

성층화된 축열조의 1차원모델에 대한 해석적인 해

Analytical Solutions to a One-Dimensional Model for Stratified Thermal Storage Tanks

유 호 선*, 박 이 동**
H. Yoo, E. -T. Pak

Key words : Stratification(성층), Thermal Storage Tank(축열조), Analytical Solution(해석적인 해), Laplace Transformation(라플라스변환)

Abstract

In order to establish a theoretical basis for the analyses of transient behaviors in stratified thermal storage tanks, analytical approaches to an improved one-dimensional model are made. In the present model the storage tank is treated as a finite region with an adiabatic tank exit, whereas it has been considered as a simple semi-infinite region previously. Application of the Laplace transformation and the Inversion theorem to the governing equations makes it possible to obtain an exact infinite-series solution, which is convergent only at sufficiently large time. Accordingly a complementary solution which is available for short times, i.e., the time range of this study is sought by an approximate method. The approximate solution which is rigorously validated through the examination of neglected terms in the solution procedure agrees quite well with the exact one. Moreover, it is simpler to use and more convenient to interpret the physical meaning of the solution. Comparison of the present solution with the previous ones shows relatively large difference near the tank bottom, which results from the more realistic boundary condition adopted in the present model. Some representative results by the approximate solution including effects of the Peclet number on temperature distributions are illustrated to show the utility of this study. In consequence, it is expected that the present results based on the improved model replace the foregoing ones as a new theoretical reference for studies of thermal stratification fields.

기 호 설 명

C : 역변화의 실수영역
 Fo : Fourier수, 식(5)
 H : 축열조높이
 i : $\sqrt{-1}$

n : 음이 아닌 정수
 Pe : Peclet수, 식(8)
 s, s' : Laplace변수, 변수변환된 s
 T : 온도
 t : 시간
 U : 축열조내 유속
 u : 무차원 유속, 식(8)
 x : 입구로부터 위치

* 정희원, 숭실대학교 기계공학과
** 정희원, 성균관대학교 기계공학과

그리스 문자

- α : 열확산계수
- γ, γ_n : 식(16)의 해
- θ : 무차원 온도, 식(7)
- $\bar{\theta}$: Laplace변환된 θ
- λ : 역변환에 연관된 복소변수
- μ : 식(13)으로 정의되는 변수
- μ' : 변수변환된 μ , 식(15)
- ξ : 무차원 위치, 식(6)
- τ : 무차원 시간, 식(5)

하 첨 자

- 01 : 식(19) 급수의 제1항($n=0$)
- 02 : 식(19) 급수의 제2항($n=0$)
- 11 : 식(19) 급수의 제1항($n=1$)
- 12 : 식(19) 급수의 제2항($n=1$)
- i : 축열조입구상태
- o : 초기상태

1. 서 론

열에너지의 효율적인 이용을 위한 방안으로서 축열의 중요성은 잘 인식되어 왔으며, 다양한 형태의 축열시스템이 실용화되어 있다.¹⁾ 이중 현열 축열은 잠열축열에 비하여 열밀도는 낮지만 성능 예측 및 설계가 비교적 용이한 장점 때문에 공기 조화시스템, 태양열시스템, 지역난방²⁾ 등에 널리 적용되고 있다. 현열축열에 있어서 축열물질로서 고체가 아닌 물, 부동액, 특수유일(예를들어 Therminol 66, Dowtherm A) 등 액체를 사용할 때³⁾ 축열물질은 온도에 따른 밀도변화로 인하여 성층화되며, 이러한 열성층은 축열시스템의 성능에 직접적인 영향을 미친다. 즉 시스템의 성능향상을 위해서는 운전과정동안 열성층을 최대한 잘 유지시키는 것이 중요하다.

성층축열에 관한 연구는 주로 태양열시스템과 관련하여 실험 또는 수치적인 방법에 의존하여 수행되어 왔다. 실험적인 연구⁴⁻⁷⁾의 결과 축열조를 통과하는 축열물질의 유동, 출입구효과로 인한 유체혼합, 벽면의 열전도로 인한 자연대류, 유체층내

온도구배로 인한 확산 등 열성층특성에 영향을 미치는 중요한 인자들이 규명되었으며, 이에따라 출입구의 형상변화, 유량제어, 용기내부단열 등을 통하여 성층파괴를 최소화하기 위한 방법이 모색되어 왔다. 수치해석의 경우⁸⁻¹²⁾ 실험에서 관찰된 현상에 근거하여 축열과정에 대한 모델을 정립하고 성층특성을 포함한 전체시스템의 성능을 예측하며 그 결과를 설계에 적용하고자 수행되고 있다. 이와같은 연구에서 직·간접적으로 확인되고 있는 사실은 축열조내의 과도적인 거동이 큰 오차없이 1차원적으로 기술될 수 있다는 점이다. 실제로 축열조의 성층특성 예측을 위하여 다양한 형태의 1차원모델이 제시되어 왔으며, 그 유용성 및 각각의 특징에 관해서는 Zurigat등¹³⁾이 구체적으로 취급한 바 있다. 특히, 축열조를 포함한 열시스템전체의 운전성능평가를 위한 대형 프로그램에서는 대부분 1차원 축열조모델을 채용하고 있으며, 다절점모델(multinode model)에 의한 TRNSYS가 대표적인 예이다.¹⁴⁾

