

〈논 문〉 SAE NO. 953784

U형 벨로우즈의 유한요소해석과 특정 강성을 위한 형상최적설계

A Finite Element Analysis and Shape Optimal Design with Specified Stiffness for U-typed Bellows

고 병 갑,* 서 용 진,* 박 경 진**
K. G. Koh, Y. J. Suh, G. J. Park

ABSTRACT

A bellows is a component installed in the automobile exhaust system to reduce the impact from an engine. It's stiffness has a great influence on the natural frequency of the system. Therefore, it must be designed to keep the specified stiffness that requires in the system. This study present the finite element analysis of U-typed bellows using a curved conical frustum element and the shape optimal design with specified stiffness. The finite element analysis is verified by comparing with the experimental results. In the shape optimal design, the weight is considered as the cost function. The specified stiffness from the system design is transformed to equality constraints. The formulation has inequality constraints imposed on the fatigue limit, the natural frequencies, the buckling load and the manufacturing conditions. A procedure for shape optimization adopts a thickness, a corrugation radius, and a length of annular plate as optimal design variables. The external loading conditions include the axial and lateral loads with a boundary condition fixed at an end of the bellows. The recursive quadratic programming algorithm is selected to solve the problem. The result are compared with the existing bellows, and the characteristics of the bellows is investigated through the optimal design process. The optimized shape of the bellows are expected to give quite a good guideline to the practical design.

주요기술용어 : Expansion Joint(신축이음), U-typed Bellows(형 벨로우즈), Conical Frustum Element(원추대요소), Multiple Optimization Method(다목적 최적화기법), Weighting Objective Method(가중목적법)

* 정회원, 한양대학원 기계설계학과

** 정회원, 한양대학교 기계공학과

1. 서 론

자동차 엔진의 운동으로 인한 배기시스템의 변형이나 파손을 방지하기 위하여 신축이음(expansion joint)의 일종인 U형 벨로우즈(U-typed bellows)가 사용되고 있다. 이것은 토로이달 셸(toroidal shell)이 기본 형상이며, 원형 평판(annular plate)과 원통 셸(cylindrical shell)이 복합된 플렉시블 셸(flexible shell)의 일종이다¹⁾.

벨로우즈에 대한 기존의 해석 이론은 셸의 지배방정식을 급수전개법²⁾이나 점근법(asymptotic solution)³⁾으로 근사하여 해를 구하는 이론과 에너지이론⁴⁾으로 분류된다. 이와 같은 해석 이론은 비교적 정확한 해를 구할 수 있는 장점은 있으나, 셸의 지배방정식 및 기하학적 변수의 근사과정으로 인하여 해의 안정상태와 적용 범위에 문제가 있는 것으로 보고⁵⁾되고 있다. 최근에는 해석 과정에서 인위적인 가정을 최소화할 수 있는 유한요소법을 이용하여 벨로우즈를 해석한 연구⁶⁾가 수행되었다. 이 연구에서는 축대칭 원추대요소(axisymmetric conical frustum element)를 비축대칭으로 확장하여 벨로우즈의 굽힘문제를 다루었으나, 곡선 형상의 벨로우즈를 구현하기 위해서는 많은 요소수가 필요한 단점이 있다.

본 연구에서는 해석 범위가 넓고, 해석 과정에서 인위적인 가정을 최소화할 수 있으며, 적은 요소수로도 곡선 형상의 벨로우즈를 정확하게 구현할 수 있는 곡선 원추대요소(curved conical frustum element)를 사용하여 벨로우즈를 해석하였다. 해석의 정확도를 입증하기 위하여 축방향 및 횡방향 변형량 실험을 수행하였으며, 기타의 유한요소를 이용한 결과도 병행하여 비교하였다. 또한 이와 같은 유한요소 해석으로부터 벨로우즈의 형상최적설계를 수행하였다. 벨로우즈에 대한 형상최적설계의 목적은 배기시스템에서 요구하는 벨로우즈의 특정한 강성을 만족하도록 하는 형상의 결정에 있다. 즉, 벨로우즈의 강성은 배기시스템의 고유진동수에 큰 영향을 미치므로 엔진과의 공진방지를 위한 강성의 특정한 설계값

이 필요하다. 이와 같이 요구된 벨로우즈 강성의 특정한 설계값을 만족시키는 벨로우즈의 형상을 형상최적설계를 통하여 결정하였다. 형상최적설계는 먼저 벨로우즈의 유연성에 영향을 미치는 기하학적 인자들에 관하여 고찰한 후 최종적으로 특정한 강성을 만족하도록 하는 벨로우즈의 형상을 결정하였다. 이를 위해 다목적 최적화기법(multiple optimization method)이 도입되고, 다목적함수의 스칼라화를 위하여 가중목적법(weighting objective method)을 적용하였다. 배기시스템에서 요구하는 벨로우즈의 특정한 강성을 등제한조건함수(equality constraint function)로 고려하고, 부등제한조건함수(inequality constraint function)로는 피로수명, 고유진동수 및 좌굴을 선정하였다. 또한 실제 벨로우즈의 제작환경을 부등제한조건함수에 포함시켜 최적화 경향을 고찰하였으며, 벨로우즈의 기하학적 형상을 설계변수(design variable)로 설정하였다. 프로그램은 FORTRAN 77언어로 편집(coding)하였으며, 적용한 최적화기법은 반복이차계획법(Recursive Quadratic Programming)⁷⁾ 알고리즘을 사용하였다.

