

〈논 문〉 SAE NO. 953759

## 자동차 헬리컬기어의 하중전달 특성해석

### Analysis of Load Transmission Characteristics for Automobile Helical Gear

박 찬 일,\* 이 장 무\*\*  
C. I. Park, J. M. Lee

#### ABSTRACT

The purpose of this study is to develop a computer simulation program for analyzing load transmission characteristics of a helical gear system in design stage. In this analysis, the rotational delay, load distribution, root stress, and contact area are investigated. That is, the influence function of deflection is obtained by finite element analysis and the influence function of approach and gear tooth error are considered. Load distribution, rotational delay, and contact area are calculated by solving load-deflection equation which includes these influence functions and tooth error, and the influence function of the bending moment is obtained by finite element analysis. The root stress is calculated by the load distribution and the influence function of the bending moment. The results of the simulation are cross-checked through a specially designed experimental set-up.

주요기술용어 : Helical gear(헬리컬 기어), Rotational delay(회전 지연), Load distribution(하중 분포), Root stress(이뿌리부 응력), Contact area(접촉 영역), Influence function(영향 함수)

기 호 설 명		기 호 설 명	
$(\zeta, \eta)$	: 하중이 작용하는 점의 좌표	$K_c(x)$	: 접촉 변형의 영향함수
$(x, y)$	: 변형을 측정하는 점의 좌표	$S_F$	: 위험 단면에서의 치두께
$K_b(x, \zeta)$	: 굽힘 변형의 영향함수	$F$	: 치폭
$\beta(x, \zeta, \eta)$	: 굽힘 모멘트의 영향함수	$P(\zeta)$	: 하중 분포
		$H$	: 치 높이
		$\tau$	: 접촉변형의 파라미터
		$C(x)$	: 자유단 효과를 위한 보정함수
		$e(x)$	: x점의 합성오차
		$\Delta$	: 회전지연

\* 정회원, 강릉대학교 정밀기계공학과

\*\* 정회원, 서울대학교 기계설계학과

- 21 : 접촉선  
 $\beta_g$  : 기초원에서의 나선각

## 1. 서 론

자동차 변속기의 경우 최근 소형화, 경량화, 저소음화가 보다 엄격히 요구되고 있다. 이러한 요구에 대응하기 위해서 변속기의 주요부품인 기어를 중심으로 한 정확한 해석이 필요하다. 기어 강도에 대한 식은 이미 확립되어 있으나 기어의 정확한 강도를 나타내는 것이 아니고 설계상의 지표이므로 변속기 개발의 여러 문제점을 해결하기에는 아직 부족한 점이 많다. 기어는 치형오차에 의해 기어 강도에 큰 영향을 줄 수 있으며 치형수정에 의해 이뿌리부에 과도한 응력을 방지하여 치의 파손을 막을 수 있다. 그리고 회전지연은 기어사이에 운동과 힘의 불완전한 전달을 일으키는 요인이며 기어소음에 직접적인 영향을 끼친다. 따라서 변속기어중에 대부분을 차지하는 헬리컬 기어를 대상으로 하중전달 특성을 해석할 수 있는 프로그램을 개발하여 설계단계에 적용하여 변속기 개발 기간을 단축하고자 한다.

기어의 연구는 하중전달 및 진동에 대한 부분 특성에 대해 많은 연구를 하였고 이러한 특성 해석으로는 치의 강성해석, 이뿌리부 응력해석, 치형수정, 접촉영역, 전달오차, 기어 자체의 진동 해석 등등이 있다. 그러나 치형오차가 있는 기어계의 하중전달 특성을 해석하기 위해 FDM,

FEM, 또는 판이론을 직접 사용하여 치를 모델링하여 하중분포를 예측하고 있으나<sup>(1-3, 8)</sup> 정밀도 면에서 개선의 여지가 있다. 이 연구에서는 치지지부의 컴플라이언스(Compliance)를 고려하여 치형오차를 가진 헬리컬 기어의 치면 하중, 접촉 영역, 이뿌리부 응력, 회전지연을 해석할 수 있는 컴퓨터 시뮬레이션 프로그램을 개발하고 실험장치를 제작하여 그 결과의 타당성을 검토한다.

## 2. 하중 분포 해석

헬리컬 기어는 치폭에 대해 기울어진 접촉선을 갖고 각 접촉선의 길이가 물림이 진행됨에 따라 변한다. 또한 각 접촉선을 따라서도 컴플라이언스가 균일하지 않으므로 하중분포가 다르게 된다. 그러므로 하중 분포를 계산하기 위해서는 치의 컴플라이언스를 계산하여야 하며 이를 위해 굽힘 영향 함수, 접촉 영향 함수를 구하고 치의 오차는 치형 방향 오차와 치폭 방향 오차를 고려한다. 굽힘 영향 함수를 구하기 위해서는 굽힘과 전달력에 의한 변형과 치 지지부의 컴플라이언스를 계산하여야 한다. 이를 위해서 헬리컬 기어의 치를 표준 랙(Rack)으로 모델링 하였다. 자동차용 변속기에 사용되는 헬리컬 기어 제원을 대표하는 치각각 공구 압력각  $14.5^\circ$ ,  $17.5^\circ$ ,  $20^\circ$ ,  $F/H=1, 2, 3, 4$ 의 표준 랙에 치 지지부의 컴플라이언스를 고려하기 위해 기어 중심 방향으로  $2H$ , 양쪽 이뿌리부에서 원주방향으로 각각  $2H$ 씩 Fig.1과 같이 모델링하였다. 요소(Element)는 Parabolic Solid Element를 사용하였고, 물성치는 탄성계수  $2.1 \times 10^4 \text{kgf/mm}^2$ , 포아송비 0.3으로 하였다. 구속조건으로 랙으로부터  $2H$  떨어진 치 옆부분과 치밀부분을 x, y, z 병진방향으로 모두 구속하였다. 하중조건으로 집중 하중을 치의 중립면에 수직하게 가하고 중립면에서 변형을 구하였다.

설계 단계에서 빠른 결과를 얻기 위하여 굽힘 영향함수의 근사식을 사용하였으며 여기에서는 Fig.1의 모델을 사용하여 치 지지부의 변형을 고려한 유한요소 해석으로 변형의 공동특성을 Fig.

