레스 수준의 함수로서 스트레스 수준이 높으면 크게 되는 값이며 주어진 스트레스 수준에서 일정한 값이다.

2.3 수명시험 샘플링검사 : 제II종 관측중단의 경우

제품수명이 지수분포를 따르는 경우에 대한 수명시험 샘플링검사는 관측중단의 형태에 따라 여러 종류가 있다. 여기서는 제II종 관측중단의 경우에 대한 수명시험 샘플링검사의 이론적 배경을 살펴본다.

α와 β(단, $0<\alpha$, $\beta<1$)를 각각 생산자 위험(producer's risk)과 소비자 위험(comsumer's risk)이라 할 때, 평균수명에 근거한 수명시험 샘플링검사는 평균수명 $\theta \geq \theta_0$인 로트가 적어도(at least) $1-\alpha$의 확률로 합격되고(생산자 요구조건), 평균수명 $\theta \leq \theta_1$(단, $\theta_1 < \theta_0$)인 로트는 기껏해야(at most) β의 확률로 합격되도록 하는(소비자 요구조건) 방식이다.

제품의 수명이 평균 θ인 지수분포를 따른다고 하자. 로트로 부터 랜덤추출한 n개의 제품으로 시험하여 얻은 처음 r개의 관측된 고장시간을 $t_{(1)}, t_{(2)}, \cdots, t_{(r)}$ 이라 할 때 $t_{(1)}, t_{(2)}, \cdots, t_{(r)}$과 $t_{(r)}$ 시점에서 관측중단된 $(n-r)$개의 자료로 부터 구한 θ의 최소분산불편추정량(minimum variance unbiased estimator)은 $\hat{\theta}=TTT/r$ 이다. 여기서 $TTT=\sum_{i=1}^{r} t_{(i)}+(n-r)t_{(r)}$로서 총시험시간(total time on test)을 나타낸다. 그리고 $2r\,\hat{\theta}/\theta$가 자유도 $2r$인 카이제곱분포(χ^2-distribution)를 따름을 보일 수 있다[Lawless(1982, p. 103)]. 제II종 관측중단 샘플링검사방식은 이 결과로 부터 유도된다. 즉, $\hat{\theta} \geq C$이면 로트를 합격시키고, C의

값을 생산자요구조건을 만족하도록 결정한다. $\chi^2(\nu, \alpha)$를 자유도 ν인 카이제곱분포의 제 100α 백분위수라 할 때 생산자요구조건을 만족하는 C의 값은

$$C = \frac{\theta_0 \chi^2(2r, \alpha)}{2r} \tag{5}$$

이고, 고장을 관측하는 개수 r은 소비자 요구조건이 만족되도록 결정하며 다음식이 만족되면 된다.

$$\frac{\chi^2(2r, \alpha)}{\chi^2(2r, 1-\beta)} = \frac{\theta_1}{\theta_0} \tag{6}$$

또한, 식(6)을 만족하는 r의 값은 근사식 $\chi^2(\nu, \alpha) \simeq (z_\alpha + \sqrt{2\nu})^2/2$를 이용해서 구하면

$$r \simeq \left\{ \frac{\sqrt{\theta_1}\, z_{1-\beta} - \sqrt{\theta_0}\, z_\alpha}{2(\sqrt{\theta_1} - \sqrt{\theta_0})} \right\}^2 \tag{7}$$

로 구할 수 있다. 여기서 z_α는 표준정규분포(standard normal distribution)의 제 100α 백분위수이다. 따라서 제II종 관측중단의 경우 샘플링검사방식은 식(5)와 (6)으로 완전히 결정된다. 이들 내용에 대한 더 자세한 설명은 Grosh(1989, pp. 203-209)를 참고할 수 있다. 표본의 크기 n은 샘플링 검사방식에 영향을 주지 않으므로 $n \geq r$ 이면 충분하지만 표본의 크기는 시험의 종결시점까지 걸리는 시간에 영향을 준다. 즉, 시험의 종결시점은 r개의 고장이 관측되는 시점 $t_{(r)}$로서 확률변수이고, 기대시험시간(expected test time, ETT)은

$$ETT \equiv E(t_{(r)}) = \theta \sum_{i=1}^{r} \frac{1}{n-i+1} \tag{8}$$

가 됨을 보일 수 있다[Lawless(1982, p. 120)]. 식(8)에서 보면 기대시험시간은 n에 따라 감소함을 알 수 있다. Epstein과 Sobel(1953)은 $n=r$인 경우과 $n>r$인 경우에 대한 기대시험시간의 비율을 표로서 제시하여 표본 크기의 선택에 참고할 수 있도록 한 바 있으나, 표본크기의 선택은 시험제품의 가격이나 시험에 드는 비용 등 경제적인 관점에서 결정되는 것이 보통이다.