위와 같이 곡선 원추대요소를 이용한 유한요소 해석을 통하여 U형 벨로우즈의 해석에 대한 보다 정확한 해를 산출하였으며, 형상최적화기법을 도입하여 특정한 강성에 따른 벨로우즈의 형상을 실제 제작환경까지 고려하여 결정하였다. 따라서 이와 같은 해석이론과 형상최적화기법은 벨로우즈의 해석 및 설계에 정확성, 효율성과 실질성을 부여하리라 기대된다.

2. 구조해석이론

2.1 곡선 원추대요소

벨로우즈는 축대칭 셸이므로 곡선 원추대요소를 이용하면 3절점 요소나 4절점 요소에 비해 요소분할(mesh generation) 과정이 간단하고 계산 시간, 기억 용량등을 개선할 수 있는 장점이 있다. 또한 해석 과정에서 셸의 변형이론을 도입하므로 평면 요소에 비하여 정확한 해를 구할 수 있다. 하나의 곡선 원추대요소는 Fig.1에

표시한 바와 같이 두개의 절점원(nodal circle)을 가지며, 요소에 발생하는 변위는 절점원에서 자오선방향의 변위 u , 원주방향의 변위 v , 법선방향의 변위 w , 그리고 회전변위 β 의 4가지 변위가 발생하므로 요소의 자유도(degree of freedom)는 8이다.

2.2 변위함수

곡선 원추대요소의 셀좌표계에 대한 변위함수는 비축대칭 변형을 고려하면 다음과 같이 푸리에급수(Fourier series)로 전개된다⁸⁾.

$$\begin{aligned}
 u(s, \theta) &= \sum_{n=0}^m u_n(s) \cos n\theta, \\
 v(s, \theta) &= \sum_{n=1}^m v_n(s) \sin n\theta \\
 w(s, \theta) &= \sum_{n=0}^m w_n(s) \cos n\theta, \\
 \beta(s, \theta) &= \sum_{n=0}^m \beta_n(s) \cos n\theta
 \end{aligned} \tag{1}$$