한편, 단순화된 모델에 대한 해석적인 해는 축열조내의 과도적인 열적거동을 용이하게 예측하기 위해서 뿐만아니라 이론적으로 도달가능한 열성층의 정도를 제시하는 기준으로서 유용하다. 지금까지 성층축열에 주로 적용되어온 이상적인 모델은 완전성층축열로서 축열조내에는 유체혼합, 자연대류 등이 완전히 억제된 압출유동(piston flow or plug flow)^{13, 14)}이 확립되어 있으며 고온 및 저온유체사이에는 열전달이 없는 경우이다. 이에 대응하는 온도분포는 고온 및 저온유체층의 경계에서 불연속인 계단함수임을 쉽게 알 수 있다. 그러나, 실제 축열조에서 충전과정동안 적절한 방법에 의해 유동장의 교란이 충분히 억제되어 1차원적인 압출유동에 접근하였다 하여도 유체내부의 전도에 의한 열확산은 존재하기 때문에 열적으로 완전한 성층상태에 도달할 수는 없다. 즉, 압출유동시에도 열성층이 최대가 되는 이상적인 온도분포는 적어도 열확산이 고려된 연속적인 형태가 되어야 한다. 근래 다양한 형상의 분배기 또는 유량조절을 통하여 유동교란이 상당한 수준까지 억제된 충전이 구현되고 있는 점을 고려할 때⁷⁾ 실험결과의 검증을 위해서도 이론적인 기준이 필요하다. 이때 수치해석을 적용하여 전술한 온도분포를 구하기 위해서는

이론적으로 과도한 절점수가 요구되므로¹⁶⁾ 가용한 해석적인 해가 있다면 편리할 것은 분명하다.

이와같은 해석적인 해의 필요성에 비하여 해를 구하는 과정에 수반되는 수학적 어려움 때문에 Cabelli¹⁵⁾, Yoo와 Pak¹⁷⁾에 의한 1차원해를 제외하면 발표된 연구결과는 별무한 실정이다. 더욱이, 이들의 연구에서도 공통적으로 해석적인 해가 가능하도록 축열조의 출구가 입구에서 무한히 이격되어 있다는 가정을 도입하여 해석대상을 1차원 반무한 영역으로 취급하고 있다. 즉, 실제로는 입구에서 유한한 거리에 있으며 단열된 상태로 유지되는 출구조건이 이들의 모델에서는 무시되었기 때문에 출구부근의 온도분포에 불확실성이 수반될 수 밖에 없다. 본 연구는 이점을 보완함으로써 보다 개선된 축열조의 이론적 기준을 제시하기 위하여, 실제 축열조의 열적조건을 갖는 1차원모델에 대하여 해석적인 해를 구하고자 시도되었다. 엄밀해(exact solution)는 물론 적용이 용이한 근사해를 구하여 그 타당성을 검증하며, 상이한 출구조건에 따른 기존 해와의 차이를 비교·검토한다. 또한, 전형적인 경우에 대하여 결과를 예시함으로써 본 연구에서 얻어진 해의 유용성을 보이고자 한다.

2. 해 석

2.1 해석대상시스템

본 연구에서 취급한 축열조는 Fig.1에 개략적으로 도시된 것과 같이 보편적으로 사용되는 높이 H 인 수직원통형상으로서, 최초에는 온도 T_0 인 유체가 균일한 상태로 채워져 있다. 충전이 시작되면 열 원으로부터 온도 T_1 인 고온유체가 상부로 유입됨에 동시에 조내의 저온유체는 하부에서 유출된다. 유입유량 및 온도는 일정하며, 축열조는 완전단열되어 외부로의 열손실은 없다. 또한, 충전에 따른 전체 유동(bulk flow), 입구에서 유입에 따른 혼합 등 유동교란은 완전히 억제되어 있으며 벽면효과는 무시할 수 있다고 가정하여, 축열조내의 유동을 1차원 압출유동으로 취급한다. 여기서, 실험적으로 이미 입증되어 있는⁷⁾ 입구부근의 혼합은, 이상적인 모델에 대한 해석을 통하여 이론적인 기준을 제시하기 위한 본 연구에서는 무시하였으나, 축열조내의 실제 거동을 예측하기 위한 해석에는 포함

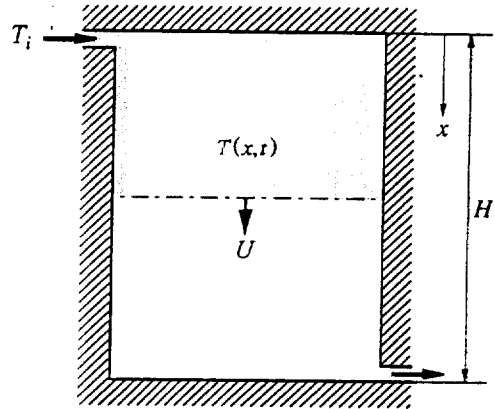


Fig.1 Schematic of the physical system.

되어야 하며 이는 별도의 연구과제이다. 한편 축열조내부의 미소유동교란에 따른 열전달의 증가는 물성치인 열확산계수 대신 유효열확산계수(effective thermal diffusivity)¹⁸⁾ 또는 분산계수(dispersion coefficient)¹²⁾를 도입함으로써 해결될 수도 있다.

이상의 가정에 근거하여 지배방정식을 유도하고 무차원화하면 다음과 같이 정리될 수 있다. 구체적인 과정은 문헌^{8, 15, 17)}에 취급되어 있으며, 특히 축열조 출구에서의 경계조건에 주의할 필요가 있다.