품질관리 및 신뢰성 핸드북 H108(1960)은 지수수명분포에 대한 신뢰성 샘플링검사방식으로서 α와 β의 값과 θ_1/θ_0의 값에 따른 코드명칭(code designation)이 표(H108의 표2A-1)로서 주어져 있으며, 이 코드명칭을 이용하여 수명시험방식(제I종 관측중단, 제II종 관측중단, 축차시험)에 따라 샘플링검사에 필요한 값들을 구할 수 있는 표가 제시되어 있다. 제II종 관측중단의 경우에는 코드명칭에 따라 고장관측개수 r과 기각치 C와 θ_0의 비율

C/θ_0를 구할 수 있는 표(H108의 표2B-1)와 α, β, θ_1/θ_0의 조합에 대해 r과 C/θ_0를 직접 구할 수 있는 표(H108의 표2B-5)가 주어져 있고, 생산자와 소비자의 요구조건 α, β, θ_0, θ_1이 주어지면 이들 표를 이용하여 쉽게 샘플링검사에 필요한 값 r과 C를 구할 수 있다.

3. 가속수명시험 샘플링 검사방식

가속수명시험은 수명시험을 제품의 사용조건 보다 높은 스트레스 수준에서 시험하는 수명시험방식이다 두 개의 가속수준에서 시험하여 로트의 합격여부를 판정하는 가속수명시험 샘플링검사에 대해서는 Yum과 Kim(1990), Bai et al.(1993, 1995)이 연구한 바 있다. 그러나, 대량으로 계속 생산되는 제품의 경우에는 가속수명시험 혹은 부분가속수명시험으로 가속계수를 추정하고 추정된 가속계수를 이용하여 하나의 가속조건에서 시험하여 로트의 합격여부를 판정할 수 있다. 여기서는 과거 자료를 이용하여 가속계수를 추정할 수 있는 경우와 가속계수를 이론적으로 구할 수 있는 경우에 대해서 하나의 가속조건에서 시험하는 가속수명시험 샘플링검사방식을 고려한다.

3.1 시험방법 및 결정변수

스트레스 수준 s에서의 가속계수 $\varphi(s)$가 주어진 경우의 샘플링검사는 스트레스 수준 s에서 수명시험을 수행하여 그 결과로서 로트의 합격여부를 결정한다. 즉, 로트에서 랜덤 추출한 n개의 제품을 스트레스 수준 s에서 시험을 시작하여 미리 정해진 고장개수 r개의 고장이 발생하면 시험을 종결하고, 시험종결시점 까지 얻은 자료로 로트의 합격여부를 결정한다.

로트의 합격여부는 스트레스 수준 s에서의 평균수명 $\theta(s)$의 추정치 $\hat{\theta}(s)$를 이용하여 $\hat{\theta}(s)$가 임계치 C^* 보다 크거나 같으면 로트를 합격시키고 아니면 불합격 시킨다. 따라서 가속계수 기지의 경우 가속수명시험 샘플링검사방식의 설계에서 결정해야할 변수는 생산자 및 소비자요구조건을 만족시키는 임계치 C^*와 고장관측개수 r^*이 된다.

3.2 $\theta(s_0)$의 추정 및 추정량의 분포

로트로 부터 랜덤추출한 n개의 제품을 스트레스 수준 s에서 시험했을 때 각 제품의 수명은 평균 $\theta(s)$인 지수분포를 따르고 서로 독립이다. $y_{(1)}$, $y_{(2)}$, $\cdots$, $y_{(r)}$을 n개의 제품으로 스트레스 수준 s에서 시험했을 때 처음 r개의 고장시간이라 할 때 $\theta(s)$의 최소분산불편추정량은

$$\hat{\theta}(s) = \frac{\sum_{i=1}^{r} y_{(i)} + (n-r)y_{(r)}}{r} \tag{9}$$

이고, $2r\hat{\theta}(s)/\theta(s)$는 자유도 $2r$인 카이제곱분포를 따른다.