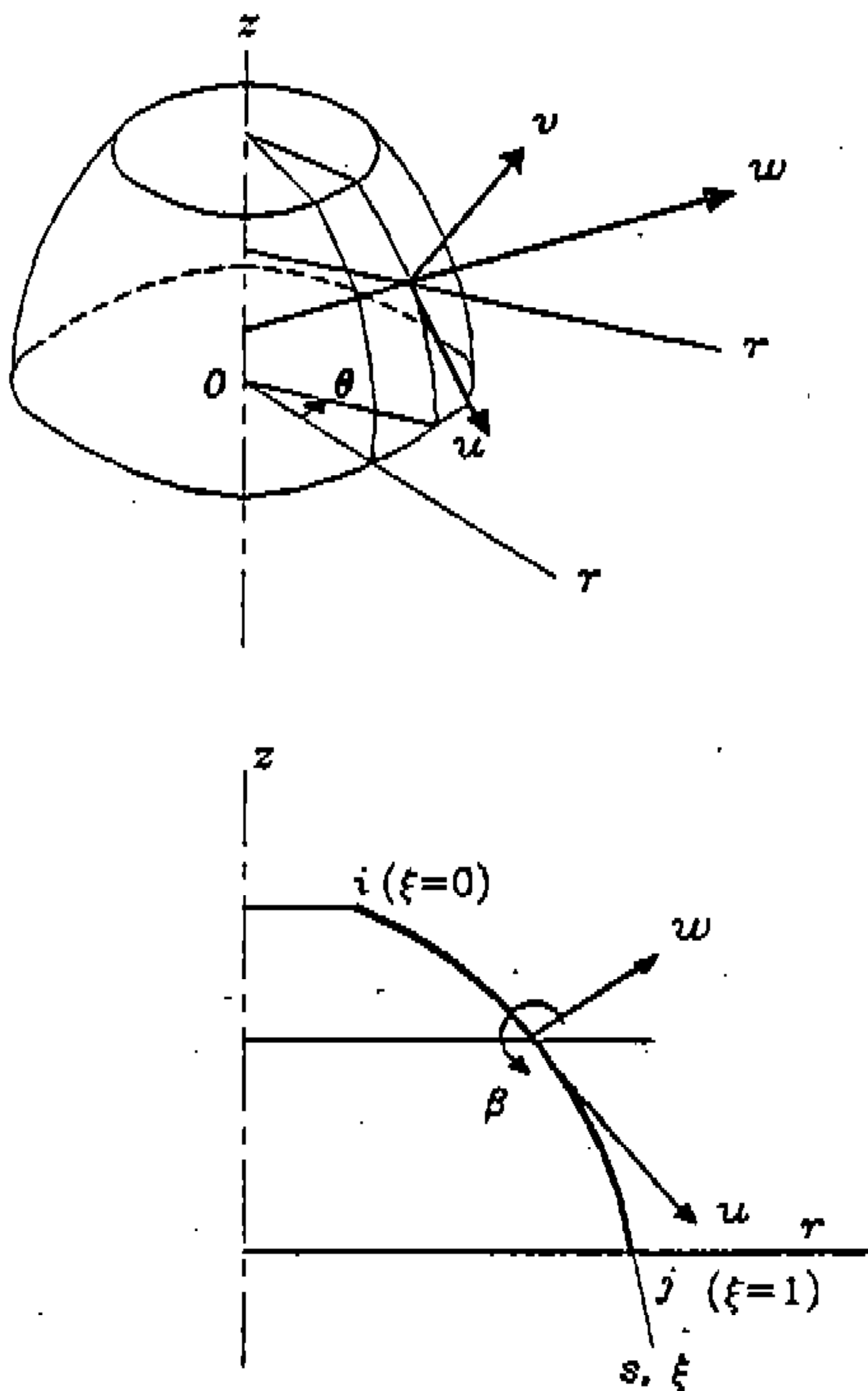


Fig.1 Displacements of the axisymmetric shell

여기서 n 은 푸리에급수의 조화성분(harmonic)의 차수이고 $u_n(s)$, $v_n(s)$, $w_n(s)$, 그리고 $\beta_n(s)$ ($n=0, 1, 2, \dots, m$)는 각 n 에 대응하는 변위 진폭으로 자오선방향의 변위 s 만의 함수이다. 따라서 한 요소당 자유도의 수가 8인점을 고려하면 변위함수는 다음과 같이 가정할 수 있다⁹⁾.

$$\begin{aligned}
 u_n &= c_1 + c_2 \xi \\
 v_n &= c_3 + c_4 \xi \\
 w_n &= c_5 + c_6 \xi + c_7 \xi^2 + c_8 \xi^3 \\
 \beta_n &= \frac{1}{L} \left(\frac{dw_n}{d\xi} + u_n \frac{d\phi}{d\xi} \right)
 \end{aligned} \tag{2}$$

여기서 ξ 는 s/L 인 무차원 변수이며, L 은 곡선 원추대요소의 자오선방향의 길이이다.

Fig.2에 표시한 요소의 절점원에 작용하는 하중에 대해서도 변위의 경우와 같이 푸리에급수로 전개하며, i 절점원에 작용하는 하중 $\{f_i\}$ 는 다음과 같이 표현된다.

$$\{f_i\} = \begin{Bmatrix} V_i(\theta) \\ T_i(\theta) \\ H_i(\theta) \\ M_i(\theta) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{1}{2} V_{oi} + \sum_{n=1}^m V_{ni} \cos n\theta \\ \sum_{n=1}^m T_{ni} \sin n\theta \\ \frac{1}{2} H_{oi} + \sum_{n=1}^m H_{ni} \cos n\theta \\ \frac{1}{2} M_{oi} + \sum_{n=1}^m M_{ni} \cos n\theta \end{Bmatrix} \tag{3}$$

여기서 V_{ni} , T_{ni} , H_{ni} , M_{ni} ($n=0, 1, 2, \dots, m$)는 임의의 조화차수 n 에 대한 요소의 절선력 및 절선모멘트이며, 각각 기준좌표계에 대한 절선변위 \bar{u}_n , \bar{v}_n , \bar{w}_n 및 회전각 $\bar{\beta}_n$ 에 대응한다.

따라서 각 절점원에 있어서의 기준좌표계에 대한 절선력 및 변위는 다음과 같이 표시할 수 있다.

$$\begin{aligned}
 \{f_{ni}\} &= [V_{ni} \ T_{ni} \ H_{ni} \ M_{ni}]^T \\
 \{\bar{d}_{ni}\} &= [\bar{u}_{ni} \ \bar{v}_{ni} \ \bar{w}_{ni} \ \bar{\beta}_{ni}]^T \quad (i=1, 2)
 \end{aligned} \tag{4}$$