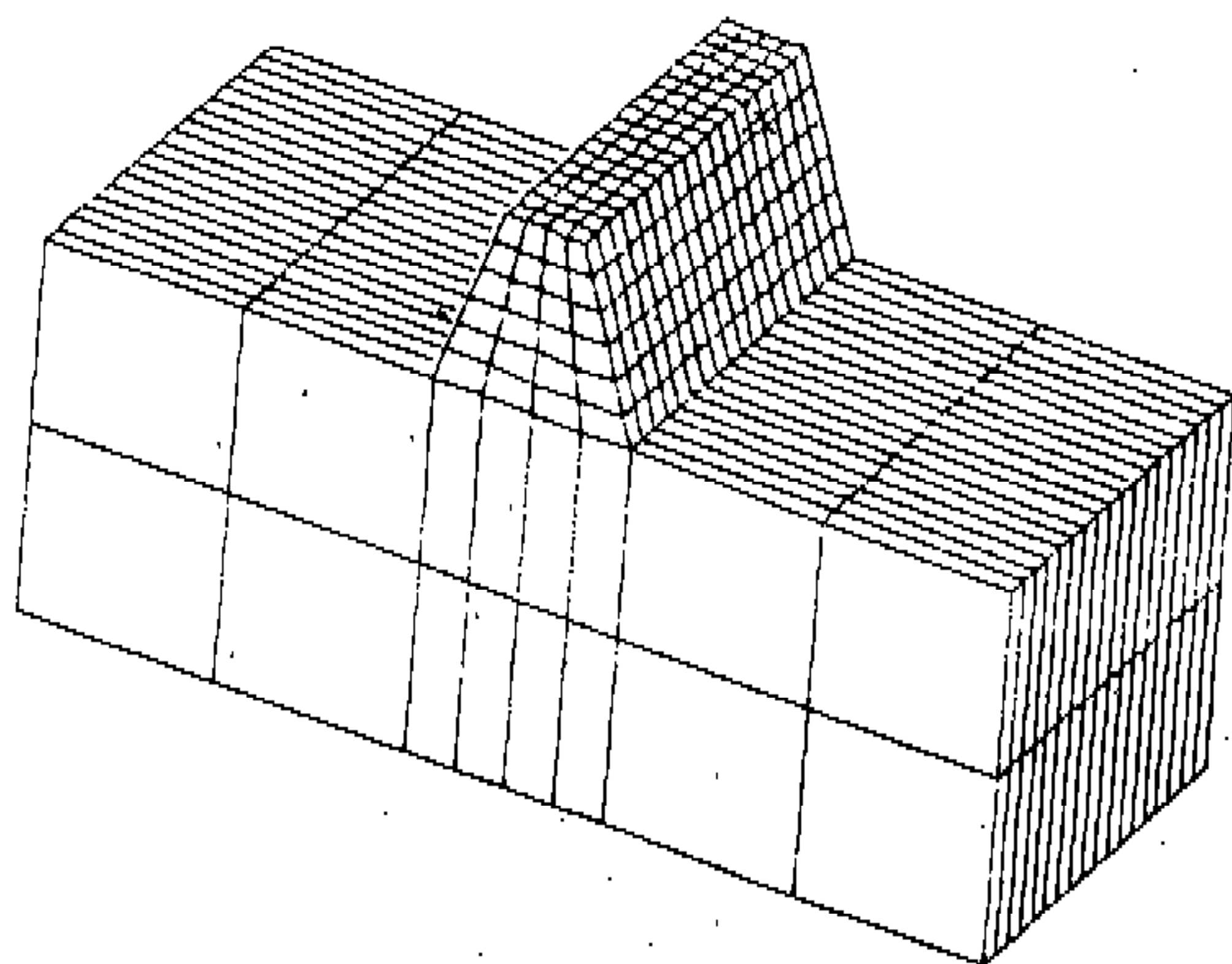


Fig.1 Finite element model

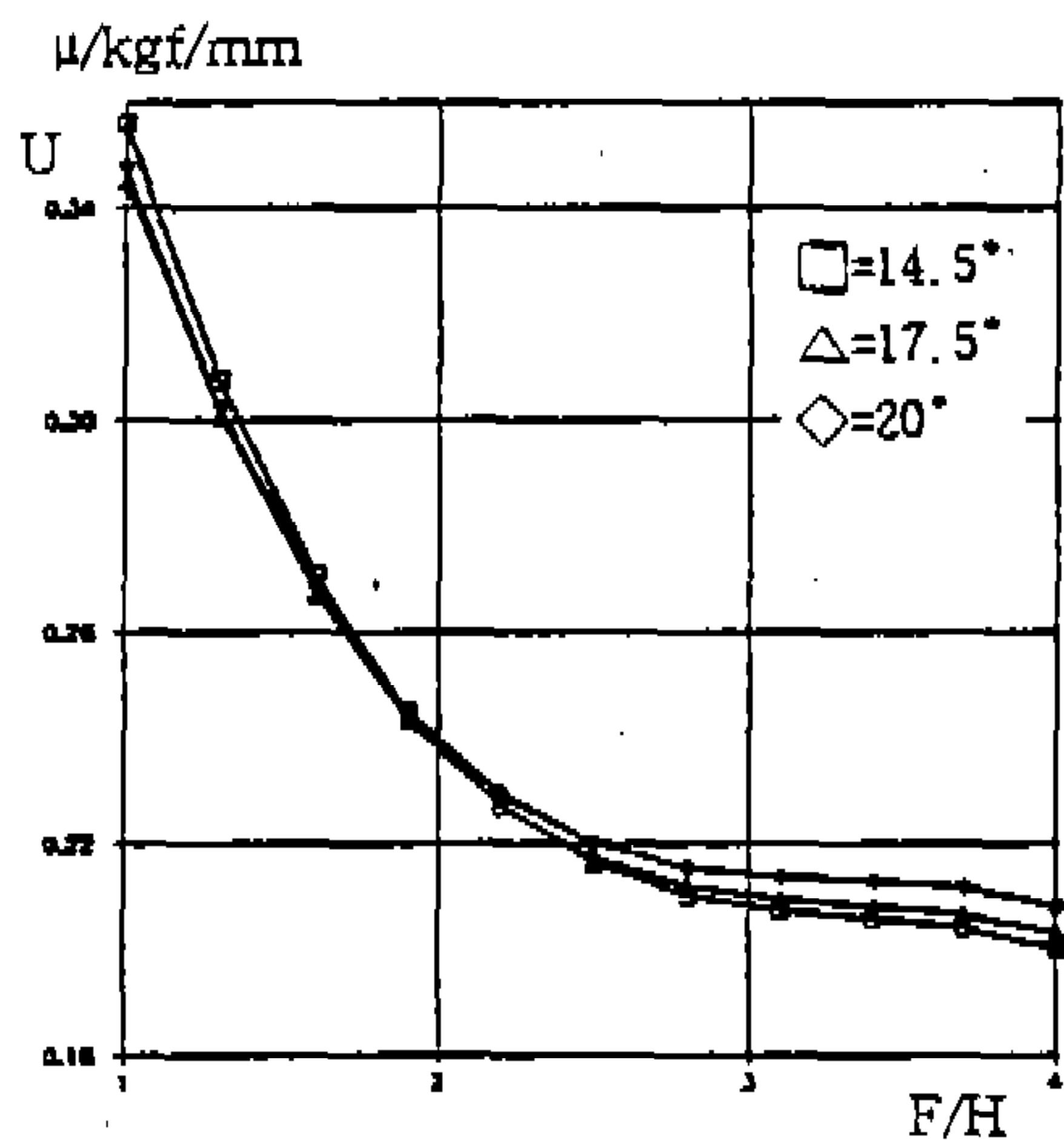


Fig.2 Absolute value of deflection U

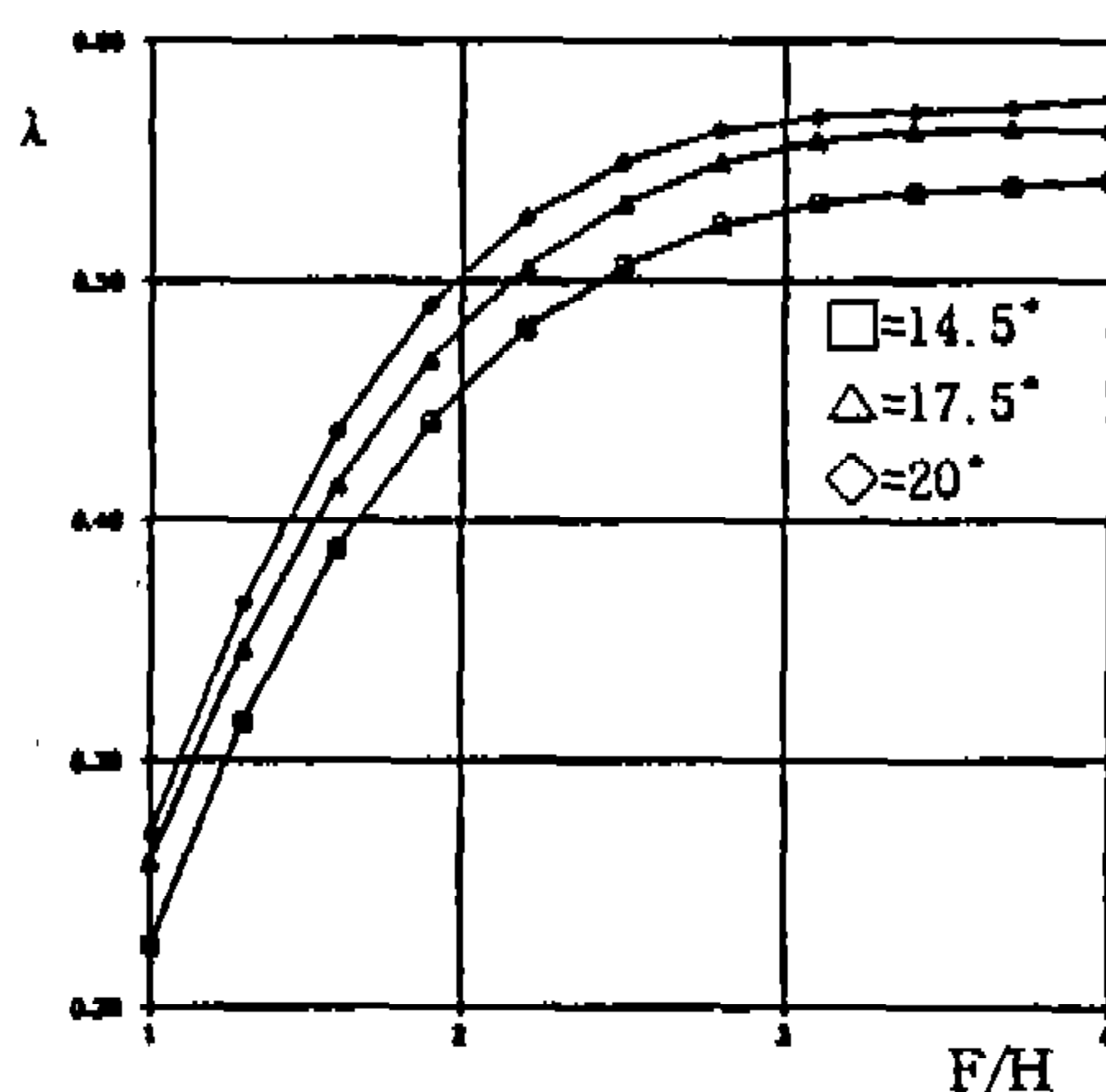


Fig.3 Conversion parameter λ

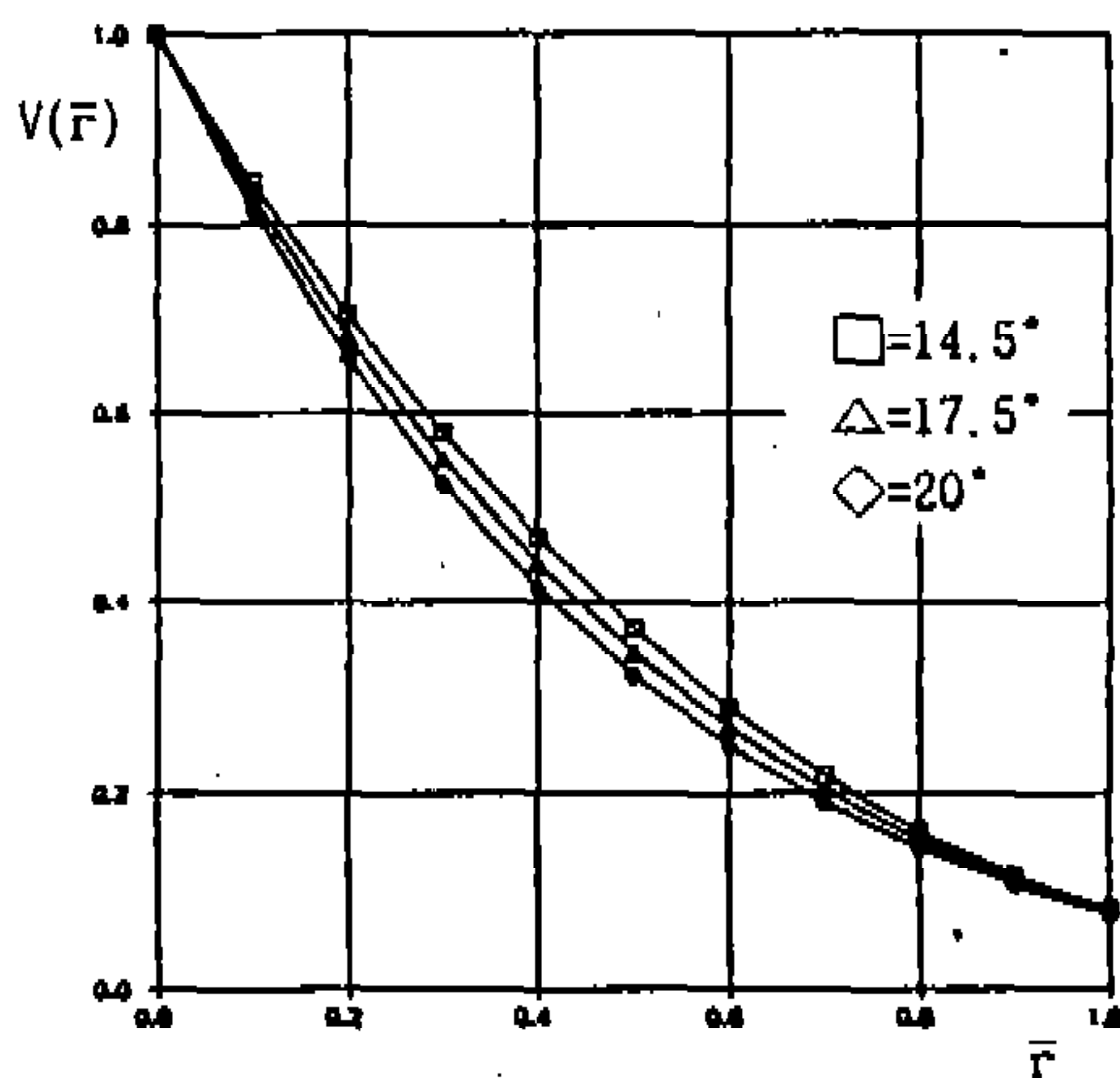


Fig.4 Common function of overall deflection  $v(\bar{r})$

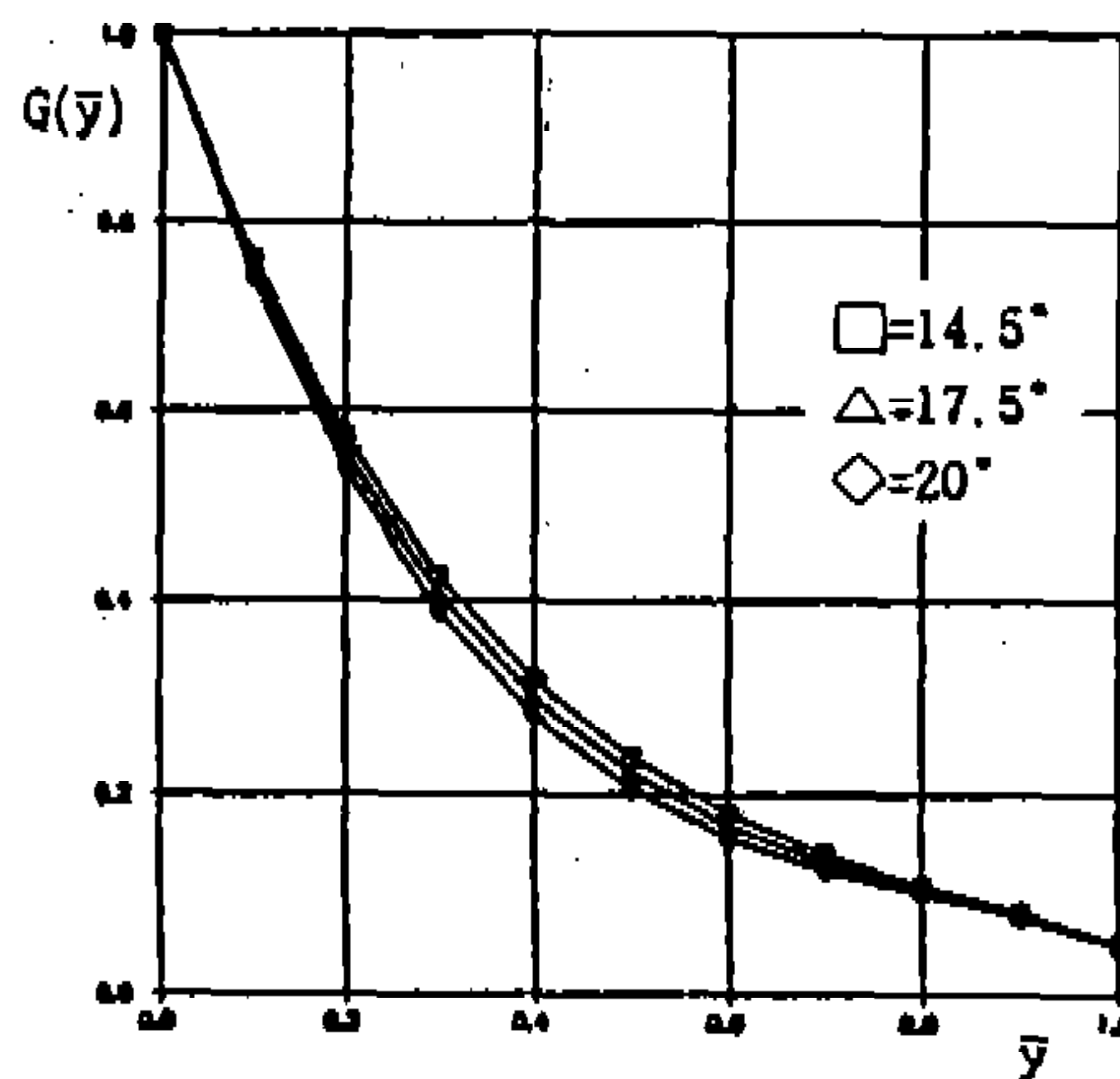


Fig.5 Common function of deflection in height  $G(\bar{y})$

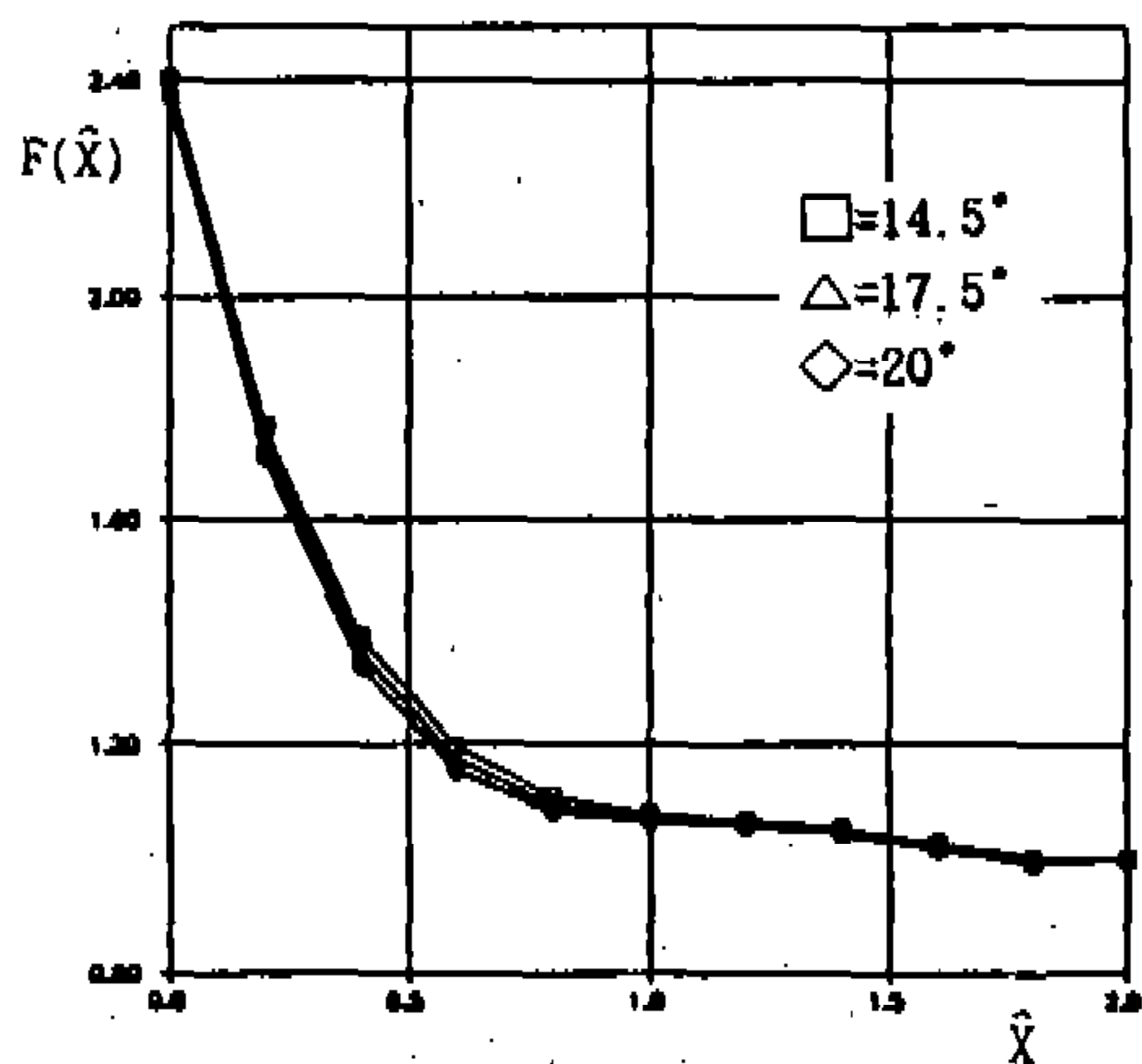


Fig.6 Common function of deflection in width  $F(\hat{x})$

2~Fig.6과 같이 계산하여 다음의 근사식<sup>(5)</sup>에 적용하였다.