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} + u \frac{\partial \theta}{\partial \xi} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial \xi^2} \quad (1)$$

$$\theta(\xi, 0) = 0 \quad (2)$$

$$\theta(0, \tau) = 1 \quad (3)$$

$$\frac{\partial \theta(1, \tau)}{\partial \xi} = 0 \quad (4)$$

여기서, 무차원변수 및 인자는 다음과 같이 정의되었다.

$$\tau = t\alpha/H^2 = Fo \quad (5)$$

$$\xi = x/H \quad (6)$$

$$\theta = (T - T_0)/(T_1 - T_0) \quad (7)$$

$$u=UH/a=Pe \quad (8) \quad \text{함수이다.}$$

식(1)에서 알 수 있듯이 1차원적인 충전과정을 지배하는 유일한 인자는 Peclet수 Pe이다. 정의로부터 Pe수는 평균유속(유량), 축열조형상 및 축열유체 열확산계수의 함수로서 물을 축열유체로 사용하는 통상적인 태양열시스템의 경우 대략 수백 정도의 값을 갖는다. 다만, 근래 유속증가에 따른 혼합효과를 억제하기 위하여 저유량을 채용하는 점과 내부교란으로 인하여 분산계수가 유체의 물성치인 열확산계수보다 크다는 점^{12, 13}을 고려하여, 본 연구에서는 Pe수의 범위를 수십정도까지 확대하여 취급하였다. 충전과정에 있어서 특성시간은 축열조를 1회 충전시키는데 소요되는 시간 즉 충전시간(turnover time or mean residence time)¹⁴ H/U 로서 무차원화하면 $1/Pe$ 가 된다. 따라서, $Pe \cdot Fo$ 즉 $u\tau$ 는 1회 충전과정에 대한 규준화된 시간(normalized time)이 된다.

2.2 엄밀해

식(1)~(4)로 표시된 지배방정식의 해를 구하기 위하여 Laplace변환을 도입하면,

$$\frac{d^2\bar{\theta}}{d\xi^2} - u\frac{d\bar{\theta}}{d\xi} - s\bar{\theta} = 0 \quad (9)$$

$$\bar{\theta}(0, s) = 1/s \quad (10)$$

$$\frac{d\bar{\theta}(1, s)}{d\xi} = 0 \quad (11)$$

와 같은 2계 선형 상미분방정식을 얻는다. 여기서 $\bar{\theta}(\xi, s)$ 는 $\theta(\xi, \tau)$ 의 Laplace변환된 형태이다. 식(9)~(11)의 해는

$$\bar{\theta}(\xi, s) = \exp[(u/2)\xi] \frac{\mu \cosh[\mu(1-\xi)] + (u/2) \sinh[\mu(1-\xi)]}{s[\mu \cosh \mu + (u/2) \sinh \mu]} \quad (12)$$

이며, 식(12) 우변의 μ 는 다음과 같이 정의된 s 의

$$\mu = [(u/2)^2 + s]^{1/2} \quad (13)$$

식(12)를 역변환하기 위하여 역변환정리(Inversion theorem)¹⁵에 대입하고 $s' = s + (u/2)^2$ 로 Laplace변수를 변환하면¹⁷⁾

$$\theta(\xi, \tau) = \frac{\exp[(u/2)\xi - (u/2)^2\tau]}{2\pi i} \int_{C-i\infty}^{C+i\infty} \frac{\exp(\lambda\tau) \{ \mu' \cosh[\mu'(1-\xi)] + (u/2) \sinh[\mu'(1-\xi)] \}}{[\lambda - (u/2)^2][\mu' \cosh \mu' + (u/2) \sinh \mu']} d\lambda \quad (14)$$

가 된다. 식(14)의 적분에서 상수 C 는 복소평면상에서 피적분함수의 모든 특이점(singularity)이 $C - i\infty$ 와 $C + i\infty$ 를 연결하는 직선의 좌측에 존재하도록 할 수 있는 충분히 큰 실수이며, 가변수(dummy variable) λ 는 s' 에 대응하는 복소수이다. 또한 식(13)의 μ 는

$$\mu' = \lambda^{1/2} \quad (15)$$

로 변환되었다. 식(14)의 피적분함수는 $\lambda = (u/2)^2$ 및 $\mu' = i\gamma_n$ ($n=1, 2, 3, \dots$)에서 단순극(simple pole)을 갖는다. 여기서, γ_n 은

$$\gamma \cot \gamma + (u/2) = 0 \quad (16)$$

의 해로서 $(u/2) \geq -1$ 이면 항상 실근을 갖게 되므로¹⁹⁾ 본 연구의 경우 γ_n 은 실수이다. 복소함수에 대한 유수정리(Residue theorem)를 적용하여 식(14)를 적분하면 최종해는 다음과 같은 무한급수의 형태로 결정된다.

$$\theta(\xi, \tau) = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\gamma_n \{ (u/2) \sin[\gamma_n(1-\xi)] + \gamma_n \cos[\gamma_n(1-\xi)] \}}{[\gamma_n^2 + (u/2)^2][\gamma_n \sin \gamma_n - (1+u/2) \cos \gamma_n]} \exp\{(u/2)\xi - [\gamma_n^2 + (u/2)^2]\tau\} \quad (17)$$

식(17)로 표시된 엄밀해는, 우변 제2항의 지수로부터 알 수 있듯이, 시간 τ 가 큰 경우 급수가 급속히 수렴하는 성질을 갖고 있다. 그러나, 본 연구의 경우 전절에서 기술하였듯이 물리적으로 의미있는 τ 의 범위는 $[0, 1/Pe]$ 이며 실제 축열조에서 Pe수는 적어도 수십이상의 크기로서 τ 가 크지 않기 때문에, 급수의 수렴성은 극히 나빠진다. 즉 $\tau \ll 1$ 일 때 식(17) 우변 둘째항의 지수는 상당한 크기의 양수(Pe수 즉 μ 에 비례하여 증가)이므로 γ_n 및 삼각함수의 값이 극히 정확하게 계산되지 않으면 급수는 발산하게 된다. 실제로 64비트급의 컴퓨터를 사용하여 $Pe=100$ 인 경우에 $[0, 1/Pe]$ 인 범위의 τ 에 대하여 안정되게 식(17)의 값을 계산하기는 곤란하였다. 따라서, 식(17)은 엄밀해로서 수학적인 의미는 부여될 수 있지만 실질적으로는 장시간해(long time solution)에 불과하므로, 본 연구와 같이 τ 가 크지 않을 때 적용가능한 실용적인 단시간해(short time solution)가 필요하다.