또한 식 (1)과 (2)에 나타난 셀좌표계에 대한

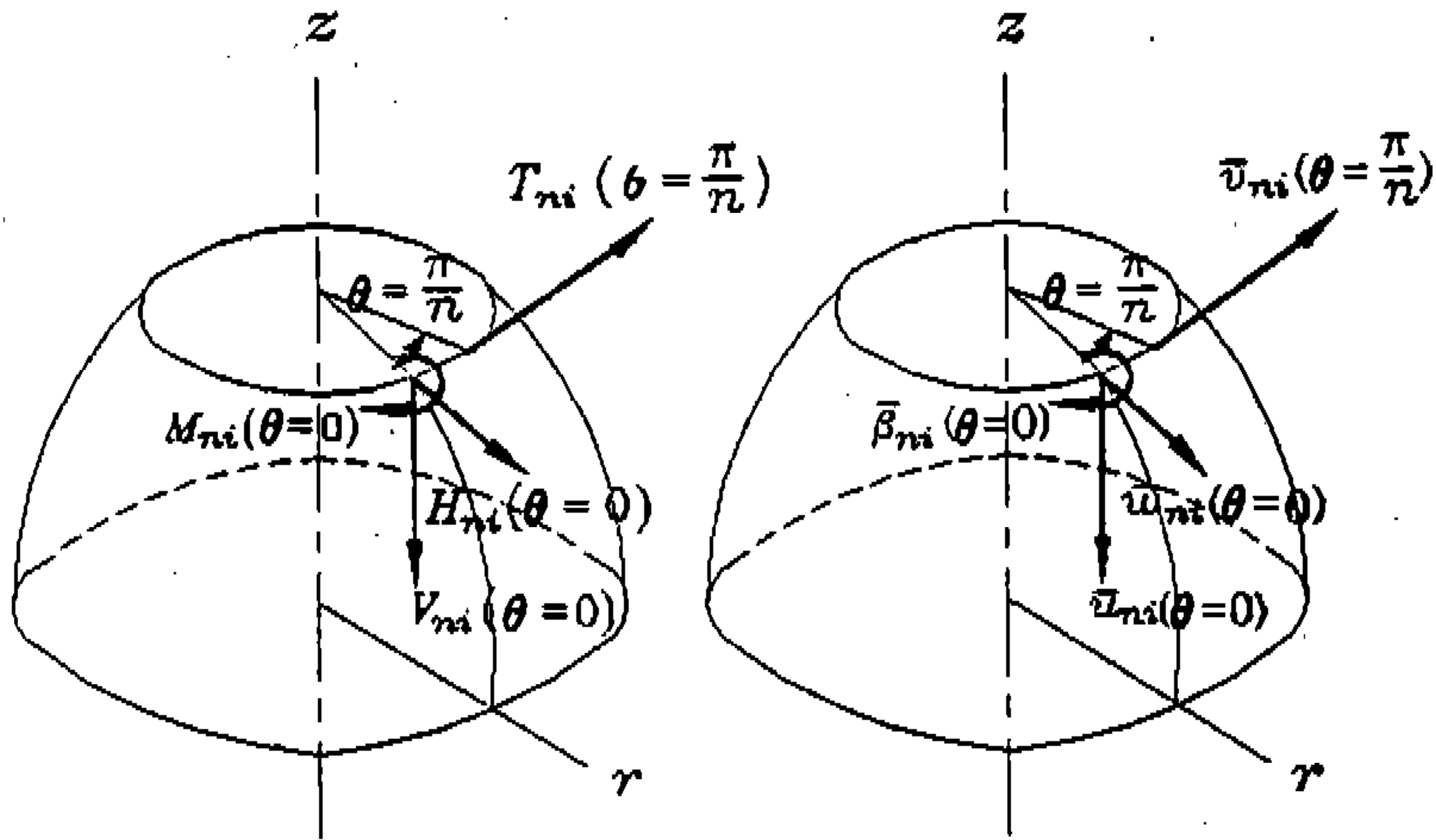


Fig.2 Forces and displacements in the global coordinate

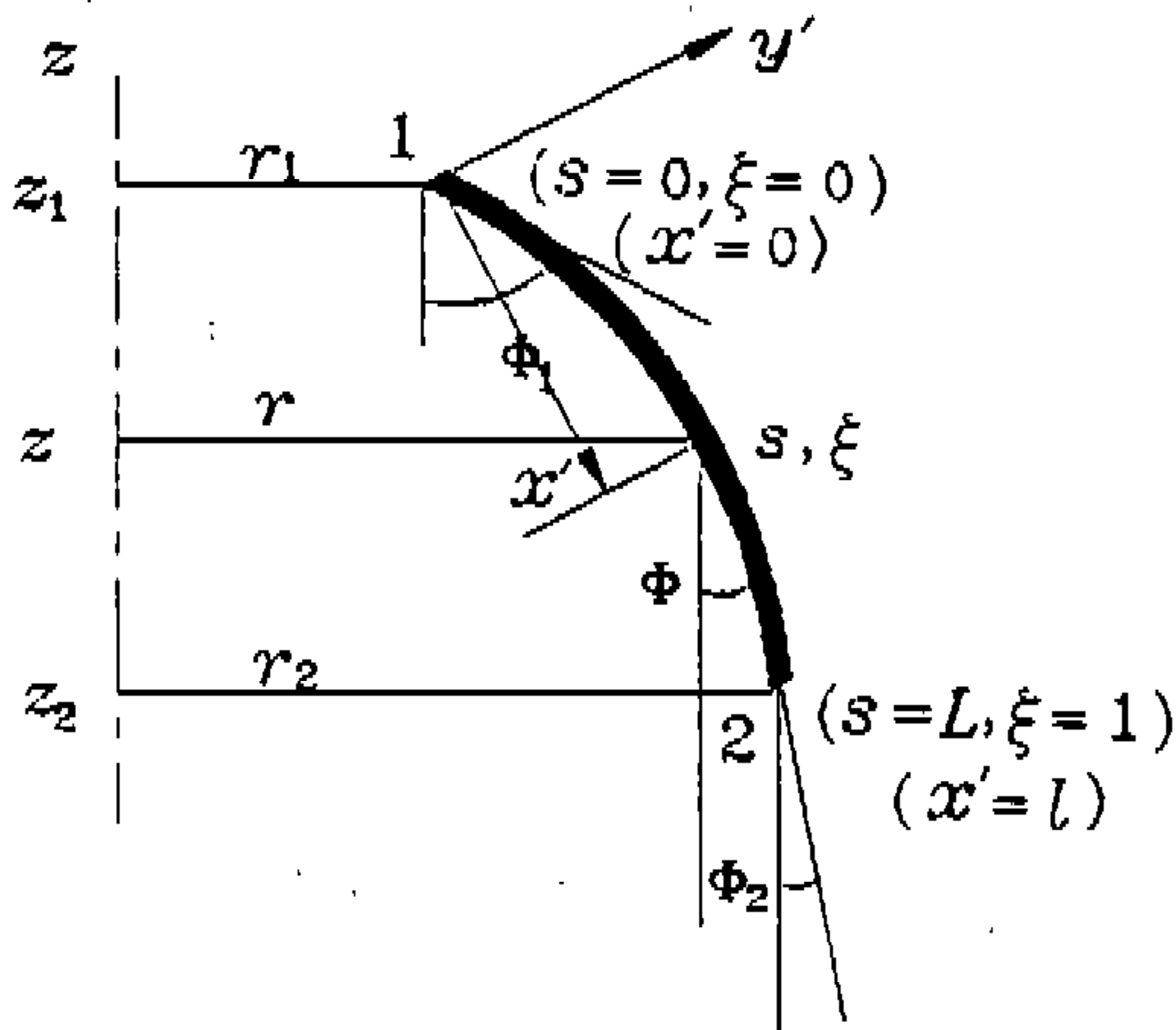


Fig.3 Cross section of the curved conical frustum element

절선변위 $\{d_{ni}\}$ 는 Fig.2에 표시한 기준좌표계로 표시하면 좌표변환행렬을 이용하여 다음과 같다.