$$K_b(\bar{x}, \bar{y}, \bar{\zeta}, \bar{\eta}) = U \frac{v(\bar{r}) f(\bar{x}) f(\bar{\zeta}) g(\bar{y}) g(\bar{\eta})}{f(|\bar{x} - \bar{\zeta}|) g(|\bar{y} - \bar{\eta}|)} \quad (1)$$

여기서

$$g(\bar{y}) = \sqrt{G(\bar{y})}, \quad g(\bar{\eta}) = \sqrt{G(\bar{\eta})}, \quad f(\bar{x}) = \sqrt{F(\bar{x})},$$

$$f(\bar{\zeta}) = \sqrt{F(\bar{\zeta})}, \quad \bar{r}^2 = (\bar{x}' - \bar{\zeta}')^2 + (\bar{y} - \bar{\eta})^2,$$

$$\bar{x}' = \lambda \bar{x}, \quad \bar{\zeta}' = \lambda \bar{\zeta}$$

$\bar{x}, \bar{y}, \bar{\zeta}, \bar{\eta}$ 는 각 좌표를 치높이로 나눈 값

기어치의 접촉 변형은 굽힘에 의한 변형과 마찬가지로 치 변형에 상당히 기여한다. 그러므로 접촉 변형의 계산은 기어의 하중 분포와 진동상태를 예측하기 위해 굽힘에 의한 변형과 더불어 필요하다. 여기에서는 다음과 같은 접촉 영향 함수를 사용한다<sup>(8, 9)</sup>.

$$K_c(\zeta, \eta) = \frac{\tau \times c(\eta)}{P(\zeta)/P_{mean}} \quad (2)$$

여기서  $\zeta$ 는 자유단으로 부터의 거리

치의 오차는 기계가공에 의한 오차라기 보다는 기어진동을 억제하고 치면에 작용하는 하중을 줄여서 치의 피팅을 방지하고 이 뿌리에 과도한 응력에 의한 치의 파괴를 방지하기 위한 수단으로서 설계시부터 부여된다. 이러한 치의 오차는 치에 걸리는 하중에 따라 치의 접촉 면적을 변화시키는 요인이 되고 그에 따라 치의 강성도 변화한다. 이해석에서는 치의 오차로 Fig.7과 같이 압력각 오차, 치형 크라우닝, 치선 수정, 리드 오차, 리드 크라우닝이 고려되며 궁극적으로는 구동기어와 피동기어의 합성오차가 사용된다.

하중분포를 계산하기 위해 두 쌍이상의 치가 토크를 전달할 때 이 치들은 모두 접촉하고 있고 각 쌍의 전체 변형은 접촉점에 관계없이 같다고 가정한다. 이러한 가정하에 한 개의 접촉선 상의 하중 분포와 변형과의 관계는 Fig.8과 같은 좌표계에서 다음과 같은 적분 방정식에 의해 나타내어진다.

$$\int_{-1}^1 K_b(x, \zeta) P(\zeta) d\zeta + K_c(x) P(x) = \{ \Delta - e(x) \} \cos \beta_g \quad (3)$$

한 쌍의 치에 전달되는 하중  $W_j$ 는 다음 식에 의해 얻어진다.

$$W_j = \int_{-1}^1 P(\zeta) d\zeta \quad (4)$$

동시에 맞물리는  $n$ 개의 치의 축직각 방향 성분의 하중이 전하중  $W$ 와 같다는 조건하에서 다음과 같은 관계를 얻는다.

$$W = \sum_{j=1}^n W_j \cos \beta_g \quad (5)$$

각 접촉선에서의 하중 분포는 (3), (4), (5) 식을 연립해서 구한다. Fig.8과 같은 좌표계는 작용면의 중심에 원점을 가진 XY좌표계로 환산되며 접촉선을 따라 접촉점의 변형을 계산하기 위해서 그 접촉점에 대응하는 치면에서의 좌표를 계산한다.

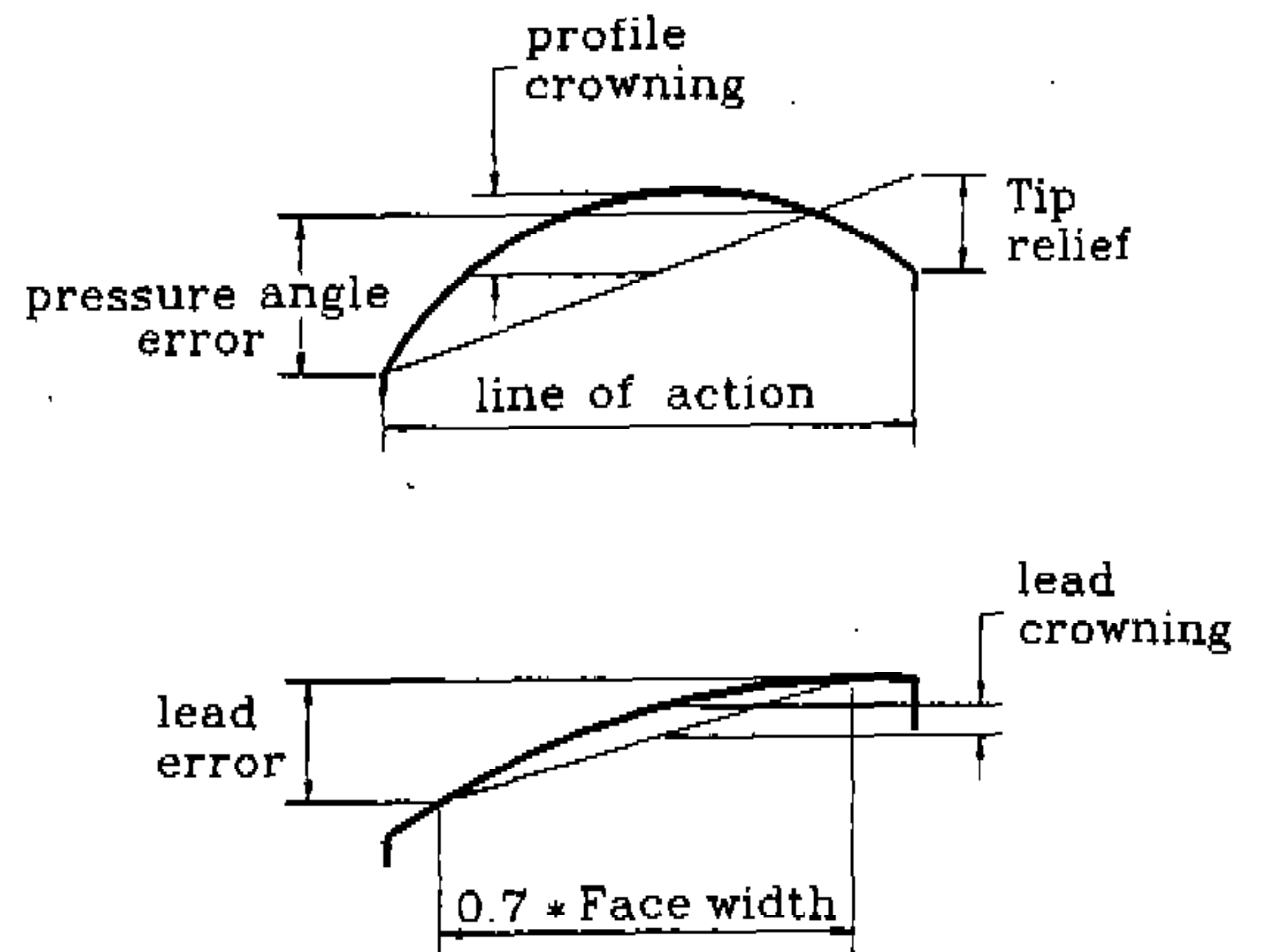


Fig.7 Tooth error model

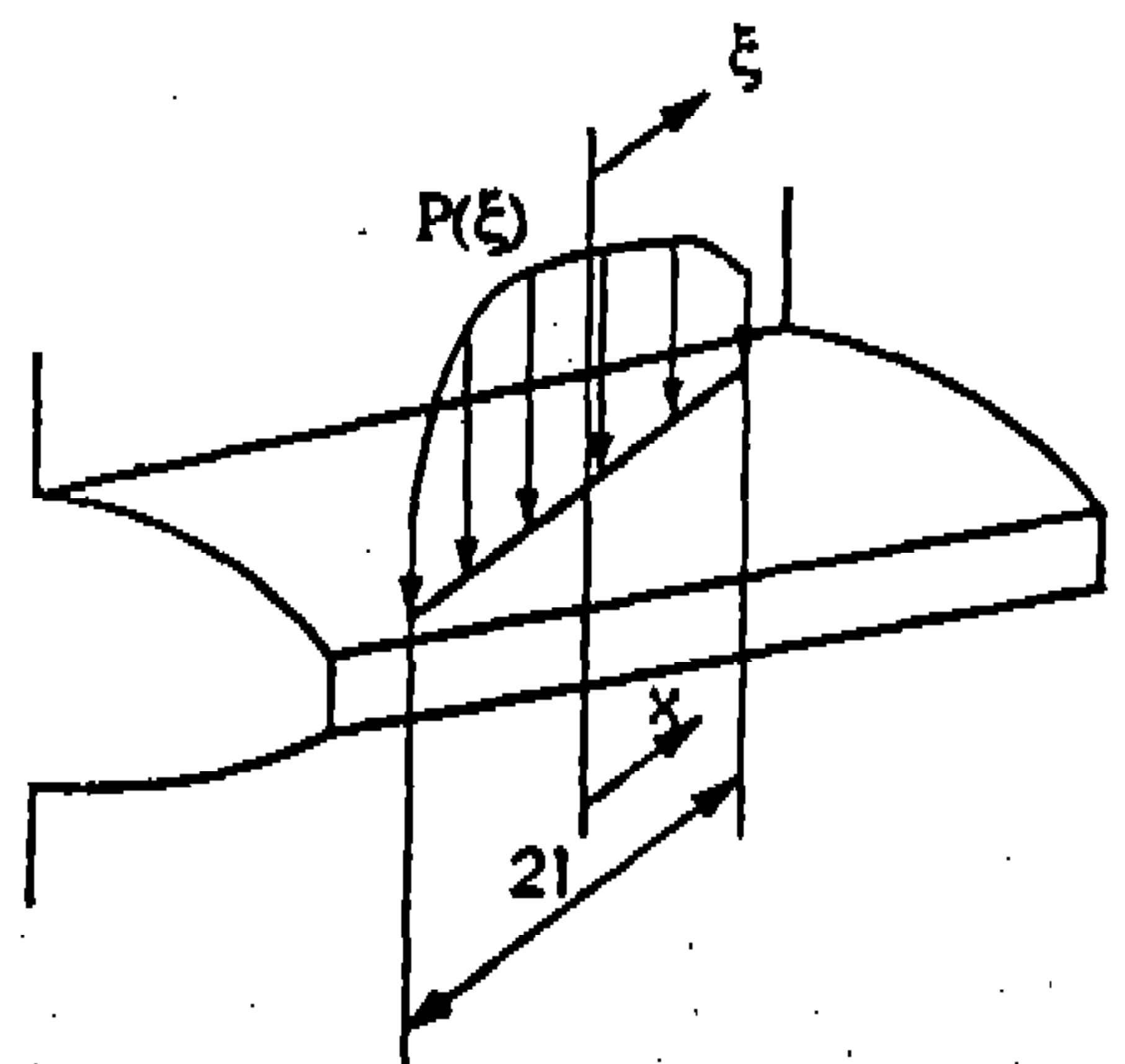


Fig.8 Load distribution of a helical gear



각 접촉선에서 접촉점에 대응하는 영향함수가 구해지면 대표좌표 10점의 가우스 적분식을 이용하여 하중분포와 치 접촉영역을 계산한다. 즉 맞물리고 있는 치의 위치에서 접촉선 상에 한쌍의 치의 합성오차  $e(x_i)$ 를 계산한다. 회전지연  $\Delta$ 의 초기치를 설정하여  $e(x_i)$ 가  $\Delta$ 보다 작은 구간을 찾아낸다. 그러나 이러한 구간에서의 하중분포는 음(-)의 값을 가질 수 있다. 그러므로 음(-)의 값을 갖지 않도록 접촉구간을 조정하여 하중분포를 계산하고 이것이 실제 접촉 영역에 된다. 이 방법으로 동시에 맞물리고 있는 다른 접촉선에 대해 수행하여  $\Delta$ 의 초기치에 대한 접촉영역과 하중분포를 구한다. 이와 같이 구한 하중분포의 총합을 외력 토크에서 환산한 하중과 비교하여 그 차이에 따라  $\Delta$ 값을 보정하고 이 절차를 처음부터 반복하여 접촉영역과 하중분포를 해석한다.