식(4)에서 사용조건에서의 평균수명 $\theta(s_0)$는 $\theta(s_0) = \varphi(s)\theta(s)$이고 $\varphi(s) = \varphi_0(s)$로 알려진

상수인 경우 $\hat{\theta}(s_0)=\varphi_0(s)\hat{\theta}(s)$가 된다. $\varphi(s)$를 모를 경우에는 사전시험(preliminary test)이나 과거자료를 이용하여 $\varphi(s)$의 추정량과 추정량의 분산을 구할 수 있다. $\varphi(s)$의 추정에 대해서는 다음절에서 다루어질 것이다. $\varphi(s)$의 추정량을 $\varphi_e(s)$라 하면 $\varphi_e(s)$는 평균 $\varphi_0(s)$, 분산 $\sigma^2(s)$인 어떤 분포를 따른다고 가정할 수 있다. 따라서 추정량 $\varphi_e(s)$를 사용하여 $\theta(s_0)$의 추정량으로

$$\hat{\theta}(s_0) = \varphi_e(s)\,\hat{\theta}(s) \tag{10}$$

을 사용할 수 있다.

$\hat{\theta}(s_0)$의 확률분포는 $\varphi_e(s)$의 분포가 알려져 있지 않고, $\hat{\theta}(s)$와 $\varphi_e(s)$의 곱의 형태로 표현되므로 정확한 분포를 구하는 것은 불가능하다. 그러나 $\hat{\theta}(s_0)$는 평균의 추정량이므로 중심극한정리를 고려하면 점근적(asymptotically)으로 정규분포를 따른다고 볼 수 있다. 지수분포의 경우 $\hat{\theta}(s_0)$는 항상 양의 값을 가지고, 대수변환(log transformation)한 $\ln(\hat{\theta}(s_0))$도 표본의 크기가 큰 경우 점근적으로 정규분포를 따른다고 가정할 수 있다(지수분포의 경우 고장을 관측한 자료의 개수 r이 대략 15 보다 크면 평균 θ의 최우추정량 $\hat{\theta}$와 $\ln(\hat{\theta})$는 대략적으로 정규분포를 따른다고 할 수 있음[Nelson(1982, pp. 251-253)]).

$\mu=\ln(\theta(s_0))$라 하면 $\mu=\ln(\varphi_0(s))+\ln(\theta(s))$이고 μ의 추정량은 $\hat{\mu}=\ln(\varphi_e(s))+\ln(\hat{\theta}(s))$이다. $\varphi_e(s)$와 $\hat{\theta}(s)$가 서로 통계적으로 독립이라고 하면 $\hat{\mu}$의 분산은 $Var(\hat{\mu})=Var(\ln(\varphi_e(s)))+Var(\ln(\hat{\theta}(s)))$이다. $Var(\varphi_e(s))=\sigma^2(s)$이고, $Var(\hat{\theta}(s))=\theta^2(s)/r$이므로 테일러전개식(Taylor's formula)을 이용하여 점근분산을 구하면

$$Var(\hat{\mu}) \simeq \left(\frac{\sigma(s)}{\varphi_0(s)}\right)^2 + \frac{1}{r} \tag{11}$$

이다. $\phi(r)=(\sigma(s))/\varphi_0(s))^2+1/r$라 두면 $\hat{\mu}$는 점근적으로 평균 μ, 분산 $\phi(r)$인 정규분포를 따른다. 즉,

$$\frac{\hat{\mu}-\mu}{\sqrt{\phi(r)}} \mathrel{\dot{\sim}} N(0,\ 1) \tag{12}$$

이다. 그리고 $\phi(r)$의 추정치는 $\hat{\phi}(r)=(\hat{\sigma}(s)/\varphi_e(s))^2+1/r$ 이다.

3.3 샘플링검사방식의 설계

식 (12)의 점근분포를 이용한 가속수명시험 샘플링검사는 다음과 같이 유도된다. $\theta=\theta(s_0)$라 하자. 가설 H_0: $\theta \ge \theta_0$ 대 H_1: $\theta<\theta_0$는 가설 H_0: $\ln(\theta) \ge \ln(\theta_0)$ 대 H_1: $\ln(\theta) < \ln(\theta_0)$와 동등함은 자명한 사실이다. 따라서 평균수명 $\theta \ge \theta_0$인 로트는 적어도 $1-\alpha$의 확률로 합격시키고, 평균수명 $\theta < \theta_1$(단, $\theta_0 > \theta_1$)인 로트는 기껏해야 β의 확률로 합격되도록