$$\{d_{ni}\} = [u_{ni} \ v_{ni} \ w_{ni} \ \beta_{ni}]^T = [\lambda] \{\bar{d}_{ni}\} \quad (5)$$

여기서

$$\{\bar{d}_{ni}\} = [\bar{u}_{n1} \ \bar{v}_{n1} \ \bar{w}_{n1} \ \bar{\beta}_{n1} \ \bar{u}_{n2} \ \bar{v}_{n2} \ \bar{w}_{n2} \ \bar{\beta}_{n2}]^T$$

$[\lambda]$ 는 i 절점원에 있어서의 요소의 좌표변환행

렬 (coordinate transformation matrix)이며, 부록에 수록하였다.

2.3 형상함수

Fig.3과 같은 곡선 원추대요소의 단면에 대한 기하학적 형상을 표시하기 위한 요소의 경사각 $\phi(s)$ 는 일반적으로 다음과 같은 2차식으로 가정한다¹⁰⁾.

$$\phi(s) = \phi_1 + (6\phi_0 - 4\phi_1 - 2\phi_2)\xi + (-6\phi_0 + 3\phi_1 + 3\phi_2)\xi^2 = \phi_1 + \alpha_1\xi + \alpha_2\xi^2 \quad (6)$$

여기서 ϕ_1, ϕ_2 는 Fig.3에 나타난 바와 같이 각각 절점원 1, 2에 있어서의 요소의 경사각이며, ϕ_0 는 양 절점원을 잇는 직선의 경사각이다.

벨로우즈의 원형 평판과 원통 셀은 $\phi_0 = \phi_1 = \phi_2$ 의 경우가 되며, $\phi(s)$ 는 각각 $0^\circ, 90^\circ$ 가 된다. 또한 절점원 1에 있어서의 직교좌표계 (x, y) 로 요소의 형상 즉, y 를 x 의 3차식으로 다음과 같이 가정한다.

$$y(x) = (-\phi_0 + \phi_1)x + (3\phi_0 - 2\phi_1 - \phi_2)\frac{x^2}{l} + (-2\phi_0 + \phi_1 + \phi_2)\frac{x^3}{l^2} \quad (7)$$

중심축으로부터 요소의 입의의 위치까지의 반

경은 r 은 식 (7)로부터 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned}
 r(x) &= r_1 + x \sin \phi_0 + y \cos \phi_0 \\
 &= r_1 + x \sin \phi_0 + \{(-\phi_0 + \phi_1)x \\
 &\quad + (3\phi_0 - 2\phi_1 - \phi_2)\frac{x^2}{l} \\
 &\quad + (-2\phi_0 + \phi_1 + \phi_2)\frac{x^3}{l^2}\} \cos \phi_0 \quad (8)
 \end{aligned}$$

따라서 식 (2)의 회전각 β_n 은 식 (6)으로부터 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned}
 \beta_n &= \frac{1}{L} \left(\frac{dw_n}{ds} + u_n \frac{d\phi}{ds} \right) \\
 &= \frac{1}{L} \{c_6 + 2c_7\xi + 3c_8\xi^2 + (\alpha_1 + 2\alpha_2\xi)u_n\} \quad (9)
 \end{aligned}$$

식 (2)와 (9)를 식 (5)를 이용하여 요소 내의 절점원에서의 변위로 표시하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
 \{d_n\} &= [N] \{d_{ni}\} \\
 &= [N] [\lambda] \{\bar{d}_{ni}\} \quad (10)
 \end{aligned}$$

여기서 $\{d_n\} = [u_n \ v_n \ w_n \ \beta_n]^T$ 이며, $[N]$ 은 곡선 원추대요소의 형상함수(shape function)로서 부록에 수록하였다.

2.4 변형률 및 응력

축대칭 셀의 변형률-변위 관계식¹¹⁾¹²⁾은 부록에 수록하였으며, 식 (1)을 대입하면 θ 방향으로 변수 분리된다. 따라서 조화성분 n 에 대한 변형률벡터의 각 성분은 식 (10)으로부터 다음과 같이 유도된다.