### 3. 이뿌리부 응력

접촉상의 하중분포를 구한 후 이 하중분포에 의한 이뿌리부의 응력을 구하기 위해서 이뿌리부에 작용하는 굽힘 모멘트를 계산하여야 한다. 이 굽힘모멘트를 구하기 위해 굽힘영향함수에 사용되었던 치의 모델에 유한요소해석을 통해 Table 1과 같이 압력각계수를 계산하고 다음의 근사식을 사용하여<sup>(6)</sup> 영향함수를 구하였다.

$$\beta(\bar{x}, \bar{\zeta}, \bar{\eta}) = \left[ \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_a} e^{-\frac{(\bar{x}-\bar{\zeta})^2/2\sigma_a^2}{2\sigma_a^2}} + a_1\{\bar{x} - (n-2)\}^2 + a_2\{\bar{x} - (2-n)\}^2 \right] (1-\bar{\eta}) \quad (6)$$

$$a_1 = \begin{cases} \frac{3}{8} \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left( \frac{n-\bar{\zeta}}{\sqrt{2}\sigma_a} \right) & (n-2 \leq \bar{x} \leq n) \\ 0 & (\bar{x} < n-2) \end{cases}$$

$$a_2 = \begin{cases} \frac{3}{8} \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left( \frac{n+\bar{\zeta}}{\sqrt{2}\sigma_a} \right) & (-n \leq \bar{x} \leq 2-n) \\ 0 & (2-n < \bar{x}) \end{cases}$$

$$\text{여기서 } \bar{x} = \pm n (2n = F/H)$$

굽힘 모멘트의 영향함수가 구해지면 이뿌리부의 응력은 다음 식에 의해 얻어지고 이 해석 프로그램의 전체 구성도는 Fig.9에 표시된다.

$$\sigma(x) = \frac{6 \sum \beta(x, \zeta, \eta) p(\zeta, \eta)}{S_F^2} \quad (7)$$

### 4. 실험

저속 상태에서 치의 접촉 상태 및 응력 상태를 알기 위해 Fig.10과 같은 실험 장치를 제작하였다. 구동은 3.7kW, 2,500rpm의 단상 유도 전동기로 하고 1/60 감속기를 사용하여 감속하였다. 동력흡수는 359Kgf·m, 80HP, 1,370rpm의 다이내모미터를 사용하였다.

변형을 측정을 위하여 0.3mm의 게이지 길이, 120Q의 스트레인 게이지를 사용하였다. 스트레인 게이지는 기어의 원주상으로 위상을 두고 5

Table 1 Pressure angle coefficient

Pressure angle	14.5°	17.5°	20°
$\sigma_a$	0.693	0.666	0.649

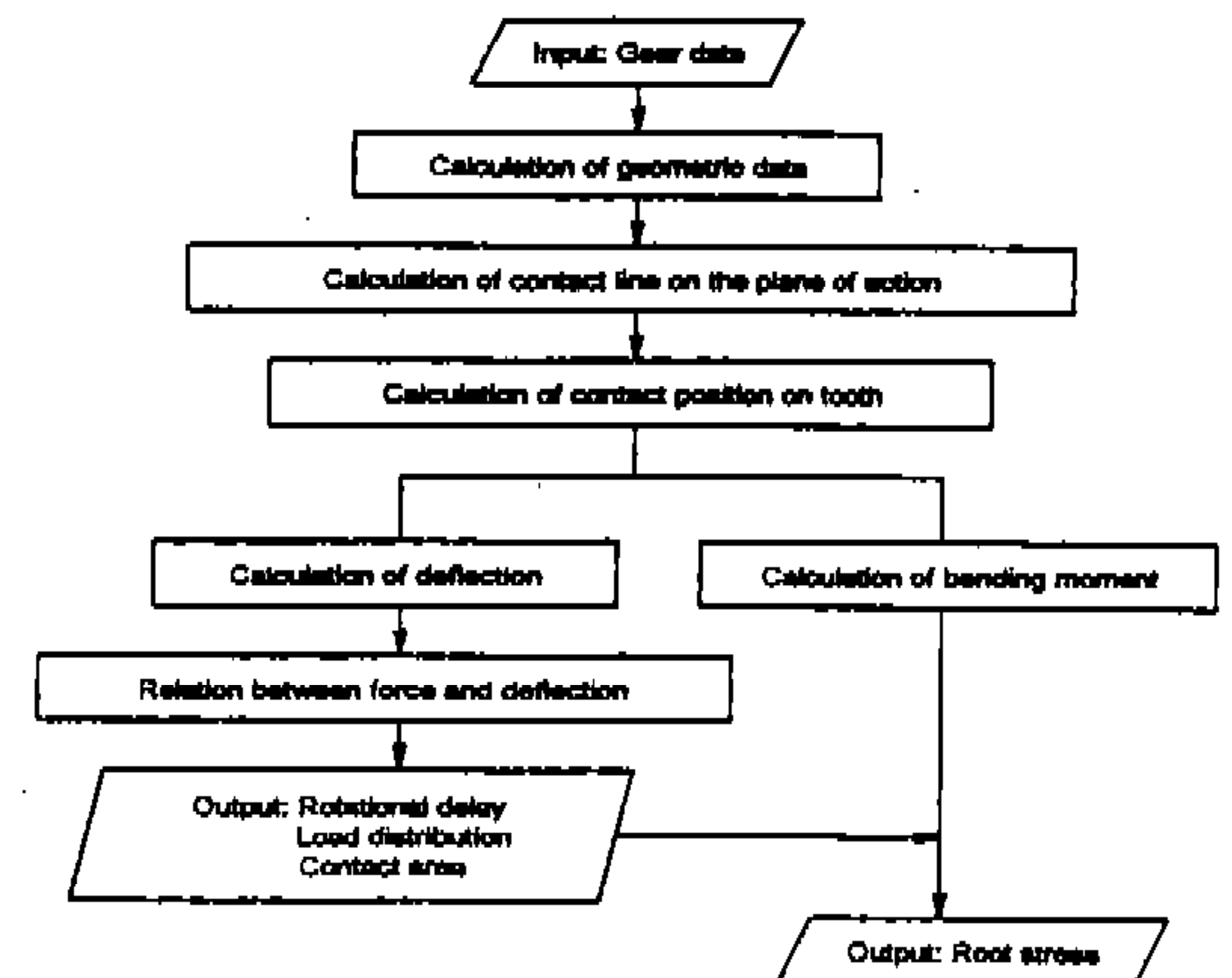


Fig.9 Flow diagram of simulation

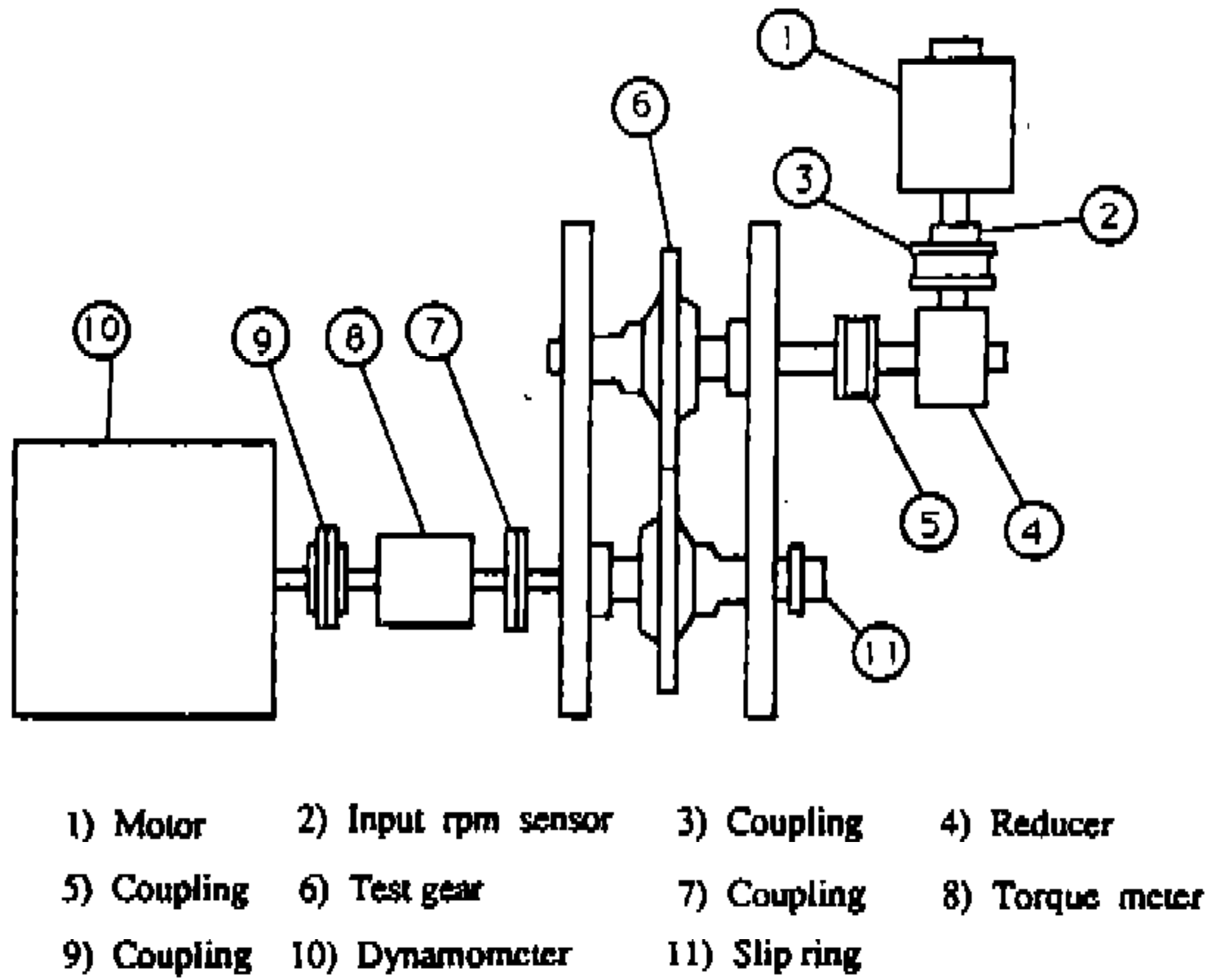


Fig.10 Schematic diagram of test rig

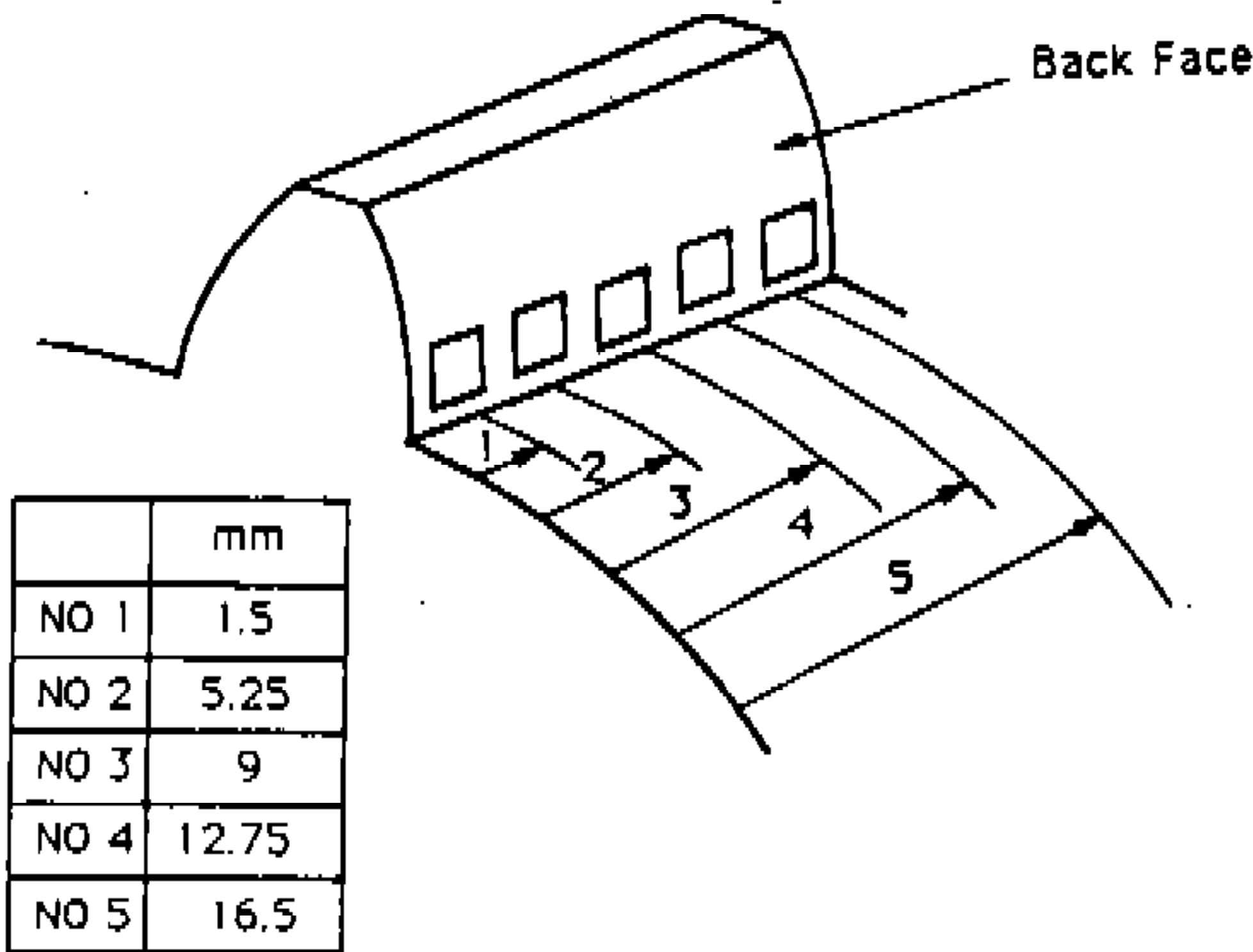


Fig.11 Position of strain gages

Table 2 Instruments

Instrument	Model
Strain amplifier	Measurement group 2310
Tape recoder	TEAC XR5000
Oscilloscope	TEKTRONIX 2236, 468, 2440
Plotter	HP 7090 A

개의 치를 선택하여 치폭 방향으로 위치를 변경하면서 Fig.11과 같이 5개를 부착하였다. 치의 뒷면에 가능한한 펠렛곡선 가까이에 스트레인 게이지를 부착하고 리드 와이어를 치앞면으로 뽑아내었다.