하는 샘플링검사 방식은 $\mu_0 = \ln(\theta_0)$, $\mu_1 = \ln(\theta_1)$라 할 때, $\mu=\mu_0$에서 합격확률이 $1-\alpha$, $\mu=\mu_1$에서 합격확률이 β가 되도록 기각역과 고장관측개수 r을 결정하면 된다. $\mu=\mu_0$에서 합격할 확률이 $1-\alpha$가 되도록 하기 위해서는

$$P\{\hat{\mu} \geq C_0 \mid \mu=\mu_0\} = P\left\{\frac{\hat{\mu}-\mu_0}{\sqrt{\phi(r)}} \geq \frac{C_0-\mu_0}{\sqrt{\phi(r)}}\right\} = 1-\alpha \tag{13}$$

를 만족해야 한다. $(\hat{\mu}-\mu_0)/\sqrt{\phi(r)} \doteq N(0, 1)$ 이므로, 식 (13)을 만족하는 C_0의 값은

$$C_0 = \mu_0 + z_\alpha \sqrt{\phi(r)} \tag{14}$$

로 구할 수 있고, 로트의 합격영역은 $\hat{\mu} = \ln(\varphi_e(s)) + \ln(\hat{\theta}(s)) > C_0$로 부터

$$\hat{\theta}(s) \geq \frac{\theta_0}{\varphi_e(s)} \exp(z_\alpha \sqrt{\phi(r)}) \tag{15}$$

이다. 소비자 요구조건을 만족하기 위해서는 $\mu=\mu_1$에서 합격확률이 β가 되어야 하므로

$$P\{\hat{\mu} \geq C_0 \mid \mu=\mu_1\} = P\left\{\frac{\hat{\mu}-\mu_1}{\sqrt{\phi(r)}} \geq \frac{C_0-\mu_1}{\sqrt{\phi(r)}}\right\} = \beta \tag{16}$$

이다. 즉 $(C_0-\mu_1)/\sqrt{\phi(r)} = (\mu_0-\mu_1)/\sqrt{\phi(r)} + z_\alpha = z_{1-\beta}$로 부터

$$\begin{aligned}\phi(r) &= \left(\frac{\mu_0-\mu_1}{z_{1-\beta}-z_\alpha}\right)^2 \\ &= \left(\frac{\ln(\theta_0/\theta_1)}{z_{1-\beta}-z_\alpha}\right)^2 \end{aligned}\tag{17}$$

이고, 고장관측계수 r^*은

$$r^* = \left\{\left(\frac{\ln(\theta_0-\theta_1)}{z_{1-\beta}-z_\alpha}\right)^2 - \left(\frac{\sigma(s)}{\varphi_e(s)}\right)^2\right\}^{-1} \tag{18}$$

이다. 그리고 식 (15)에서 임계치 C^*는

$$C^* = \frac{\theta_0}{\varphi_0(s)} \exp(z_\alpha \sqrt{\phi(r^*)}) \tag{19}$$

이다. 따라서 샘플링검사는 다음과 같이 한다. 로트로 부터 $n(\geq r^*)$개의 제품을 랜덤 추출하여 스트레스 수준 s에서 r^*개의 고장이 관측될 때까지 시험하고, 식 (10)을 이용하여 $\hat{\theta}(s)$를 계산한 다음 $\hat{\theta}(s) \geq C^*$ 이면 로트를 합격시킨다.

가속계수가 이론적으로 주어지는 경우에 대해서 살펴보자. 스트레스 수준 s에서의 가속계수가 $\varphi_0(s)$로 주어졌을 때 $\hat{\theta}(s_0) = \varphi_0(s)\ \hat{\theta}(s)$ 이고, $2r\hat{\theta}(s_0)/\ \theta(s_0)$는 자유도 $2r$인 카이제곱분포를 따르게 된다. 따라서 로트의 합격 영역은 $\hat{\theta}(s_0) \geq \theta_0 \chi^2(2r, \alpha)/(2r)$이 되고, 고장관측계수는 식(6)을 만족하도록 구한다. 합격 영역을 가속조건에서의 평균수명의 추정치로 나타내면

$$\hat{\theta}(s) \geq \frac{\theta_0 \chi^2(2r, \alpha)}{2r\varphi_0(s)} \tag{20}$$

이다. 따라서 임계치 $C^* = \theta_0 \chi^2(2r, \alpha)/(2r\varphi_0(s))$ 이다.