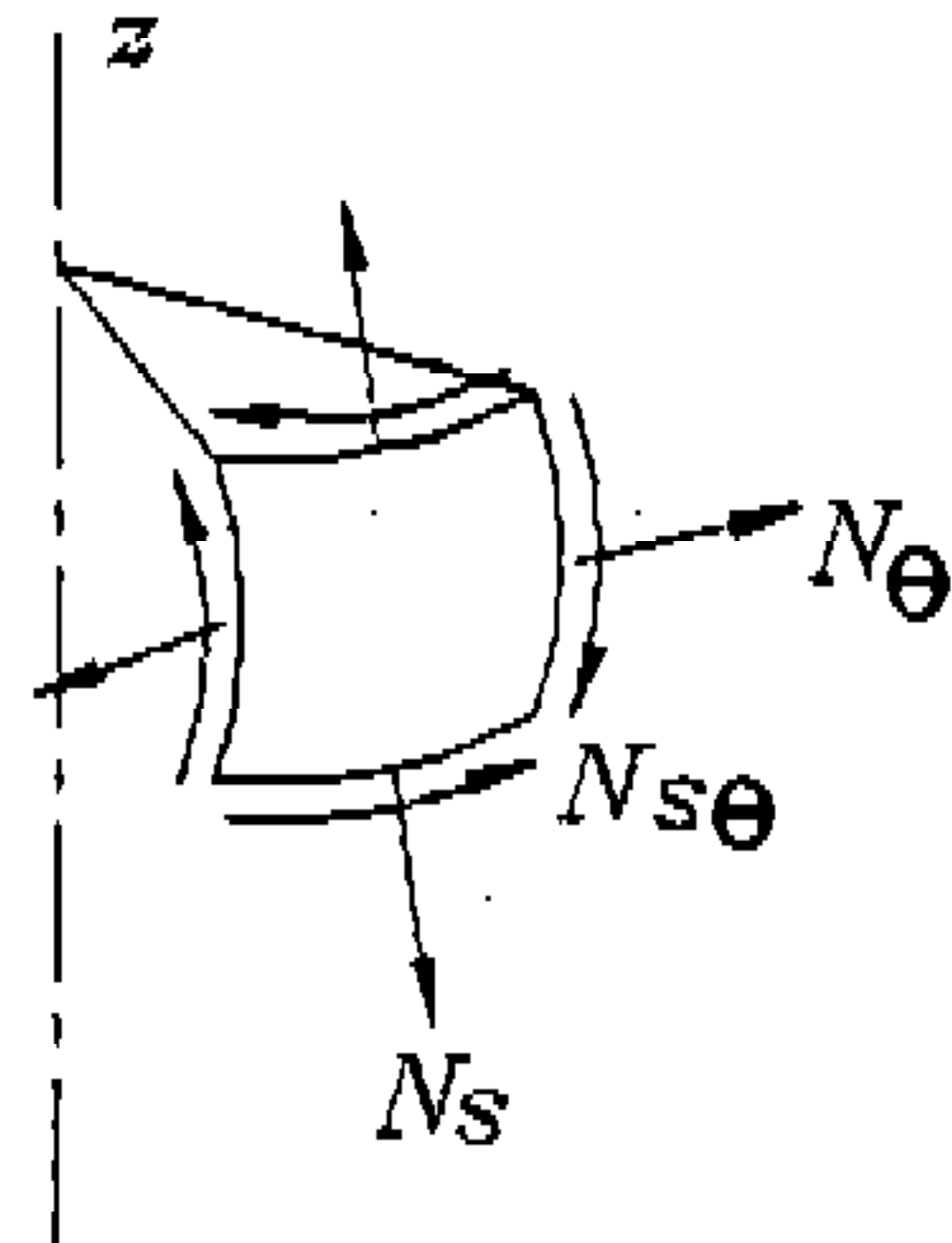
$$\begin{aligned}
 \{\epsilon_n\} &= [L] \{d_n\} \\
 &= [L] [N] [\lambda] \{\bar{d}_{ni}\} \quad (11)
 \end{aligned}$$

여기서 $\{\epsilon_n\} = [\epsilon_{sn} \ \epsilon_{\theta n} \ \gamma_{s\theta n} \ \chi_{sn} \ \chi_{\theta n} \ \chi_{s\theta n}]^T$ 이며, $\epsilon_s, \epsilon_\theta$ 는 자오선, 원주방향의 변형률, $\gamma_{s\theta}$ 는 전단변형률, χ_s, χ_θ 는 자오선, 원주방향의 곡

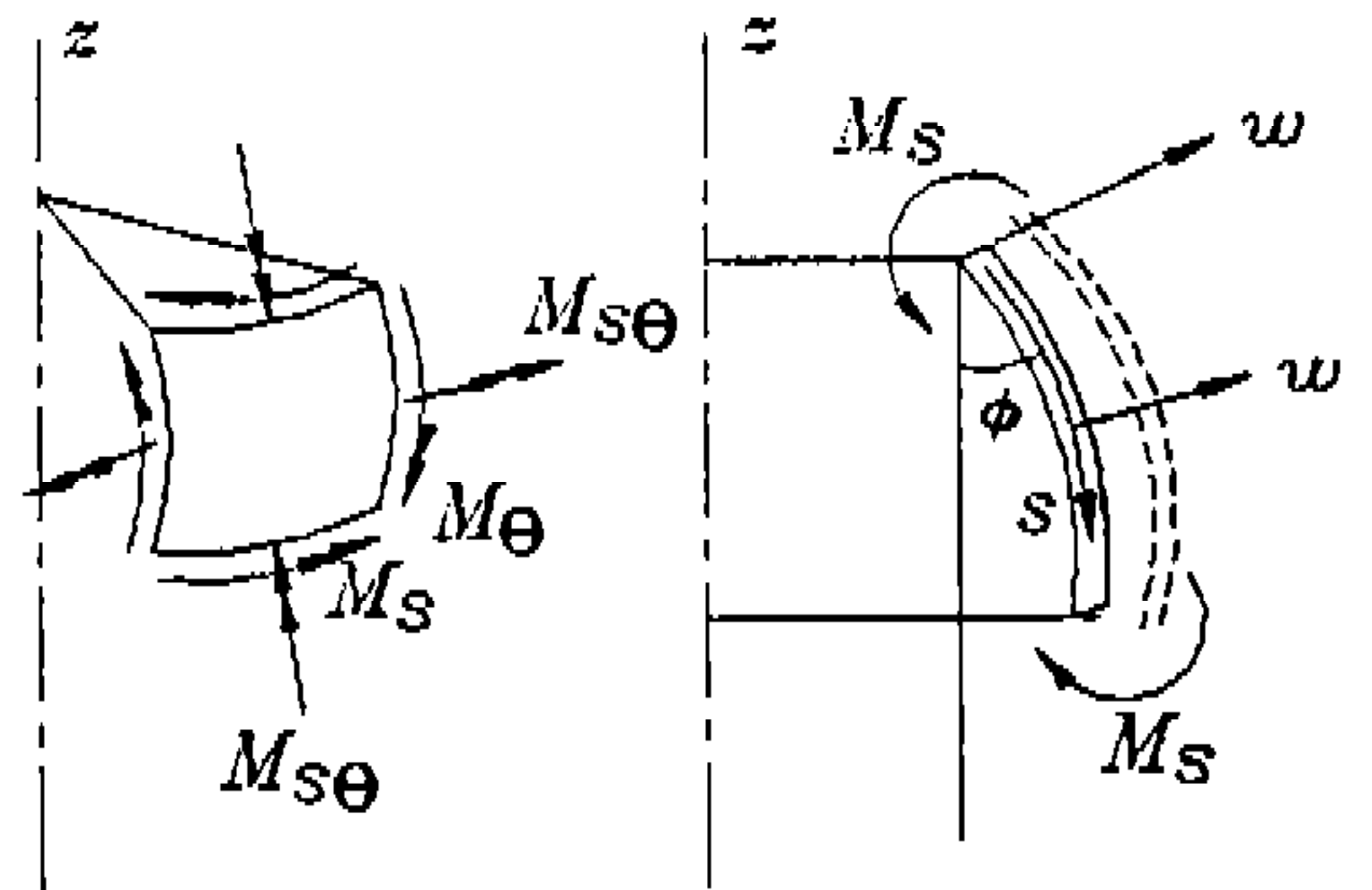
률, $\chi_{s\theta}$ 는 비틀림률이다.