2.3 근사해

전절에서 기술한 필요에 따라 단시간해를 구하기 위하여 Laplace변환된 형태의 해 식(12)를 지수함수의 형태로 현시적으로 정리하면

$$\bar{\theta}(\xi, s) = \exp[(u/2)\xi] \frac{\exp(-\mu\xi) - (u/2 - \mu)/(u/2 + \mu) \cdot \exp[-\mu(2 - \xi)]}{s[1 - (u/2 - \mu)/(u/2 + \mu) \cdot \exp(-2\mu)]} \quad (18)$$

이 된다. 계속하여 이항정리(binomial theorem)²⁰⁾를 적용하여 식(18)의 분모를 급수전개하면 다음과 같이 변환된다.

$$\bar{\theta}(\xi, s) = \frac{1}{s} \exp[(u/2)\xi] \sum_{n=0}^{\infty} [(u/2 - \mu)/(u/2 + \mu)]^n \cdot \exp(-2n\mu) \times \{\exp(-\mu\xi) - (u/2 - \mu)/(u/2 + \mu) \cdot \exp[-\mu(2 - \xi)]\} \quad (19)$$

식(19) 우변의 급수를 구성하는 각 항은 일부 저차항을 제외하면 역변환이 존재하지 않기 때문에 또다른 엄밀해를 구할 수는 없다. 그러나, 식(19)와

함수형태가 유사한 무한급수를 역변환하였을 때 급수가 시간에 대하여 급속히 수렴한다는 점¹⁹⁾에 근거하여, 식(19)에서 $n=0$ 에 대응하는 항만을 취함으로써 단시간일 때 적용가능한 근사해를 구할 수 있다. 물론, 이러한 근사적인 접근에 대한 타당성은 검증되어야 한다.

식(19)에서 알 수 있듯이 우변의 급수는 n 에 따라 2개의 항을 갖으며 편의상 $n=0$ 일 때 제 1, 2항 및 $n=1$ 일 때 제1항을 각각 $\bar{\theta}_{01}$, $\bar{\theta}_{02}$ 및 $\bar{\theta}_{11}$ 로 표시하자. 전절과 유사한 적분변수변환 방법 및 알려져 있는 역변환표¹⁹⁾를 이용하여 각각에 대한 역변환을 구하면 다음과 같다.

$$\theta_{01}(\xi, \tau) = \{\operatorname{erfc}[(\xi - u\tau)/(4\tau)^{1/2}] + \exp(u\xi) \cdot \operatorname{erfc}[(\xi + u\tau)/(4\tau)^{1/2}]\} / 2 \quad (20)$$

$$\theta_{02}(\xi, \tau) = \exp(u) \cdot \{-u(\tau/\pi)^{1/2} \exp[-(2 - \xi + u\tau)^2/(4\tau)] + [1 + (2 - \xi + u\tau)(u/2)] \cdot \operatorname{erfc}[(2 - \xi + u\tau)/(4\tau)^{1/2}]\} \quad (21)$$

$$\theta_{11}(\xi, \tau) = \exp[u(1 + \xi)] \cdot \{-u(\tau/\pi)^{1/2} \exp[-(2 + \xi + u\tau)^2/(4\tau)] + [1 + (2 + \xi + u\tau)(u/2)] \cdot \operatorname{erfc}[(2 + \xi + u\tau)/(4\tau)^{1/2}]\} \quad (22)$$

여기서, 전술하였듯이 단시간해인 근사해는

$$\theta(\xi, \tau) = \theta_{01}(\xi, \tau) + \theta_{02}(\xi, \tau) \quad (23)$$

로 취하며, θ_{11} 은 근사해의 타당성을 검증하기 위하여 제시하였다.

3. 결과에 대한 고찰

3.1 근사해의 타당성 및 엄밀해와의 비교

먼저, 식(23)으로 표시된 근사해의 타당성을 검증하기로 한다. 식(19)우변의 ξ 를 포함한 2개항의 지수함수에서 지수는 n 에 대하여 각각 $-\mu(2n + \xi)$, $-\mu(2n + 1) - \xi$ 로서 식(20) - (22)로부터 유추하면 각각 $-u\tau/(4\tau)$ 만큼 평행이동된 $-(2n + \xi)^2/(4\tau)$, $-[2(n + 1) - \xi]^2/(4\tau)$ 의 형태로 역변환됨을

알 수 있다(오차함수의 정의에 유념). 즉, 분모에 시간 τ 를 포함하고 있기 때문에, τ 가 작을 때 식(19)에 대응하는 역변환된 급수는 n 의 증가에 따라 급속히 수렴하며, 2.3에서 기술한 사실을 분명히 확인할 수 있다. 구체적으로, $n=0$ 인 경우만을 근사해로 취한 타당성은 $n=0$ 과 $n=1$ 인 경우에 대응하는 θ_0 과 θ_1 을 비교함으로써 검증할 수 있다. 양자의 차이는 지수에서 예측할 수 있듯이 ξ , τ 및 Pe수의 함수로서, 예를들어 차이가 최소(θ_{11} 은 최대)가 되는 조건인 $\xi=0$, $\tau=1/Pe$ (충진완료시간)에서 θ_0 은 Pe수가 무관하게 크기치수(order of magnitude)가 1이지만 Pe=100일 경우 θ_{11} 은 10^{-50} 이하이며 Pe=10일 경우에도 θ_{11} 은 10^{-7} 의 크기에 불과하다. 따라서, Pe수가 대략 10이상이면 θ_{11} 및 고차항들은 안전하게 무시될 수 있으며, Pe수가 클수록 근사해는 엄밀해에 더욱 접근하게 된다. 여기서 $Pe \leq 10$ 인 경우에 대하여 검토하지 않은 것은, 실제 축열조의 Pe수는 적어도 수십이상으로서, 불필요하기 때문이다. 또한, 식(20)~(22)를 구한 방법을 확장하면 θ_{12} 까지도 구할 수는 있으나 지수의 크기에서 알 수 있듯이 θ_{12} 는 θ_{11} 에 비해서도 현저히 작기 때문에 근사해의 검증에 있어서 별다른 의미는 없다.