4. 예제 및 분석

4.1 가속계수의 추정

가속계수는 가속수명시험 혹은 부분가속 수명시험 자료를 이용해서 추정할 수 있으며, 경우에 따라서는 가속계수가 알려진 경우도 있다. 먼저 가속수명 시험자료를 이용하는 경우에 대해서 알아 본다. 가속수명 시험에서는 제품수명과 스트레스 수준과의 관계식을 가정해야 하는데, 일반적으로 사용되는 관계식은 역거듭제곱 모형(inverse power law model)과 아레니우스 모형(Arrhenius reaction law model)이다. 지수수명분포에서 역거듭제곱모형과 아레니우스모형은 평균수명과 스트레스 수준의 관계를

$$\theta(s) = \begin{cases} C/s^P, & \text{역거듭제곱모형} \\ \exp(-A+B/s), & \text{아레니우스모형} \end{cases} \tag{21}$$

로 가정한다. 여기서 s는 스트레스 수준, C, P, A, B는 추정해야할 모수이다. 따라서 스트레스 수준 s에서의 가속계수 $\varphi(s)$는 식(4)로 부터

$$\varphi(s) = \begin{cases} (s/s_0)^P, & \text{역거듭제곱모형} \\ \exp(B(1/s_0 - 1/s)), & \text{아레니우스모형} \end{cases} \tag{22}$$

가 됨을 알 수 있다. 여기서 s_0는 사용조건에서의 스트레스 수준이다. 식(21)의 모수 P와 B는 가속수명시험 자료로 추정할 수 있다. P, B의 추정치를 $\hat{P}$, $\hat{B}$라 하고 추정치의 분산을 각각 σ_P^2, σ_B^2라 하면 $\varphi(s)$의 추정치 $\varphi_e(s)$는

$$\varphi_e(s) = \begin{cases} (s/s_0)^{\hat{P}}, & \text{역거듭제곱모형} \\ \exp(\hat{B}(1/s_0 - 1/s)), & \text{아레니우스모형} \end{cases} \tag{23}$$

이고, $\varphi_e(s)$의 분산을 테일러 전개식을 이용하여 구하면

$$Var(\varphi_e(s)) \simeq \begin{cases} \{\varphi(s)\ln(1/s_0)\}^2\sigma_P^2, & \text{역거듭제곱모형} \\ \{\varphi(s)(1/s_0 - 1/s)\}^2\sigma_B^2, & \text{아레니우스모형} \end{cases} \tag{24}$$

이다.

부분가속수명시험은 수명과 스트레스 수준과의 관계식에 대한 가정이 어려울 때 가속계수의 추정을 위해 흔히 사용된다. 제품의 사용조건과 스트레스 수준 s에서 각각 수명시험을 수행하여 각 수준에서의 평균수명의 추정치를 구하여 식(4)를 이용하면 가속계수의 추정치를 구할 수 있다.

4.2 예제

Nelson(1990, p. 304)은 절연오일(insulating oil)의 가속수명시험 자료를 통계적으로 분석하였다. 여기서 사용한 스트레스는 전압이며, 전압과 수명이 역거듭제곱 모형의 관계가 있고, 수명분포는 와이블분포를 따른다고 가정하고 분석하였다. 그리고 이 제품의 사용조건에서의 스트레스 수준은 $s_0 = 20$(kV)이다. 분석결과 식(20)의 역거듭제곱 모형의 모수 C와 P의 추정치가 각각 $\hat{C} = 64.8$, $\hat{P} = 17.7$이고, 추정량의 점근분산은 $\widehat{Var}(\hat{C}) = 31.58$, $\widehat{Var}(\hat{P}) = 2.58$이다. 그리고 와이블분포의 형상모수(shape parameter)의 95% 신뢰한계는 (0.65, 0.92)로 주어졌으나, 이 제품의 수명이 대략적으로 지수분포를 따른다고 보고 본 연구의 결과에 적용시킨다.

식(20)을 사용하여 스트레스 수준 $s = 25$(kV)에서의 가속계수의 추정치를 구하면 $\varphi_e(25) = (25/20)^{17.7} = 51.9$이고, 식(23)으로 부터 $\varphi_e(25)$의 분산의 추정치를 구하면 $\widehat{Var}(\varphi_e(25)) = (51.9 \times \ln(25/20))^2 \times 2.58 = 346.04 = 18.6^2$이다.