곡선 원추대요소에서 발생하는 응력성분은 Fig.4에 표시되어 있으며, 비축대칭 변형을 고려하면 다음과 같이 θ 방향으로 변수분리하여 표시할 수 있다.

$$\begin{aligned}
 \{\sigma\} &= [N_s \ N_\theta \ N_{s\theta} \ M_s \ M_\theta \ M_{s\theta}]^T \\
 &= \left[\begin{array}{cc} \sum_{n=0}^m N_{sn} \cos n\theta & \sum_{n=0}^m N_{\theta n} \cos n\theta \\ \sum_{n=0}^m N_{s\theta n} \cos n\theta & \sum_{n=0}^m M_{sn} \cos n\theta \\ \sum_{n=0}^m M_{\theta n} \cos n\theta & \sum_{n=0}^m N_{s\theta n} \cos n\theta \end{array} \right]^T \quad (12)
 \end{aligned}$$



(a) Stress resultants



(b) Moment resultants

Fig.4 Stress and moment resultants

여기서 $N_s, N_\theta, N_{s\theta}$ 는 각각 자오선, 원주방향의 합응력 및 전단 합응력, $M_s, M_\theta, M_{s\theta}$ 는 각각 합모우멘트 및 비틀림 합모멘트이며, 아래 첨자 n 은 조화성분 n 의 대응을 의미한다.

합응력 및 합모멘트는 식 (11)로부터 다음과 같이 변형률성분으로 표시된다.

$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} N_{sn} \\ N_{\theta n} \\ N_{s\theta n} \\ M_{sn} \\ M_{\theta n} \\ M_{s\theta n} \end{Bmatrix} = [D] \{\varepsilon_n\} \\ = [D] [L] [N] [\lambda] \{\bar{d}_n\} \quad (13)$$

2.5 강성행렬 및 등가 절점하중

표면력과 외력이 작용하는 계의 가상 일의 원리는 가상 변위벡터 $\{\delta d\}$ 에 대하여 다음 식으로 표시된다.

$$\int_S \{\delta d_n\}^T [\lambda]^T [N]^T \{P_n\} dA + \{\delta d_n\}^T \{f_n\} \\ = \int_V \{\delta \varepsilon_n\}^T \{\sigma_n\} dV \quad (14)$$

곡선 원추대요소의 두께가 일정하다고 가정하고, 각 요소에 대하여 식 (14)의 우변을 변환하면 다음과 같이 유도된다.

$$\sum_e 2\pi L \int_0^1 r \{\delta d_{ni}\}^{eT} [\lambda]^T [N]^T \{P_n\} d\xi \\ + \{\delta d_{ni}\}^{eT} \{f_{ni}\} = \sum_e 2\pi L \int_0^1 r \{\delta \varepsilon_n\}^{eT} [\sigma_n] d\xi \quad (15)$$

식 (15)에 식 (4)~(13)의 관계를 대입하면 전체 계에 대하여 다음 식으로 유도된다.

$$\sum_e 2\pi L \int_0^1 r \{\delta d_{ni}\}^{eT} [\lambda]^T [N]^T \{P_n\} d\xi \\ + \{\delta d\}^{eT} \{f_{ni}\} = \sum_e 2\pi L \int_0^1 r \{\delta d_{ni}\}^{eT} [\lambda]^T \\ ([L] [N])^T [D] ([L] [N]) [\lambda] d\xi \{\bar{d}_{ni}\}^e \quad (16)$$

여기서 $\{\delta d_{ni}\}^e = \sum_e \{\delta d_{ni}\}^e$ 이므로 식 (16)은 다음과 같이 표시할 수 있다.