식(17)로 표시된 엄밀해(장시간해)와 식(23)으로 표시된 근사해(단시간해)는 각각 적용가능한 시간

이 다르고 각각의 유효범위도 Pe수의 함수로서 정량적으로 결정하기 곤란하지만, 이론적으로 전자는 전시간영역에 대하여 유효하므로, 전자가 비교적 잘 수렴하면서 후자가 성립하는 적절한 시간 및 Pe수에 대하여 양자를 비교하였다. 양자의 차이가 극히 작아서 그림의 형태보다는 직접적인 수치를 비교하는 것이 합리적이며, Table 1은 Pe=10 및 100일 때 $Pe \cdot Fo=1$ 인 시간(충진완료시간)에서 위치에 따른 온도의 비교이다. 여기서, 엄밀해의 계산시 급수는 1000개항의 부분합을 취하였으며, $Pe > 100$ 인 경우 엄밀해가 불안정하게 수렴하거나 발산하기 때문에 비교가 불가능하다. Table 1에서 엄밀해와 근사해에 의한 무차원온도는 대략 유효숫자 6자리까지 일치하며 실제온도로 환산하더라도 양자의 차이는 물리적으로 무의미한 수준에 불과하다. 다만, Pe=100인 경우 $\xi=1$ 에서 전술한 θ_{11} 이 10^{-50} 이하임에 비하여 엄밀해와 근사해의 차이가 상대적으로 큰 이유는, 식(17) 우변의 지수항에서 알 수 있듯이, 엄밀해의 급수는 Pe수가 클 때 ξ 가 클수록 수렴성이 악화되기 때문이다. 즉 이 차이는 근사해가 아니라 엄밀해에 기인한다. 이와 같이 근사해는 엄밀해와 거의 정확히 일치하며, 2.2절에서 기술한 엄밀해의 경우와 같이 수치계산에 따른 문제가 없을 뿐 아니라, 후술하듯이 기존해와 비교설명에 있어서도 편리함을 고려하면, 실제 축

Table 1 Comparison of temperature between the exact and the approximate solutions at $Pe \cdot Fo=1$ for $Pe=10$ and 100

Location (ξ)	Pe=10		Pe=100	
	exact	approximate	exact	approximate
0.0	1.00000000	1.00000000	1.00000000	1.00000000
0.1	0.99681607	0.99681626	1.00000000	1.00000000
0.2	0.99012076	0.99012085	1.00000000	1.00000000
0.3	0.97792033	0.97792038	0.99999983	0.99999984
0.4	0.95786933	0.95786936	0.99999388	0.99999388
0.5	0.92762019	0.92762020	0.99986851	0.99986851
0.6	0.88544655	0.88544657	0.99830204	0.99830205
0.7	0.83128520	0.83128522	0.98652680	0.98652680
0.8	0.76862363	0.76862367	0.93281126	0.93281126
0.9	0.70838836	0.70838845	0.78325075	0.78325075
1.0	0.67751964	0.67751990	0.55641493	0.55641601

열조에서 과도적인 거동을 예측하는데 근사해가 엄밀해보다 더욱 유용하다.

3.2 기존해와의 비교

서론에서 언급하였듯이 기존이 해석적인 해는 축열조를 반무한영역으로 취급한 경우에 대한 해로서, 식(1)~(3)의 지배방정식, 초기조건 및 경계조건을 본 연구의 경우와 동일하지만 식(4)로 표시된 축열조출구에서의 단열조건은

$$\theta(\infty, \tau) = 0 \tag{24}$$

인 경계조건으로 대치된다. 이에 대한 엄밀해는 이미 알려진 바와 같이 식(20)으로 표시된 θ_{01} 이다.^{8, 17)}

본 연구의 결과와 기존해의 차이를 검토하기 위하여, 식(17)로 표시된 엄밀해와 식(20)을 비교할 때, 하나의 경계조건만이 변화되었음에도 불구하고, 수식상에 나타난 해의 성격은 판이하다. 그러나, 근사해 식(23)과 기존해 식(20)을 비교하면, 경계조건 변화의 결과를 보다 가시적으로 고찰할 수 있다. 즉, 식(23)에서 θ_{02} 및 무시된 고차항($n \geq 1$)은 경계조건을 근사적인 식(24)에서 실제적인 식(4)로 취한 결과 추가된 항이며, 이미 고차항을 무시함에 따른 타당성은 3.1절에서 검증된 바 있으므로, 본 연구의 해와 기존해의 실질적인 차이는 식(21)로 표시된 θ_{02} 가 된다. 식(21)우변의 함수형태에서 알 수 있듯이, θ_{02} 는 물리적으로 $(2-\xi)$ 인 위치에서의 온도가 해석대상영역($0 \leq \xi \leq 1$)에 미치는 영향이므로 ξ 가 1에, $u\tau$ 가 1에 접근할수록 온도분포 $\theta(\xi, \tau)$ 에 대한 기여도는 증대된다($n \geq 1$ 인 고차항에 대해서도 이와 유사한 설명이 가능하다). $Pe=10$ 인 경우에 대하여 ξ 및 $u\tau$ 에 따른 θ_{02} 를 도시한 Fig.2에서 이러한 경향은 쉽게 확인되며, 특히 축열조출구부근에서 본 연구의 해와 기존해의 차이가 급격히 커지는 점은 상이한 경계조건 적용에 따른 차이를 현시적으로 보여준다. 또한, 식(21)에서 Pe 수가 커지면 $[0, 1/Pe]$ 인 범위내에서 τ 의 값이 실질적으로 작아지기 때문에 θ_{02} 는 더욱 작아지게 된다. 실제 θ_{02} 의 최대값($\xi=1, u\tau=1$ 일 때)의 Pe 수에 대한 변화를 보인 Fig.3에서, $\log \theta_{02, \max}$ 는 $\log Pe$ 에 대하여 거의 선형적으로 감소한다. 그러나,