생산자위험 $\alpha = 0.05$, 소비자위험 $\beta = 0.10$이고 $\theta_1/\theta_0 = 0.3$일때 가속수명시험 샘플링검사는 다음과 같이 구할 수 있다. 즉, $z_\alpha = z_{0.05} = -1.64$, $z_{1-\beta} = z_{0.90} = 1.28$이므로 식(18)에서

$$r^* = \left\{ \left(\frac{-\ln(0.3)}{1.28 + 1.64} \right)^2 - \left(\frac{18.6}{51.9} \right)^2 \right\}^{-1} = 0.04^{-1} = 25$$

이고, $\phi(25)=0.13+1/25=0.17$이다. 따라서 식(19)의 C^*는

$$C^* = \frac{\theta_0}{51.9} \times \exp(-1.645\sqrt{0.17}) = 0.0098\theta_0$$

이다. 즉, 스트레스 수준 25(kV)에서 25개 이상의 제품을 시험하여 25개의 고장이 발생하면 시험을 종결하여 $\hat{\theta}(25)$를 계산하고, 만일 $\hat{\theta}(25) \geq 0.0098\theta_0$이면 로트를 합격시킨다. 이 경우의 $r^*=25(>15)$로서 충분히 크므로 정규근사는 만족된다고 볼 수 있다.

4.3 기대시험시간의 비교

제품의 사용조건에서 샘플링검사를 하는 경우와 가속수명시험 샘플링검사에 대해서 기대시험시간 ETT를 비교한다. 사용조건에서 시험할 경우 기대시험시간 ETT_u는 식(8)에 주어져 있고, 가속수명시험을 할 경우 기대시험시간 ETT_a은

$$ETT_a = \theta(s)\sum_{j=1}^{r^*}\frac{1}{n-j+1} \tag{25}$$

로 구할 수 있다. 가속수명시험으로 감소하는 기대시험시간의 백분율(percentages of reduced expected test time: PRET)은 $PRET \equiv 100\times(ETT_u - ETT_a)/ETT_u$이고, 식(8)과 (25) 그리고 $\theta(s)=\theta(s_0)/\varphi_0(s)$로 부터

$$PRET = 100 \times \left\{1 - \frac{\sum_{j=1}^{r^*}(n-j+1)^{-1}}{\varphi_0(s)\sum_{i=1}^{r}(n-i+1)^{-1}}\right\} \tag{26}$$

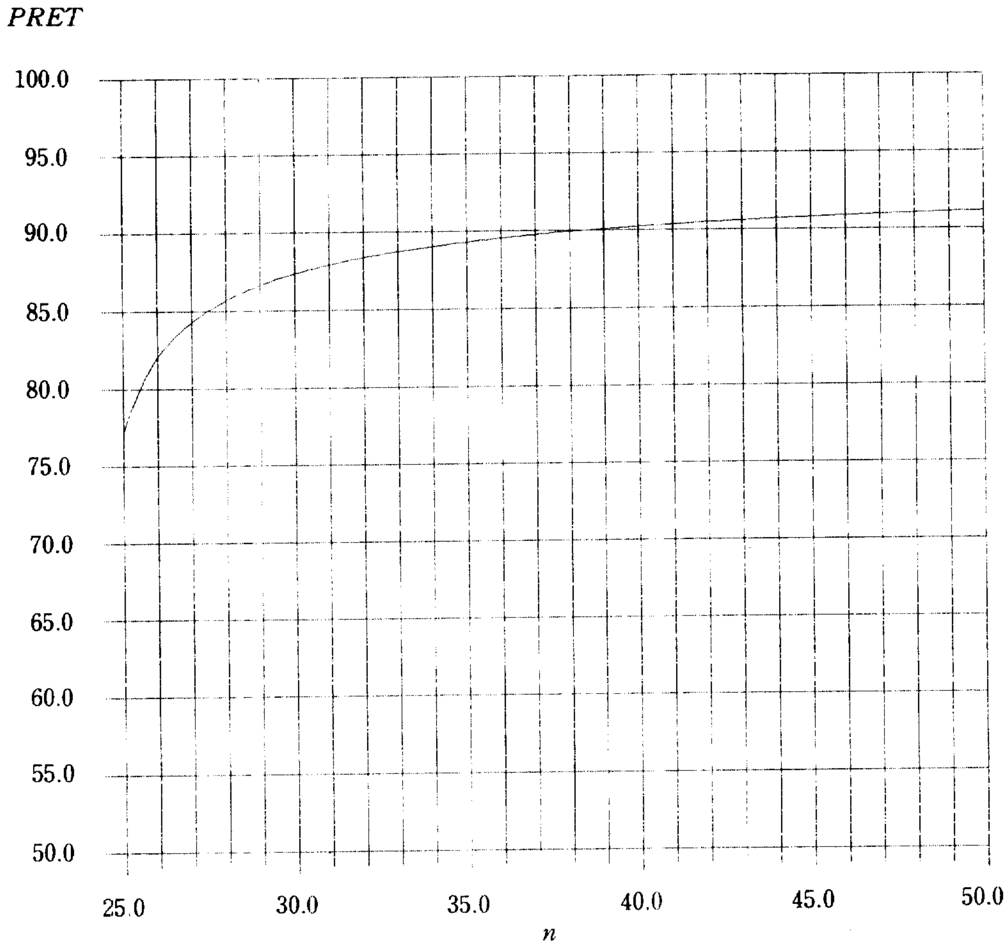
이다.