축의 중심에 구멍을 내어 이곳을 통해 선을 뽑

Table 3 Gear specification

	Driving	Driven
Normal module(mm)	2.25	
Normal pressure angle(deg)	17.5°	
Helix angle(deg)	28°	
Center distance(mm)	127	
Whole depth(mm)	6.6	
Face width(mm)	18	18
Outside diameter(mm)	130.36	135.26
Pitch diameter(mm)	122.32	127.41
Root diameter(mm)	117.16	122.06
Amount of add. modi.(mm)	1.17	1.07
Number of teeth	48	50
	Finishing	Grinding

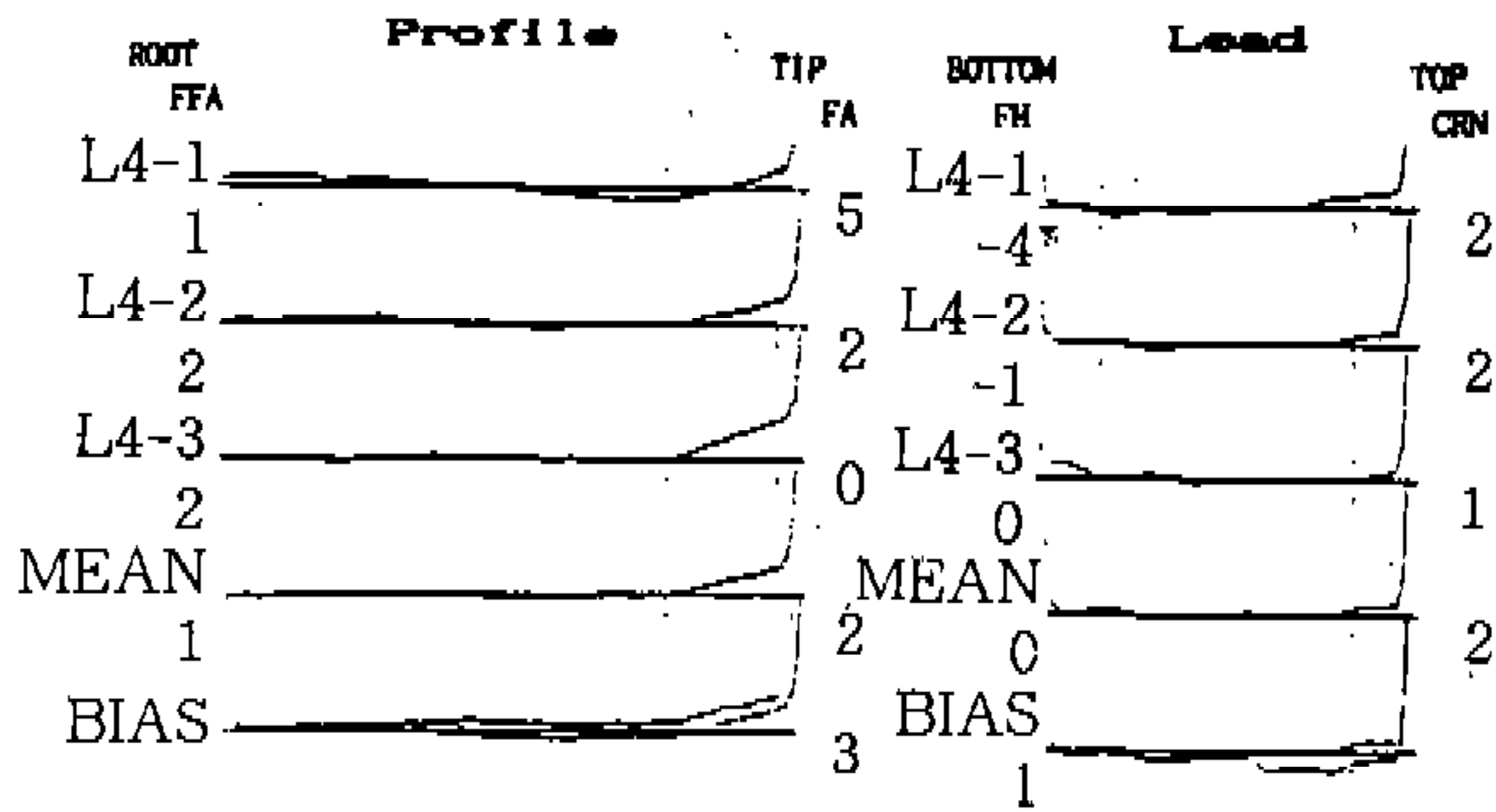
고 슬립링의 회전 부분 단자에 선을 연결하였다. 슬립링의 비회전 부분에서 선을 스트레인 증폭기에 1/4브리지(Quarter bridge)로 연결하고 테이프 레코더에 그 신호를 기록하였다. Table 2는 이 실험에 사용된 계측기 표이다.

치의 윤활을 위하여 시험전에 변속기유를 치에 주입하였고 실험은 입력 rpm을 17rpm으로 부하 토크를 15에서 30kgf·m로 각각 변경하면서 실시하였다. 치 접촉시험을 위하여서는 구동 및 피동기어의 치면에 페인트(STEEL-BLUE DX-100)를 바르고 17rpm과 부하토크 15와 30kgf·m에서 실험을 실시하였다. 실험에 사용된 기어 제원은 Table 3을 사용하였고 치의 오차는 Fig. 12에 나타내었다.

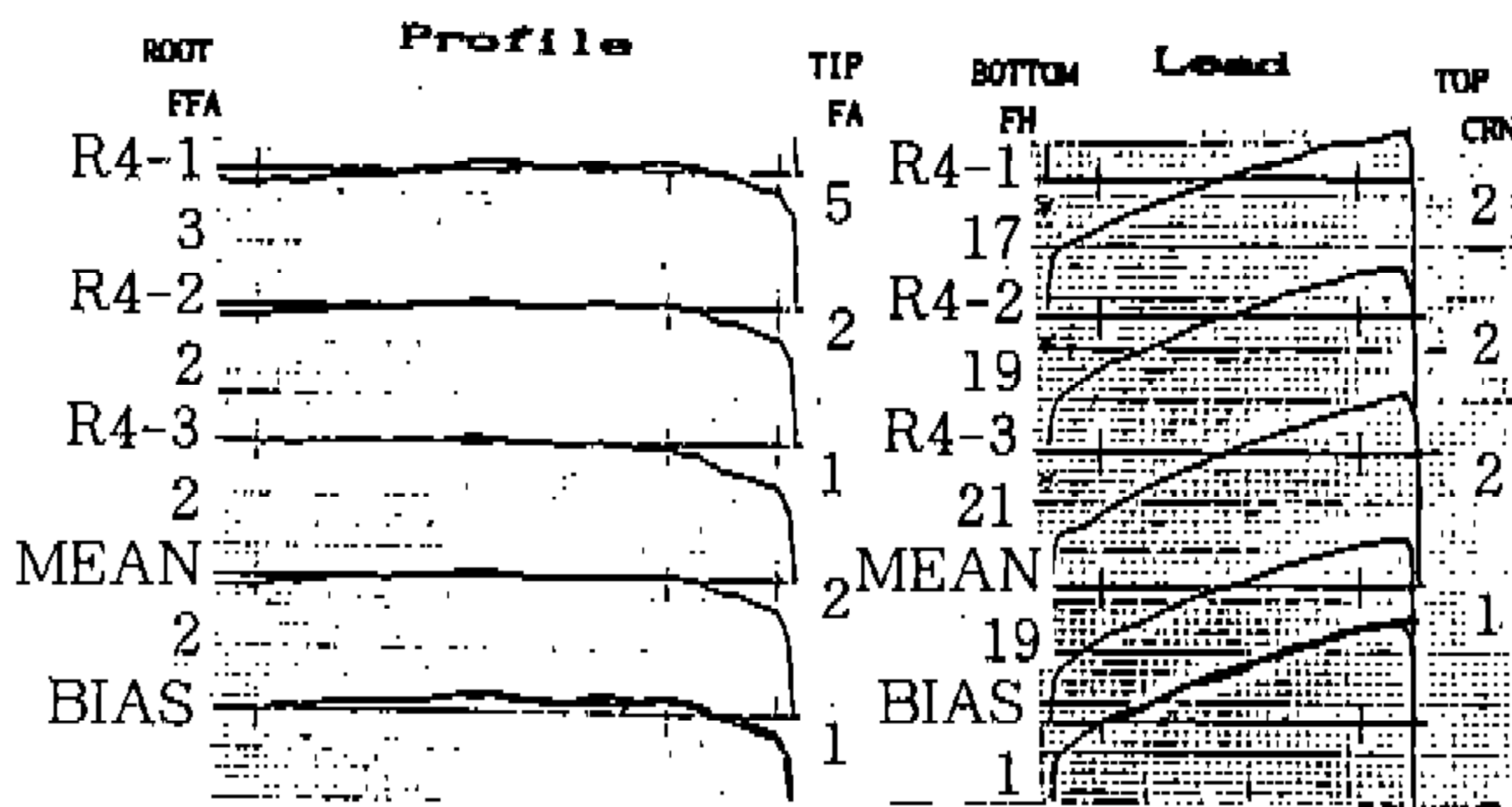
Fig.13은 부하 토크 30kgf·m, rpm 17에서 0.2초 동안 No.1부터 No.5까지의 변형율을 측정 한 결과이다. 변형율이 No.1에서 No.5로 가면서 점차 작아지는 것을 알 수 있다. Fig.14는 rpm 17과 부하 토크 15kgf·m, 30kgf·m에서 각각 치 접촉 실험을 한 결과이며 토크가 증가함에 따라 접촉 영역이 확대되고 있음을 알 수 있다.