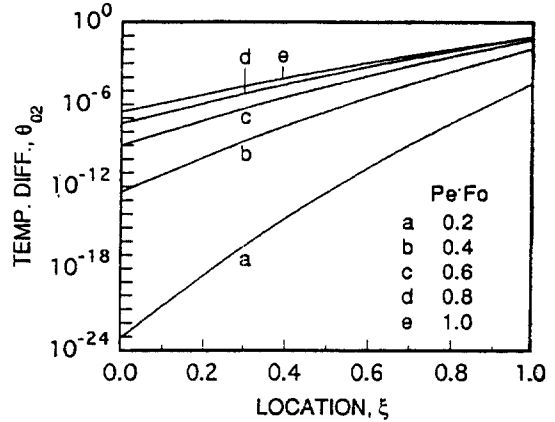


Fig.2 Temperature difference between the present and the previous solutions as a function of location and normalized time for $Pe=10$.

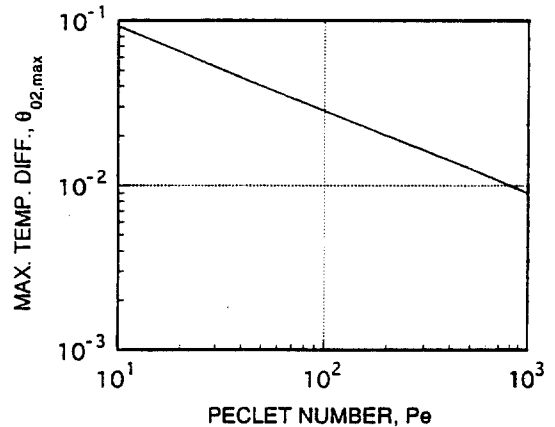


Fig.3 Variation of the maximum temperature difference between the present and the previous solutions with respect to the Peclet number.

상당히 큰 Pe 수에 있어서도 $\theta_{02, \max}$ 의 값은 무시될 수 있을 정도로 작지는 않다.

이상과 같이 본 연구의 해(직접적으로는 근사해)와 기존해사이에는 정성적, 정량적인 차이가 있었다. 특히, Pe 수가 비교적 작은 경우와 충전과정말기의 축열조출구부근에서 양자사이에 상당한 차이가 있는 점(Fig.3), 기존해에 비하여 수치계산에 추가적인 어려움이 없는 점, 본 연구의 해가 보다 실제에 근접한 모델로부터 얻어진 점 등을 고려하면, 향후 축열조내의 과도적인 거동을 파악하는

이론적인 기준으로서 본 연구의 해가 적용되어야 할 것이다.

3.3 온도분포

본 연구에서 얻어진 해의 구체적인 결과를 보이기 위하여 대표적인 몇몇 경우에 대하여 축열조내의 과도적인 온도변화를 계산하여 Fig4-6에 도시하였다. 이 온도분포는, 특정한 문제에 대한 해석결과 및 고찰을 목적으로 제시된 것이 아니라, 수식으로 표시된 본 해의 유용성과 일반적인 형태를 가지적으로 확인하기 위하여 제시되었음을 유의하기 바란다.

먼저, Fig4는 $Pe=300$ 인 경우에 있어서 시간의 경과에 따른 축열조내의 수직온도분포이다. 고온 및 저온유체사이의 경계($\xi=u\tau$)에서 온도구배는 충전이 진행됨에 따라 점차 완만해지고 있다. 이러한 온도분포는 시간의 경과에 따라 상층의 고온유체로부터 하층의 저온유체로 열확산이 누증되기 때문에 나타나며, $\xi=u\tau$ 에서 계단함수가 되는 완전성층축열조의 경우¹²⁾와의 상당한 차이를 보인다. 즉, 실제 축열조의 충전과정에서 유체혼합, 벽면효과 등이 완전히 억제되었다 하여도 도달가능한 이상적인 온도분포 또는 최대열성층은, Pe 수에 따라 다르지만, 유체의 유한한 열전도율로 인하여 Fig4와 같은 상태로 되어야 한다. 따라서, 본 연구의 해는 압출유동에 접근하도록 잘 설계된 축열조에 대하여 수행한 실험결과의 검증기준으로서 유용할 것으로 기대된다.¹³⁾ 실험에서 측정된 온도분포와 본 연구의 해를 비교함으로써 실험장치 또는 조건이 이상적인 경우에서 이격된 정도를 판단할 수 있을 것이다.