앞의 예제에 대해서 $PRET$을 계산해 보면 다음과 같다. $\alpha=0.05$, $\beta=0.10$ 그리고 $\theta_1/\theta_0=0.3$이므로 식(6)으로 부터 r을 구하면 $r=7$이다. 그리고 $\varphi_0(s)=51.9$이고 $r^*=25$이므로

$$PRET = 100 \times \left\{1 - \frac{\sum_{j=1}^{25}(n-j+1)^{-1}}{51.9\sum_{i=1}^{7}(n-i+1)^{-1}}\right\}$$

이다. 〈그림 2〉는 n의 값에 따른 $PRET$의 값을 나타낸 것이다.

〈그림 2〉에서 보면 줄어드는 기대시험시간의 비율 $PRET$의 값은 $n=25$일 때 77.08%이고 n이 커짐에 따라 점점 증가한다. 즉, 가속수명시험 샘플링 검사를 이용할 경우 시험을 종결할 때까지 걸리는 시간을 충분히 줄여 빠른 시간내에 로트의 합격여부를 판정할 수 있다. 반면에 표본의 크기는 상대적으로 크며, 이는 가속계수의 추정량의 분산에 기인한



〈 그림 2 〉 n의 값에 따른 *PRET*의 변화

것이라고 볼 수 있다. 즉 분산의 크기가 작으면 표본의 크기도 줄어든다. 가속수명시험 샘플링검사를 사용하기 위해서는 기본적으로 가속계수를 추정해야 한다. 가속계수는 앞에서 언급한 바와 같이 여러가지 방법으로 추정할 수 있으므로 가속수명시험 샘플링검사를 사용하므로서 시험에 드는 비용을 절감할 수 있을 것이다.

5. 결론

가속계수를 알고 있거나 혹은 추정할 수 있는 경우에 대해서 가속수명시험을 이용한 수명시험 샘플링검사 방법을 제안하였다. 가속계수의 추정량의 분포를 모르는 상태에서는 사용조건에서의 추정량의 분포를 구하는 것은 불가능하므로 점근적으로 정규분포를 따른다고 가정하고 샘플링검사방식을 구하였다. 통계적 엄밀성 보다는 적용가능성에 중점을

두어 샘플링검사방식을 제안하였고, 결과적으로 가속수명시험 샘플링검사방식을 사용하면 시험에 사용되는 표본의 크기는 다소 늘어나지만 시험에 소요되는 시간은 충분히 줄어든다. 통계적으로 엄밀한 샘플링검사방식의 설계를 위해서는 가속계수의 추정량의 분포를 구해야 하고 이는 가속수명시험 혹은 부분가속수명시험에서의 관측중단형태에 따라 달라진다. 가속수명시험에서 추정량의 분포로서 점근정규분포를 사용하는 것이 일반적이므로 가속계수의 추정량에 대해서 점근정규분포를 가정하는 것이 무리가 없다고 보여진다.

본 연구에서 제시한 수명시험 샘플링검사방식은 제품수명이 지수분포를 따르고, 제II종 관측중단하며 고장제품을 교체하지 않는 경우에 대한 것이다. 고장제품을 교체할 경우에는 동일한 결과를 구할 수 있으며 제품수명이 와이블 혹은 대수정규분포를 따를 경우와 제I종 관측중단의 경우에 대해서는 현재 연구를 수행중이다.

참고문헌

[1] Aroian, L. A. (1964), "Some Comments on Truncated Sequential Tests for the Exponential Distribution," *Industrial Quality Control*, Vol. 21, pp. 309-312.