5. 결과 및 고찰

시뮬레이션 결과를 확인하기 위해 Table 3의

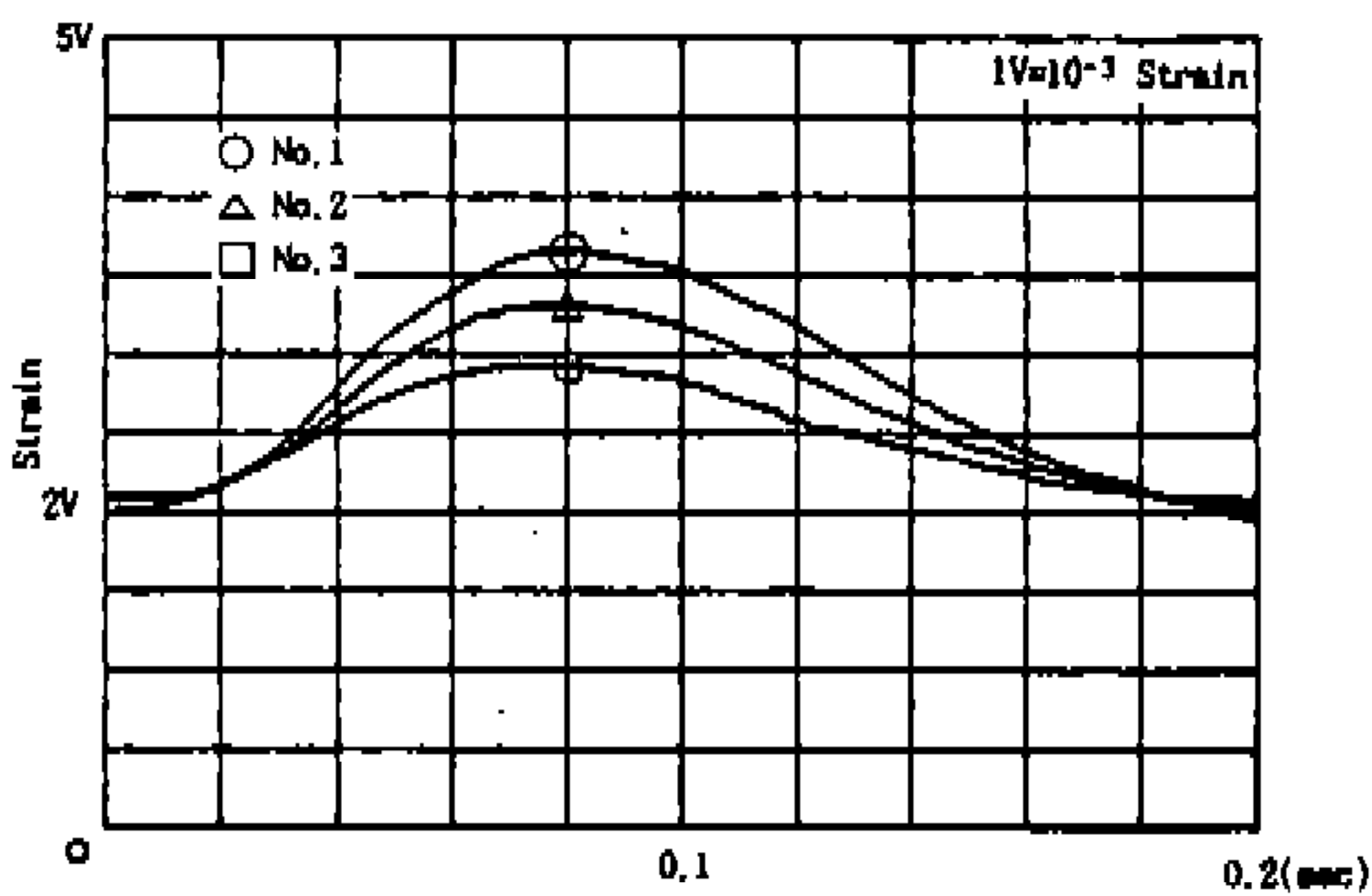


(a) Driving gear

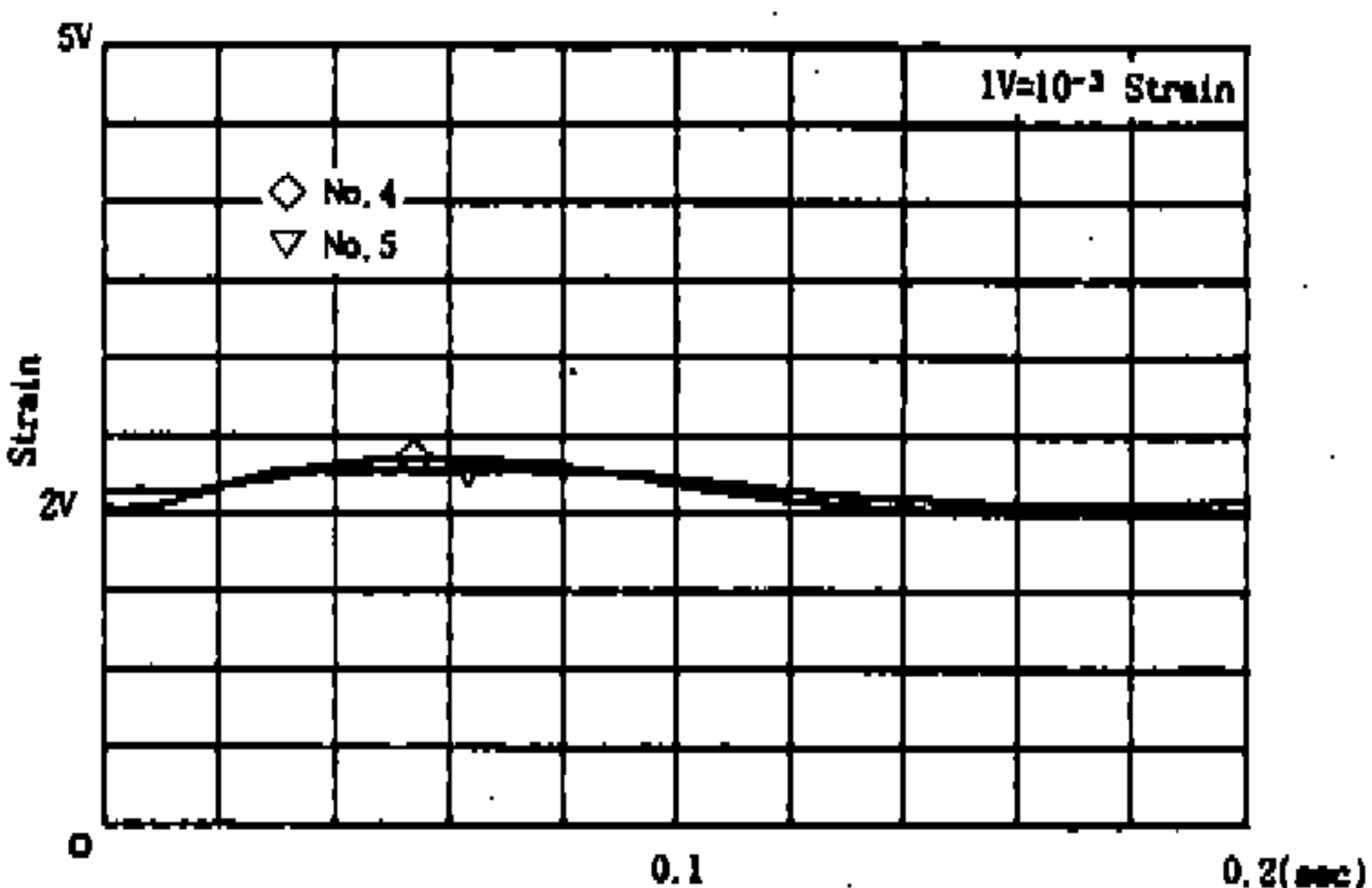


(b) Driven gear

Fig.12 Measured tooth error

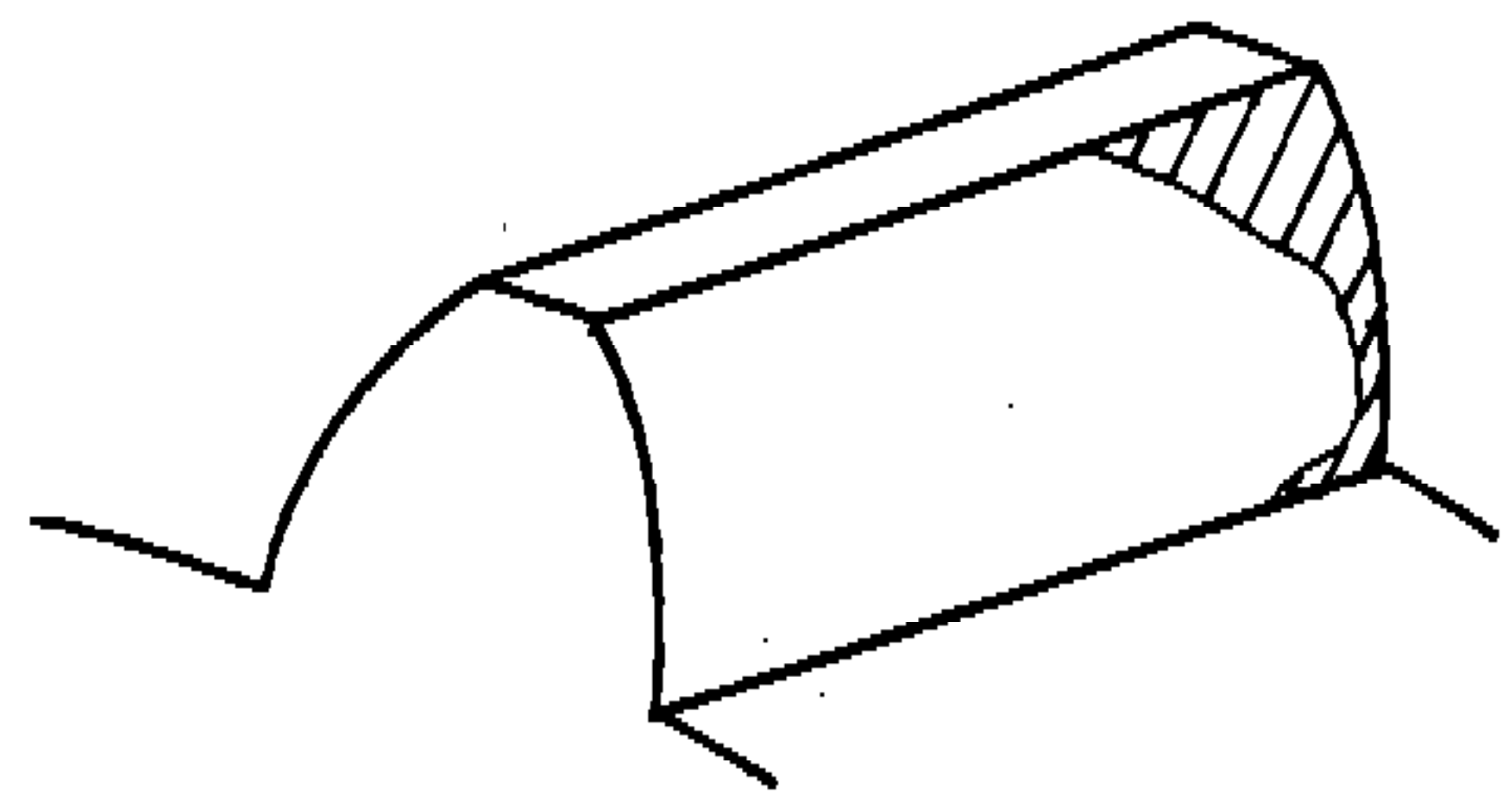


(a) Position 1, 2, 3

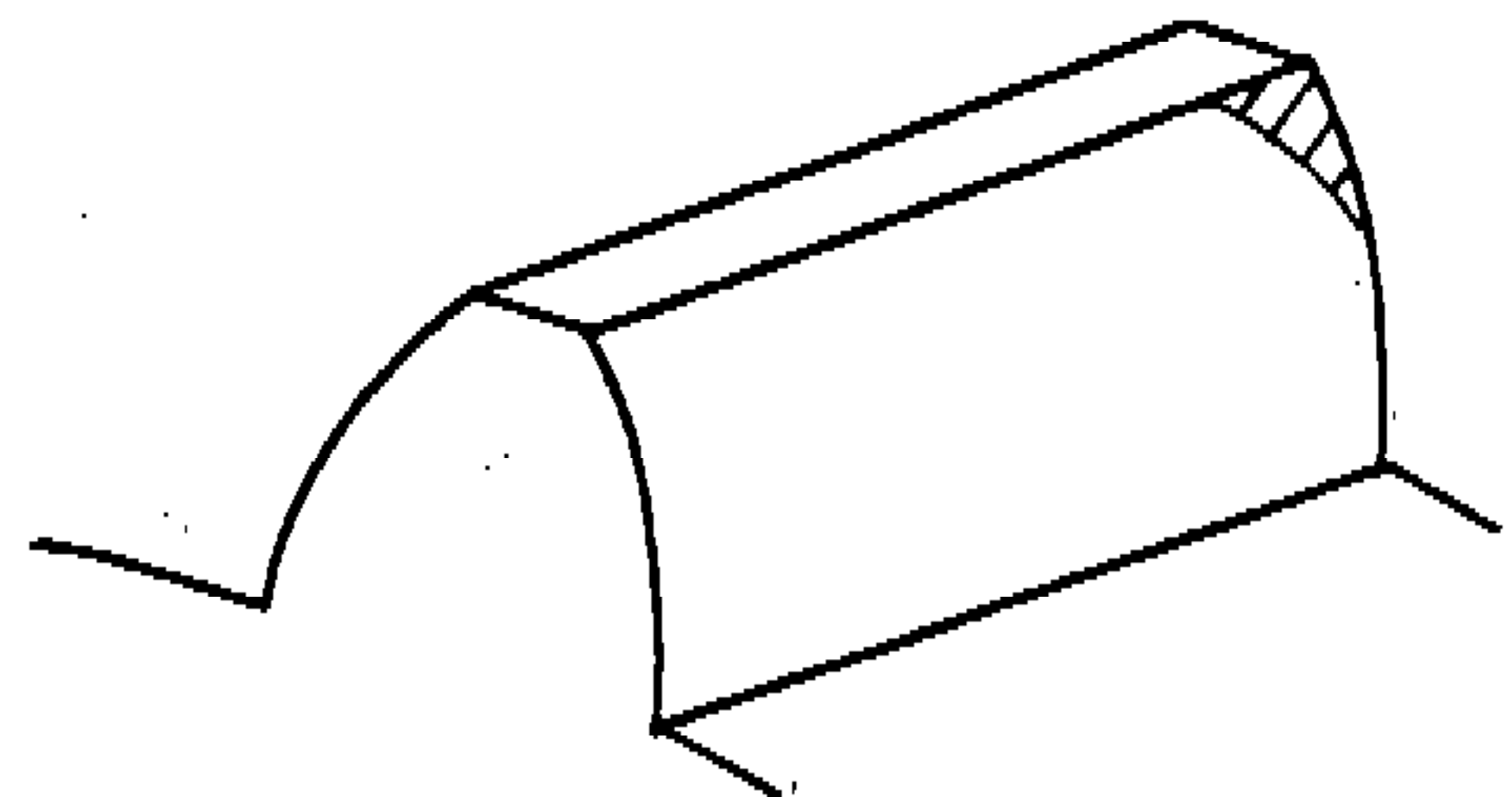


(b) Position 4, 5

Fig.13 Measured root strain(30kgf·m)



(a) 15kgf·m



(b) 30kgf·m

Fig.14 Measured contact area

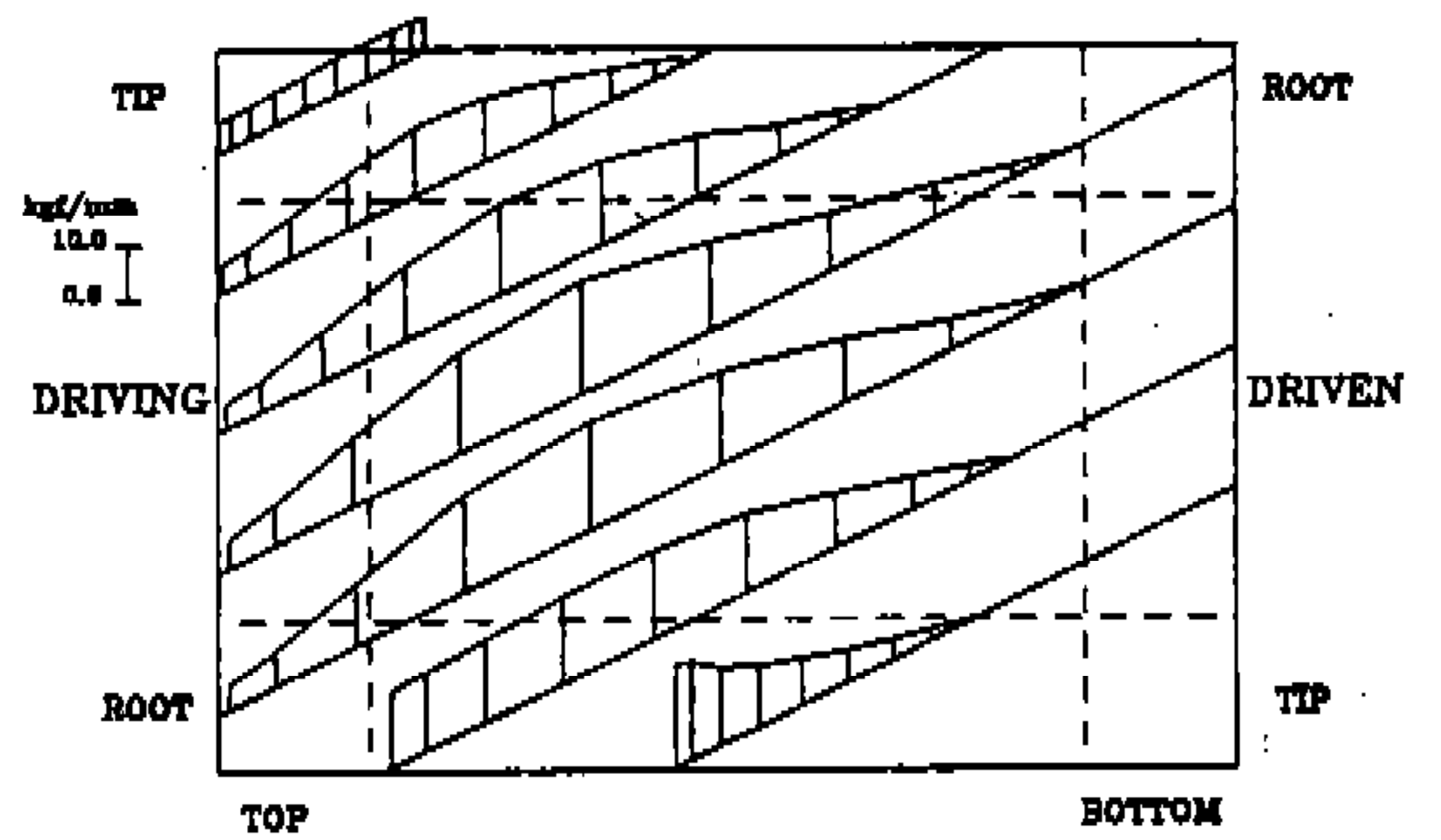


Fig.15 Predicted load distribution(15kgf·m)