축열조내의 과도적인 거동에 미치는 Pe 수의 영향을 보이기 위하여, 축열조의 절반이 충전된 시간 ($Pe \cdot Fo=0.5$)에서 Pe 수의 변화에 따른 온도분포를 Fig5에 도시하였다. Pe 수가 커질수록 온도분포는 계단형태로 접근하며 성층화는 현저히 발달되고 있다. 식(8)로 표시된 정의로부터 Pe 수는 유체의 열확산계수가 작을수록, 축열조의 높이가 클수록, 유속(유량)이 증가할수록 커진다. 열확산계수가 작을수록, 체적이 일정한 축열조에서 직경에 대한 높이의 비가 클수록 성층화가 촉진되는 사실은 쉽게 이해될 수 있으며 실험적으로도 입증된 바 있다.⁴⁾ 그러나, 실제에 있어서도 유속이 증가하면, 본 연

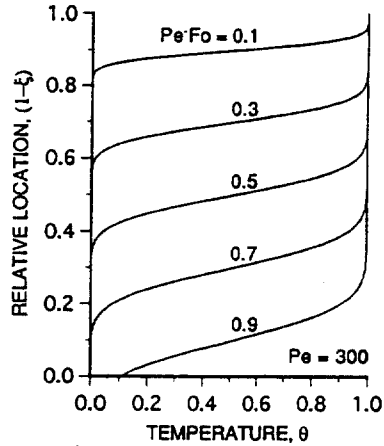


Fig.4 Vertical temperature profiles at different times for $Pe=300$.

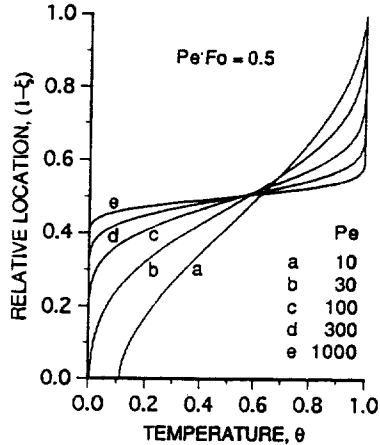


Fig.5 Effect of the Peclet number on the vertical temperature profile at a half of the turnover time.

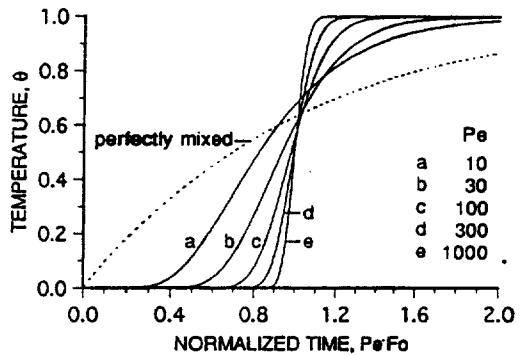


Fig.6 Effect of the Peclet number on the transient temperature variation of the tank exit.

구의 결과와는 상반되게, 오히려 열성층은 저하된다고 보고되고 있다.^{4,7,10)} 이 이유는 유속의 증가에 따른 유체혼합 때문으로서 본 연구의 모델에는 포함되지 않았다. 유동교란이 없는 이상적인 경우를 취급한 본 연구에서, 유속증가에 의해 Pe수가 커지면 실제 층전에 소요되는 시간 즉 유체층사이의 열확산이 일어날 수 있는 시간은 유속에 반비례하여 짧아지기 때문에 성층화가 촉진된다는 결론에 도달한 의의는, 공학적으로 가능하면 유동교란이 억제된 고유량 축열조를 목표로 설계하여야 한다는 데 있다. 만일, 축열조내의 실제거동을 예측하기 위한 모델링이라면, 2.1절에서 지적하였듯이, 적어도 실험적으로 입증된 입구부근의 완전혼합영역^{5,11)}은 해석에 포함되어야 할 것이다.

축열성능의 해석을 위해서는 시간에 따른 축열조출구온도의 변화를 예측하는 것이 중요하다. Fig.6은 표준화된 시간에 대한 출구온도의 변화를 Pe수에 따라 비교한 것이다. 여기서, 점선은 축열조내의 온도가 균일한 완전혼합(비성층)축열의 경우에 대응하며, 온도변화는 다음식으로 표시된다.¹²⁾

$$\theta(\tau) = 1 - \exp(-u\tau) \quad (25)$$

Fig.6에서 완전혼합축열시 출구온도는 충전시작부터 초기온도($\theta=0$)보다 높으며 지수함수의 형태로 상승함에 비하여, 성층축열의 경우 수직온도분포에서도 예측할 수 있듯이, 출구온도는 공통적으로 충전종료시간($Pe \cdot Fo=1$) 부근에서 급상승하여 입구온도($\theta=1$)로 접근하는 형태가 된다. Pe수가 커지면 출구온도의 상승률도 급격해진다. 출구온도의 변화추이로부터 Pe수가 클수록 충전종료시까지 출구를 통하여 유출되는 열량은 작아지기 때문에 축열성능은 향상된다는 사실을 확인할 수 있으며, Fig.5와 연관하여 고찰한 내용과 부합된다.

4. 결 론

성층화된 축열조의 출구조건을 실제와 같이 단열상태로 취급한 1차원모델에 대하여 해석적인 접근을 시도하여 얻은 결과는 다음과 같이 요약될 수 있다.

해석대상모델의 지배방정식에 Laplace변환 및

역변환정리를 적용함으로써 무한급수형태의 엄밀해를 구할 수 있었다. 이 엄밀해는 단시간에서 급수의 수렴성이 극히 악화되는 장시간해로서 구체적인 수치계산에 따른 제약 때문에 축열조의 과도적인 거동을 해석하는데 적용되기는 곤란한 점이 문제이다. 이에 따라, 근사적인 방법으로 실제 축열조의 충전시간에 대응하는 단시간해를 구하였다. 즉 이항정리를 적용하여 Laplace변환된 방정식을 시간에 대하여 급속히 수렴하는 급수형태로 전개한 후 해에 대한 기여도가 작으면서 역변환도 불가능한 고차항은 무시하고 저차항만으로 근사해로 취하였다.