[2] Bai, D. S., Chun, Y. R. and Kim, J. G. (1995), "Failure-Censored Accelerated Life Test Sampling Plans for Weibull Distribution under Expected Test Time Constraint," *Reliability Engineering and System Safety*, Vol. 50, pp. 61-68.

[3] Bai, D. S., Kim, J. G. and Chun, Y. R. (1993), "Design of Failure-Censored Accelerated Life Tst Sampling Plans for Lognormal and Weibull Distributions," *Engineering Optimization*, Vol. 21, pp. 197-212.

[4] Bulgren, W. and Hewette, J. (1973), "Double Sample Tests for Hypotheses about the Mean of an Exponential Distribution," *Technometrics*, Vol. 15, pp. 187-190.

[5] Epstein, B. (1954), "Truncated Life Tests in the Exponential Case," *Annals of Mathematical Statistics*, Vol. 25, pp. 555-564.

[6] Epstein, B. and Sobel, M. (1953), "Life Testing," *Journal of the American Statistical Association*, Vol. 48, pp. 485-502.

[7] Epstein, B. and Sobel, M. (1955), "Sequential Life Test in the Exponential Case," *Annals of Mathematical Statistics*, Vol. 26, pp. 82-93.

[8] Fairbanks, K. (1988), "A Two-Stage Life Test for the Exponential Parameter," *Technometrics*, Vol. 30, pp. 175-180.

[9] Fertig, K. W. and Mann, N. R. (1980), "Life-Test Sampling Plans for Two-Parameter Weibull Populations," *Technometrics*, Vol. 22, pp. 165-177.

[10] Grosh, D. L. (1989), *A Primer of Reliability Theory*, John Wiley & Sons, New York.

[11] Harter, M. and Moore, A. H. (1976), "An Evaluation of Exponential and Weibull Test Plans," *IEEE Transactions on Reliability*, Vol. R-25, pp. 100-104.

[12] Hsieh, H. K. (1994), "Accelerated Life Test Sampling Plans for Exponential Distribution," *Commun. Statist. – Simula.*, Vol. 23, pp. 27-41.

[13] Lawless, J. F. (1982), *Statistical Models and Methods for Lifetime Data*, John Wiley & Sons, New York.

[14] MIL-STD-781B(1967), *Reliability Tests: Exponential Distribution*, U.S. Department of Defense, Washington, D.C.

[15] Nelson, W. (1982), *Applied Life Data Analysis*, John Wiley & Sons, New York.

[16] Nelson, W. (1990), *Accelerated Testing – Statistical Models, Test Plans and Data Analyses*, John Wiley & Sons, New York.

[17] Schneider, H. (1989), "Failure-Censored Variable Sampling Plans for Lognormal and Weibull Distributions," *Technometrics*, Vol. 31, pp. 199-206.

[18] U.S. Department of Defense(1960), "Sampling Procedures and Tables for Life and Reliability Testing," *Quality Control and Reliability Handbook* (H 108), Office of the Assistant Secretary of Defense, Washington, D.C.

[19] U.S. Department of Defense(1960), "Sampling Procedures and Tables for Life and Reliability Testing Based on the Weibull Distribution(Mean life criterion)," *Quality Control and Reliability Technical Report* (TR 3), Office of the Assistant Secretary of Defense, U.S. Government Printing Office, Washington, D.C.

[20] U.S. Department of Defense(1960), "Sampling Procedures and Tables for Life and Reliability Testing Based on the Weibull Distribution(Hazard rate criterion)," *Quality Control and Reliability Technical Report* (TR 4), Office of the Assistant Secretary of Defense, U.S. Government Printing Office, Washington, D.C.

[21] U.S. Department of Defense(1960), "Sampling Procedures and Tables for Life and Reliability Testing Based on the Weibull Distribution(Reliable life criterion)," *Quality Control and Reliability Technical Report* (TR 6), Office of the Assistant Secretary of Defense, U.S. Government Printing Office, Washington, D.C.

[22] Wallace, W. E. (1985), "Present Practice and Future Plans for MIL-STD-781," *Naval Research Logistics Quarterly*, Vol. 32, pp. 21-26.

[23] Yum, B. J. and Kim, S. H. (1990), "Development of Life-Test Sampling Plans for Exponential Distributions Based on Accelerared Life Testing," *Commun. Statist. – Theory & Meth.*, Vol. 17, pp. 2735-2743.