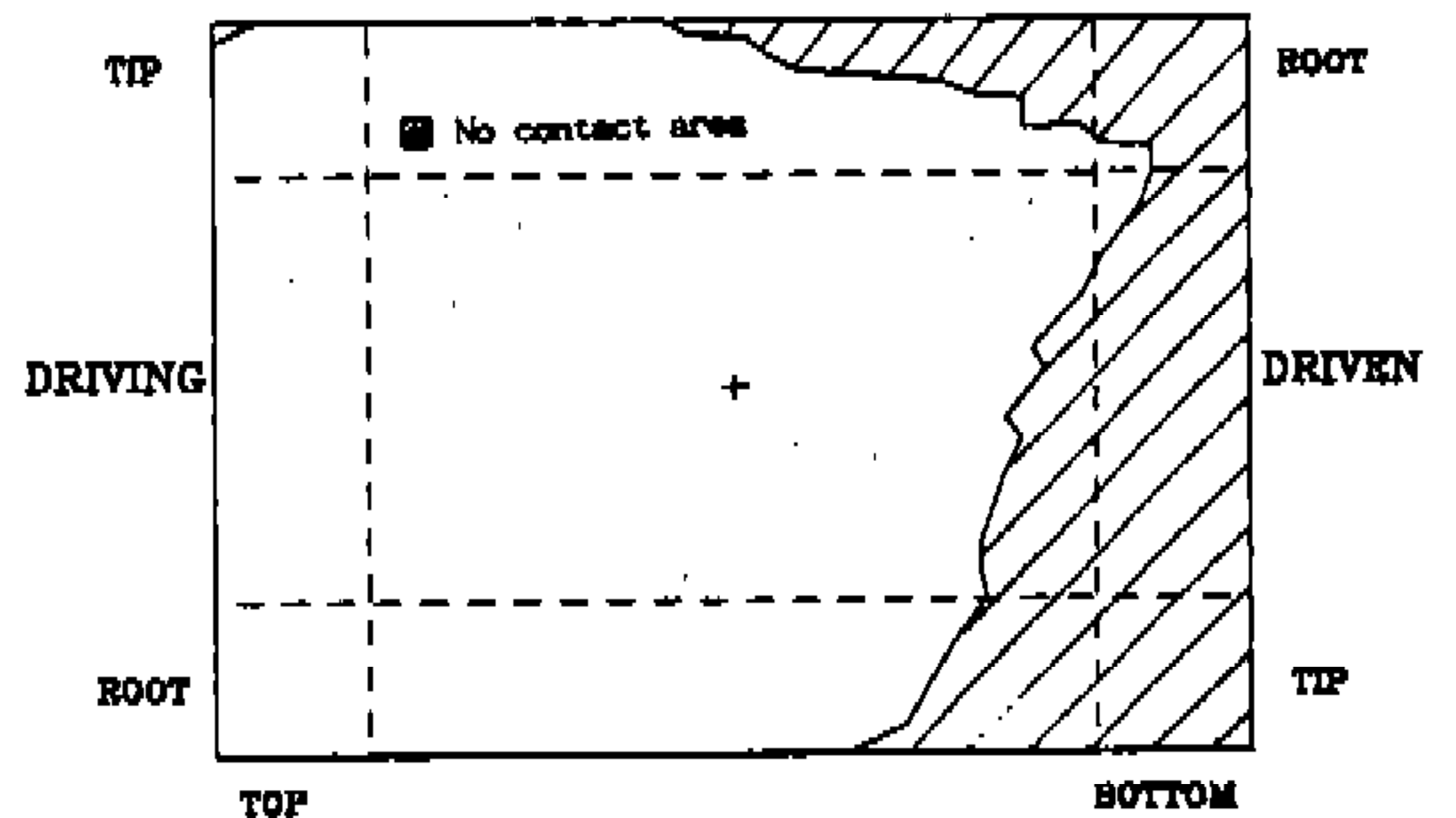


Fig.16 Predicted contact area(15kgf·m)

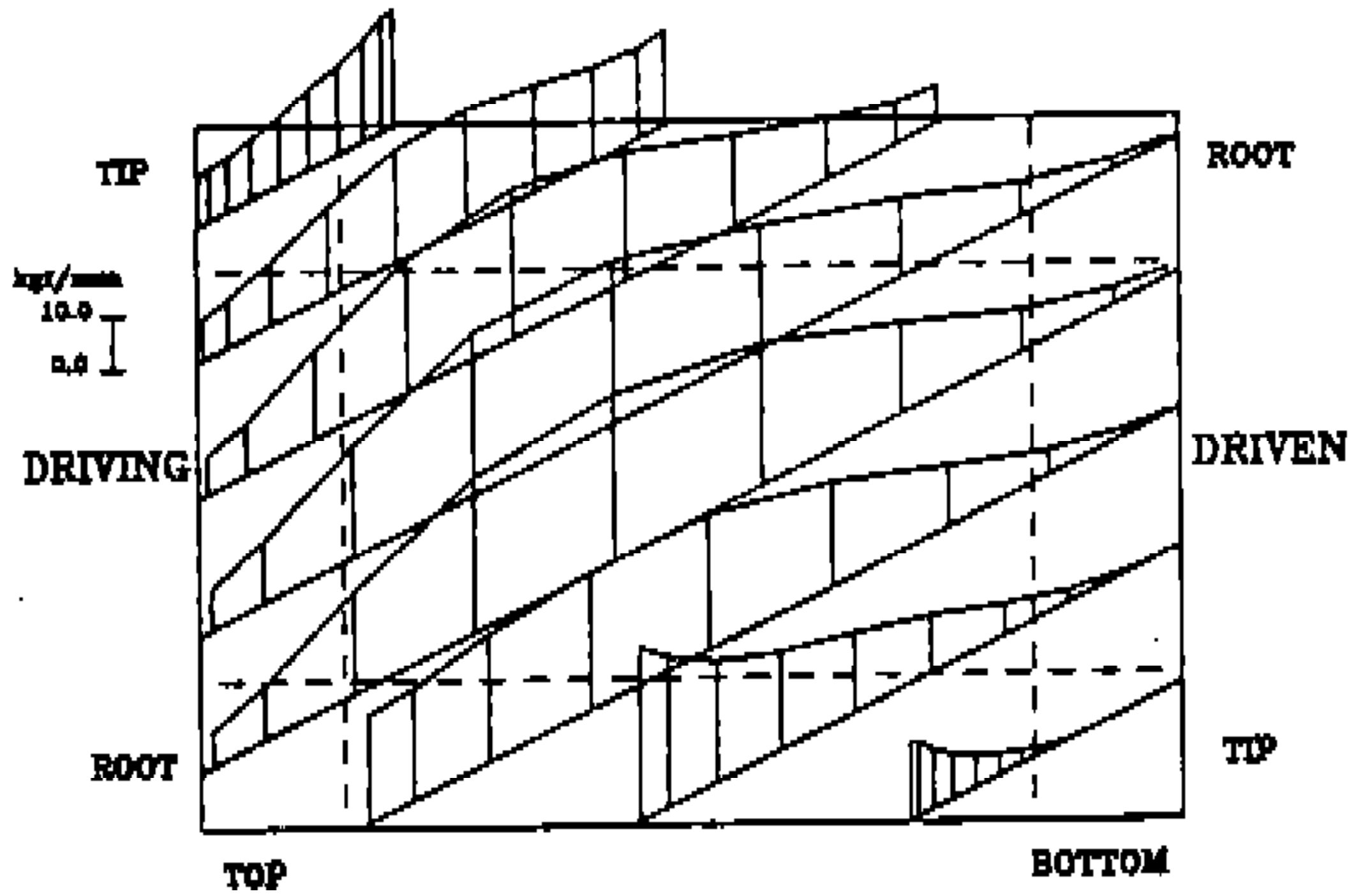


Fig.17 Predicted load distribution(30kgf·m)

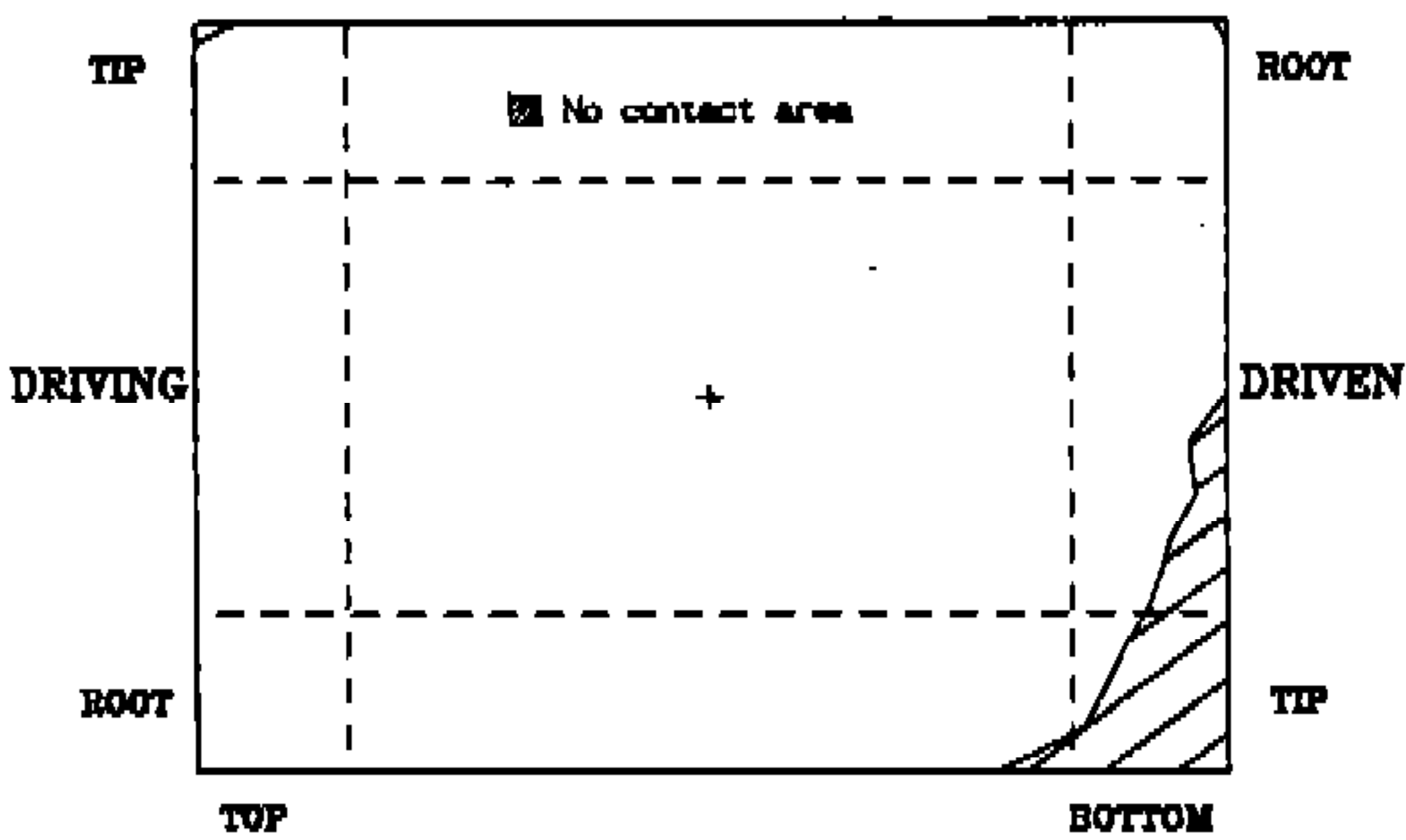


Fig.18 Predicted contact area(30kgf·m)