근사해에서 무시된 고차항에 대한 수학적 고찰 및 크기차수 평가, 근사해와 엄밀해의 구체적인 수치비교를 통하여 대략 $Pe \geq 10$ 인 범위에 있어서 근사해의 타당성을 엄밀히 검증할 수 있었다. 실제 축열조에서 Pe수는 적어도 수십이상임을 고려할 때 근사해는 엄밀해와 완전히 일치하고, 근사해의 수치계산시 엄밀해와 같은 수렴성의 문제가 없으며, 근사해의 형태가 엄밀해보다 물리적인 설명에 있어서 편리하기 때문에 축열조의 해석에 엄밀해보다 근사해를 적용하는 것이 보다 유리하다.

축열조를 출구가 단열된 유한영역으로 취급한 본 연구의 해와 축열조를 반무한영역으로 취급한 기존 연구의 해를 비교한 결과 출구경계조건의 차이가 해의 형태에 현시적으로 나타났다. 즉, 본 연구의 근사해는 기존해에 하나의 항만이 추가된 형태이며, 추가된 항은 경계조건의 차이에 기인한다(이 점이 전술한 근사해가 엄밀해보다 물리적 성명에 있어서 편리하다는 이유이다). 근사해와 기존해의 차이는 Pe수의 증가에 따라 감소하는 경향을 보이지만 상당히 큰 Pe수에 있어서도 그 크기는 작지 않았다. 따라서, 축열조에 대한 이론적 기준으로서 본 연구의 해가 기존해를 대체하여야 한다.

본 연구의 구체적인 결과의 예로서 시간에 따른 수직온도분포, 수직온도분포 및 출구온도의 시간 변화에 대한 Pe수의 영향을 도시하였다. 해석적인 해이기 때문에 이러한 결과는 쉽게 구해될 수 있으며, 또한 이상적인 모델에 대한 해이기 때문에 실제 실험의 결과가 이상적인 상태에서 이격된 정도를 검증할 수 있는 기준으로서 유용하리라 기대된다.

참 고 문 헌

1. Clark, J.A., 1985, "Thermal energy storage", Rohsenow, W.M., Hartnett, J.P. and Ganic, E.N. ed., Handbook of Heat Transfer Applications, 2nd ed., McGraw-Hill, pp.8.1-8.40.
2. Haag, A., 1989, "The importance of heat storage when using cogeneration plants in cold climates", Kikis, B. and Kakac, S., ed., Energy Storage Systems, Kluwer Academic Publishers, pp.369-381.
3. Kakac, S., Paykoc, E. and Yener, Y., 1989, "Storage of solar thermal energy", Kikis, B. and Kakac, S., ed., Energy Storage Systems, Kluwer Academic Publishers, pp.129-161.
4. Lavan, Z. and Thompson, J., 1977, "Experimental study of thermally stratified hot water storage tanks", Solar Energy, Vol.19, pp.519-524.
5. Jaluria, Y. and Gupta, S.K., 1982, "Decay of thermal stratification in a water body for solar energy storage", Solar Energy, Vol.28(2), pp.137-143.
6. Hess, C.F. and Miller, C.W., 1982, "An experimental and numerical study on the effect of the wall in a thermocline-type cylindrical enclosure-I. Experiments", Solar Energy, Vol.28(2), pp. 145-152.
7. Hollands, K.G.T. and Lightstone, M.F., 1989, "A review of low-flow, stratified-tank solar water heating systems", Solar Energy, Vol.43(2), pp.97-105.
8. Cabelli, A., 1977, "Storage tanks - A numerical experiment", Solar Energy, Vol.19, pp.45-54.
9. Sharp, M.K. and Loehrke, R.L., 1979, "Stratified thermal storage in residential solar energy applications", J. Energy, Vol.3(2), pp.106-113.
10. Hess, C.F. and Miller, C.W., 1982, "An experimental and numerical study on the effect of the wall in a thermocline-type cylindrical enclosure-II. Numerical model", Solar Energy, Vol.28(2), pp.153-161.
11. Csordas, G.F., Brunger, A.P., Hollands, K.G.T. and Lightstone, M.F., 1992, "Plume entrainment effects in solar domestic hot water systems employing variable-flow-rate control strategies", Solar Energy, Vol.49(6), pp.497-505.
12. Mavros, P., Belessiotis, V. and Haralambopoulos, D., 1994, "Stratified energy storage vessels : Characterization of performance and modeling of mixing behavior", Solar Energy, Vol.52(4), pp.327-336.
13. Zurigat, Y.H., Maloney, K.J. and Ghajar, A.J., 1989, "A comparison study of one-dimensional models for stratified thermal storage tanks", Trans. ASME, J. of Solar Energy Engineering, Vol.111, pp.204-210.
14. Kleinbach, E.M., Beckman, W.A. and Klein, S.A., 1993, "Performance study of one-dimensional models for stratified thermal storage tanks", Solar Energy, Vol.50(2), pp.156-166.
15. Garg, H.P., Mullick, S.C. and Bhargava, A.K., 1985, Solar Thermal Energy Storage, D. Reidel Publishing Company, pp.82-120.
16. Duffie, J.A. and Beckman, W.A., 1980, Solar Engineering of Thermal Processes, John Wiley & Sons, pp.329-335.
17. Yoo, H. and Pak, E.-T., 1993, "Theoretical model of the charging process for stratified thermal storage tanks", Solar Energy, Vol.51(6), pp.513-519.
18. Shyu, R.-J., Lin, J.-Y. and Fang, L.-J., 1989, "Thermal analysis of stratified storage tanks", Trans. ASME, J. of Solar Energy Engineering, Vol.111, pp.54-61.
19. Carslaw, H.S. and Jaeger, J.C., 1959, Conduction of Heat in Solids, 2nd ed., Oxford University Press, pp.297-352, 387-420, 494-496.
20. Arfken, G., 1970, Mathematical Methods for Physicists, 2nd ed., Academic Press, pp.262-263.