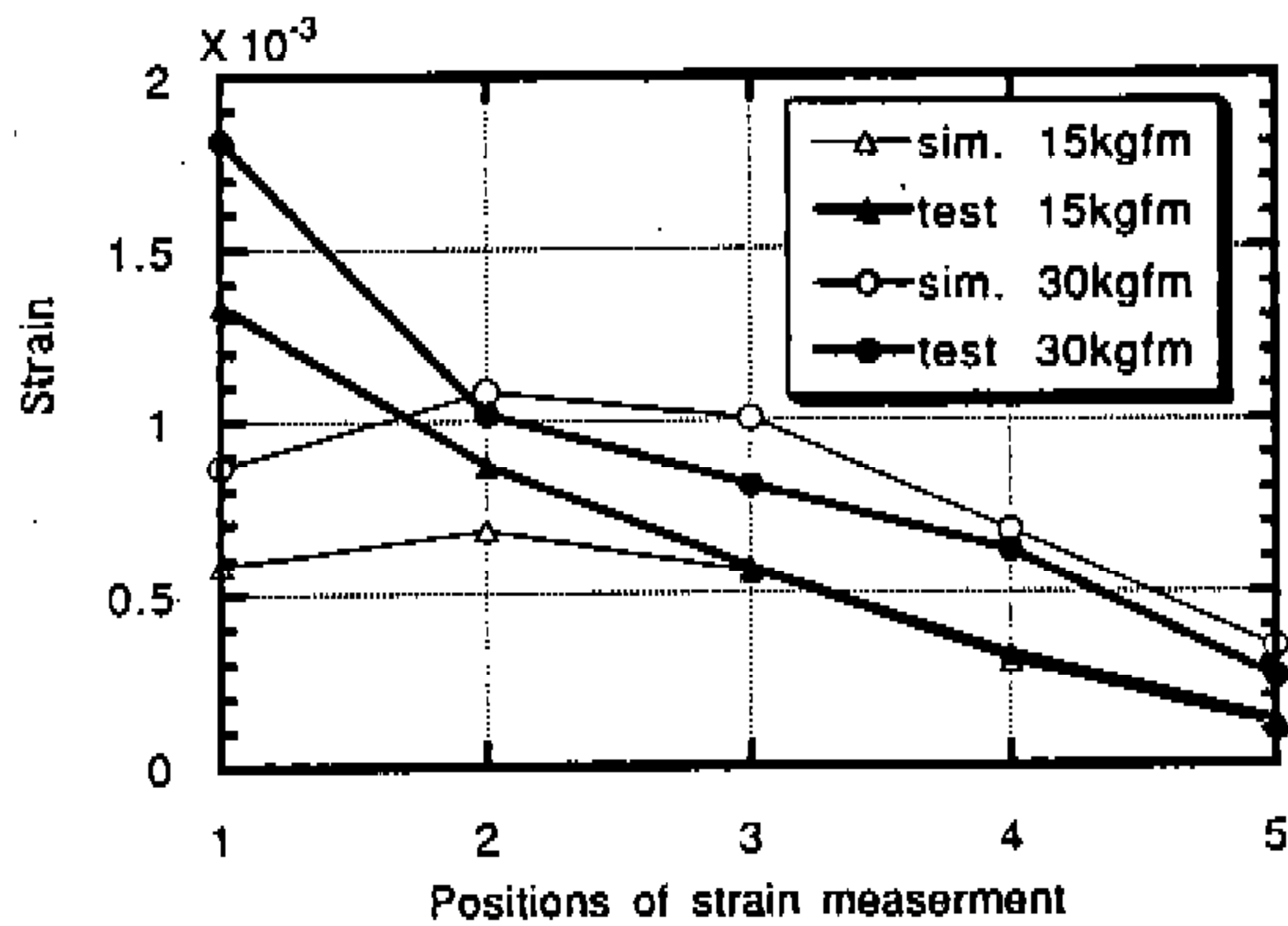
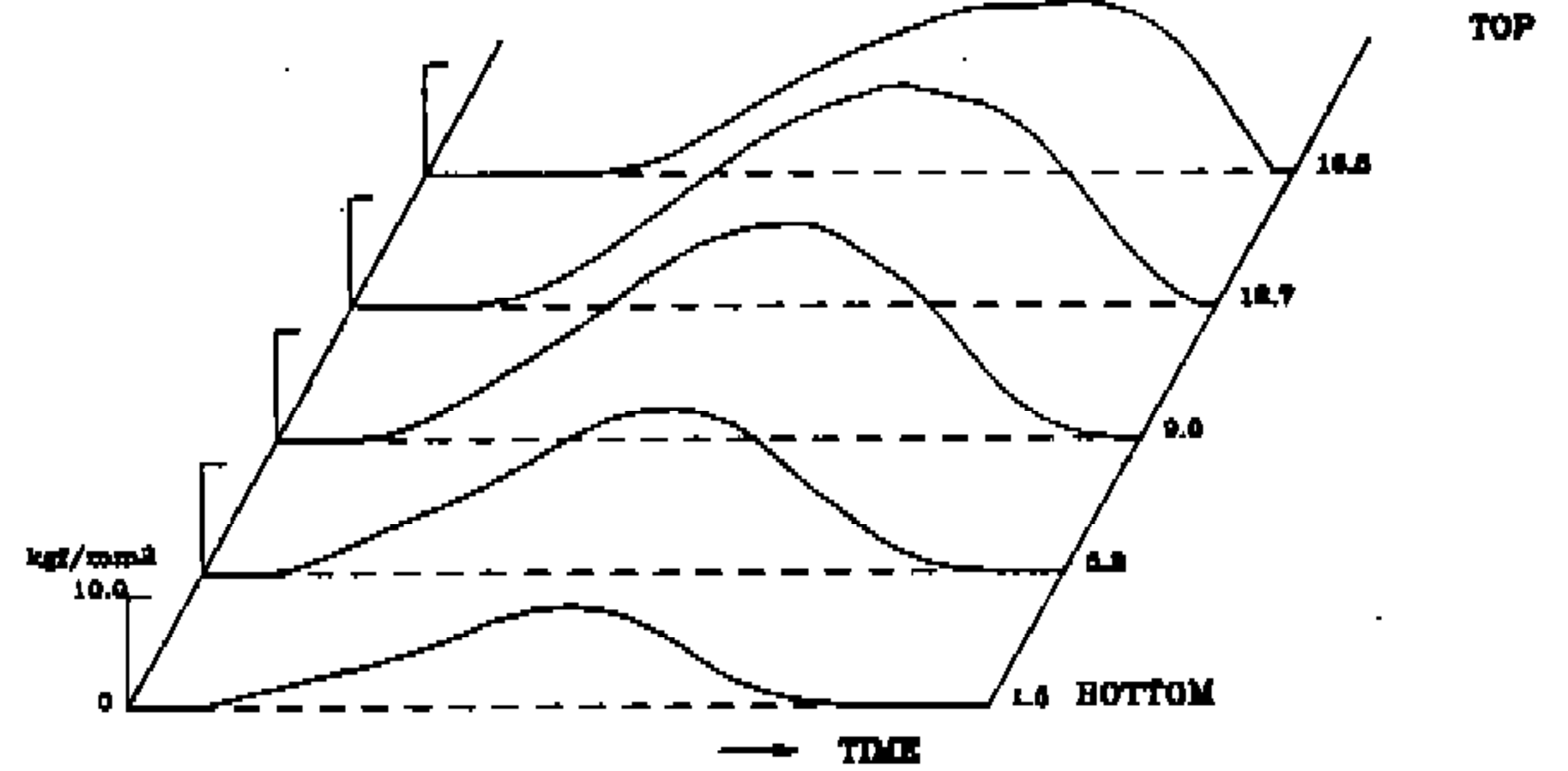


Fig.20 Comparison between test results and simulation results

제원과 Fig.12의 치형 데이터를 입력하여 부하 토크 15kgf·m와 30kgf·m에 대해 해석하였다. 토크가 15kgf·m와 30kgf·m일 때 치면의 하중 분포와 작용 평면상의 접촉 영역을 나타낸 것이

ROOT STRESS (DRIVING)



ROOT STRESS (DRIVEN)

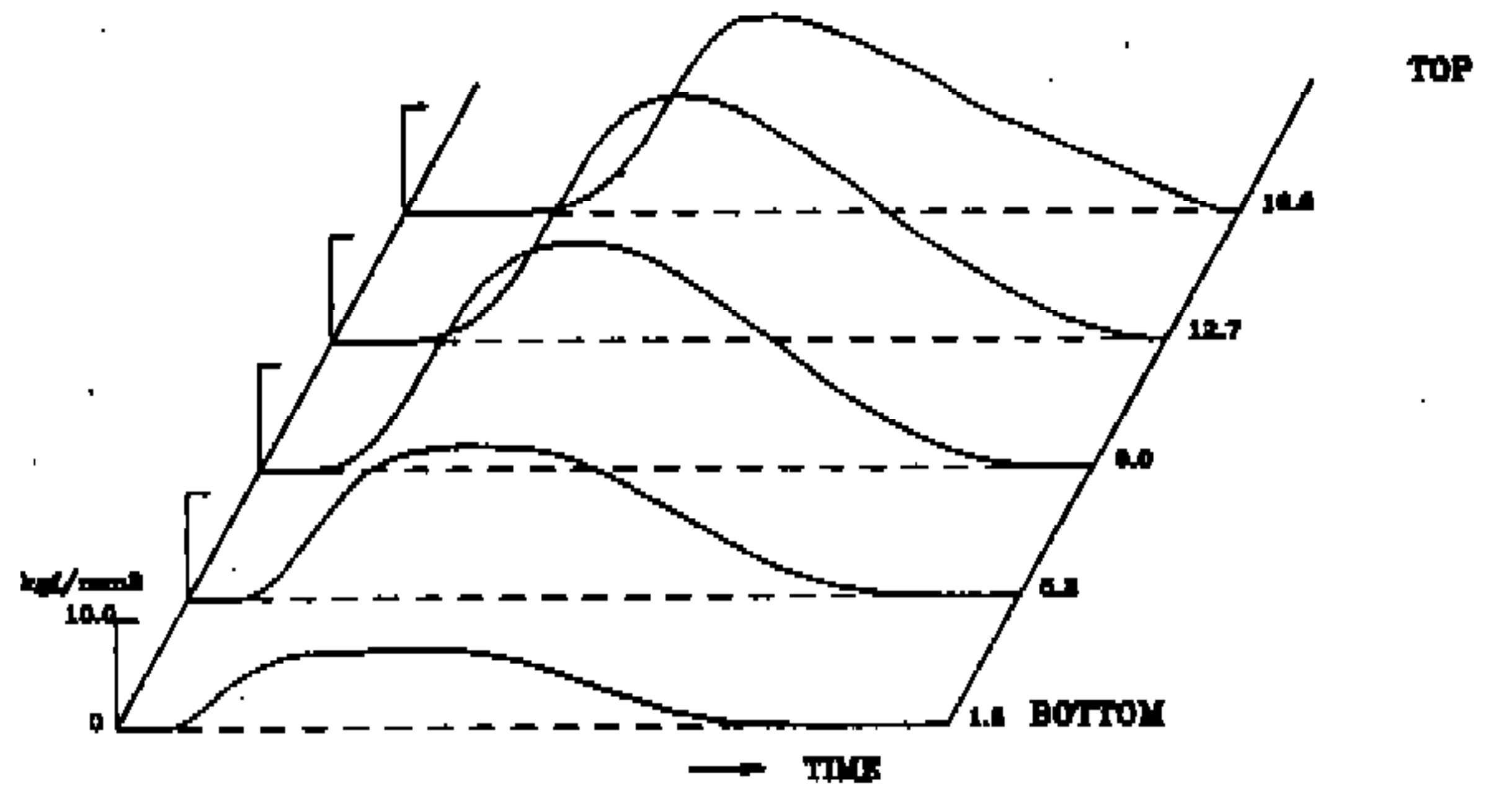


Fig.19 Predicted root stress(30kgf·m)

Fig.15에서 Fig.18까지이다. 이 그림에서 보는 바와 같이 토크가 커짐에 따라 치면에 작용하는 하중 분포 및 접촉 영역이 커짐을 알 수 있다. 또한 리드 오차 치의 밑(Bottom) 부분에서 윗(Top) 부분으로 상승되는 형태이므로 토크가 작을 때는 치의 밑 부분에서는 접촉하지 않다가 토크가 커짐에 따라 치의 밑 부분도 접촉하는 것을 보이고 있다. 이 해석 결과를 접촉영역 실험결과 Fig.14와 비교해 보면 유사한 경향을 나타내고 있다.

Fig.19는 토크 30kgf·m일 때의 구동기어와 피동기어의 이뿌리부의 응력분포를 나타낸다. 응력 변화 경향은 구동기어에서 완만하게 증가하다가 급격히 줄어들고 피동기어에서는 급격히 증가하다가 완만하게 감소하는 형태이다. 이 해석 결과를 실험 결과 Fig.13과 비교하면 시뮬레이션과 실험 모두 응력과 변형율의 변화하는 형태는 유사함을 알 수 있다. Fig.20에서는 계산된 최대



응력을 탄성 계수로 나누어서 변형율에 대해 실험결과와 함께 최대 변형율 값을 나타내었다. 이 그림에서 보는 바와 같이 No.1에서는 실험결과와 편차를 보이나 No.2부터 No.5까지는 해석결과와 비슷한 경향을 나타내고 있다.

## 6. 결 론

이 연구는 차량용 변속장치에 많이 쓰이는 헬리컬 기어를 대상으로 하중전달특성을 예견할 수 있는 시뮬레이션 프로그램에 관한 것으로 연구결과 다음과 같은 결론을 얻었다.

- 1) 치 지지부를 고려하여 치의 컴플라이언스를 유한 요소해석으로 구하고 헬리컬 기어의 하중분포, 회전지연, 치접촉 영역 및 이뿌리부 응력을 예견할 수 있는 시뮬레이션 프로그램을 개발하여 기존의 설계 방법을 대체할 수 있는 좀 더 정확한 해석을 가능하게 하였다.
- 2) 이 해석 방법의 타당성 확인을 위하여 별도의 실험 장치를 제작하고 이뿌리부 응력, 치접촉 실험을 통하여 해석 방법의 유용성을 검증하였다.

## 참 고 문 헌

1. Simon, V., "Load and Stress Distributions in Spur and Helical Gears" ASME Journal of Mechanisms, Transmissions, and Automation in Design June 1988, Vol. 110, pp.197-202.
2. Conry, T.F. and Seireg, A., "A Mathematical Programing Technique for the Evaluation of Load Distribution and Optimal Modifications for Gear Systems", ASME Journal of Engineering for Industry Nov. 1973, pp.1115-1122.
3. Kubo, A., "Stress Condition, Vibrational Exciting Force, and Contact Pattern of Helical Gear with Manufacturing and Alignment Error", ASME Journal of Mechanical Design, Vol.100 Jan. 1978, pp.77-84.
4. Hayashi, Kunikazu, "Load Distribution on the Contact Line of Helical Gear Teeth (Part I Fundamental Concept)", Bulletin of the JSME Vol.6 No.22 1963, pp.336-343.
5. Umezawa, K., "The Meshing Test on Helical Gears under Load Transmission(1st Report, The Approximate Formula for Deflections of Gear Tooth)", Bulletin of the JSME, Vol.15, No.90 1972, pp.1632-1639.
6. Umezawa, K., "The Meshing Test on Helical Gears under Load Transmission(2nd Report, The Approximate Formula for Bending-Moment Distribution of Gear Tooth)", Bulletin of the JSME, Vol.16, No.92 Feb., 1973, pp.407-413.
7. Umezawa, K., "Deflections and Moments Due to a Concentrated Load on a Rack-Shaped Cantilever Plate with Finite Width for Gears", Bulletin of the JSME, Vol.15, No.79, 1972, pp.116-130.
8. Umezawa, K., "The Meshing Test on Helical Gears under Load Transmission(3rd Report, The Static Behaviours of Driven Gear)", Bulletin of the JSME, Vol.17, No. 112, Oct. 1974, pp.1348-1355.
9. Umezawa, K., and Ishikawa, J., "Deflection Due to Contact between Gear Teeth with Finite Width", Bulletin of the JSME, Vol.16, No.97, Jul. 1973, pp.1085-1093.
10. Stegemiller, M. E., and Houser, D. R., "A Three Dimensional Analysis of the Base Flexibility of Gear Teeth", Proceedings of the 1989 International Power Transmission and Gearing Conference, pp.189-196.
11. Masahiroi Utagawa, "Measurements of Dynamic Loads on Gear Teeth", Proceedings of the 6th Japan National Congress for App. Mech., 1956, IV-14.