$$\{F_{nT}\} = \{K_n\} \{\bar{d}_n\} \quad (17)$$

여기서,

$$\{F_{nT}\} = \{f_{ni}\} + \sum_e \{F_{ne}^e\} \\ \{F_{ne}^e\} = 2\pi L \int_0^1 r [\lambda]^T [N]^T \{P_n\} d\xi \\ [K_{ni}]^e = 2\pi L \int_0^1 r [\lambda]^T ([L] [N])^T \\ [D] ([L] [N]) [\lambda] d\xi \\ = 2\pi L \int_0^1 r [\lambda]^T [B_{ni}]^T [D] [B_{ni}] [\lambda] d\xi$$

$$\{\bar{d}_n\} = \sum_e \{\bar{d}_{ni}\}^e$$

$\{F_{ne}^e\}$ 는 표면력에 의한 등가 절점하중 (equivalent nodal force), $[K_{ni}]^e$ 는 요소강성행렬이다.

2.6 해석형상 및 경계조건

Fig.5는 본 연구에서 해석한 U형 벨로우즈의 요소분할을 표시한 것이며, Fig.6은 경계조건을 표시한 것이다.

일반적으로 배기시스템에 장착되는 벨로우즈의 강성은 시스템의 강성에 비해 매우 낮은 값을 가지므로 Fig.6과 같이 벨로우즈의 일단은 고정시켰으며, 다른 일단에 하중이 작용하는 경계조건으로 고려하였다. 하중은 Sutcliffe¹³⁾와 Kraus¹⁴⁾의 연구로부터 조화차수가 $n=1$ 의 경우로 하였다.

3. 최적설계이론

3.1 다목적 최적화기법

여러 개의 목적함수로 구성된 다목적 최적화기법의 수학적 정식화는 다음과 같이 표현할 수 있다.

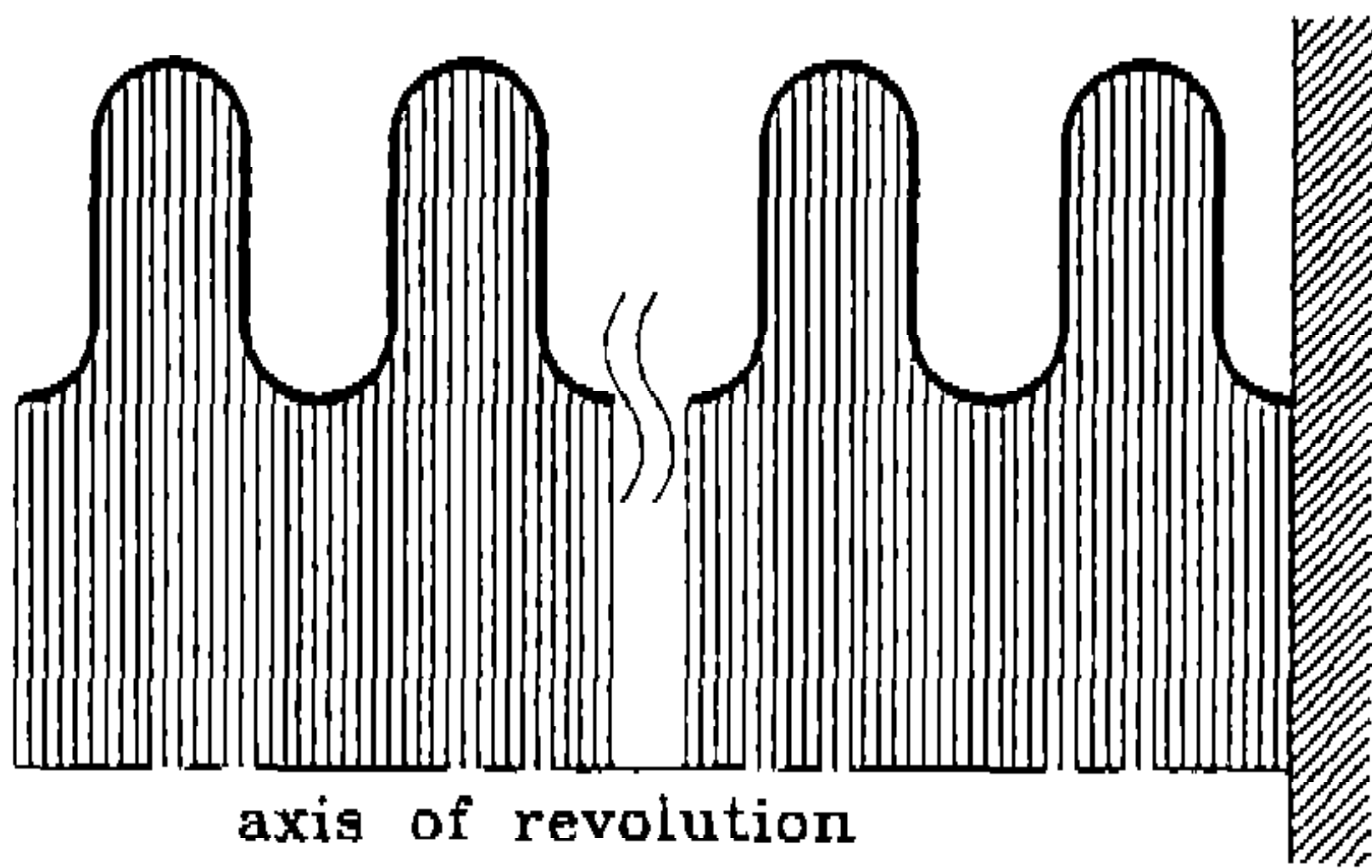


Fig.5 . Finite element mesh

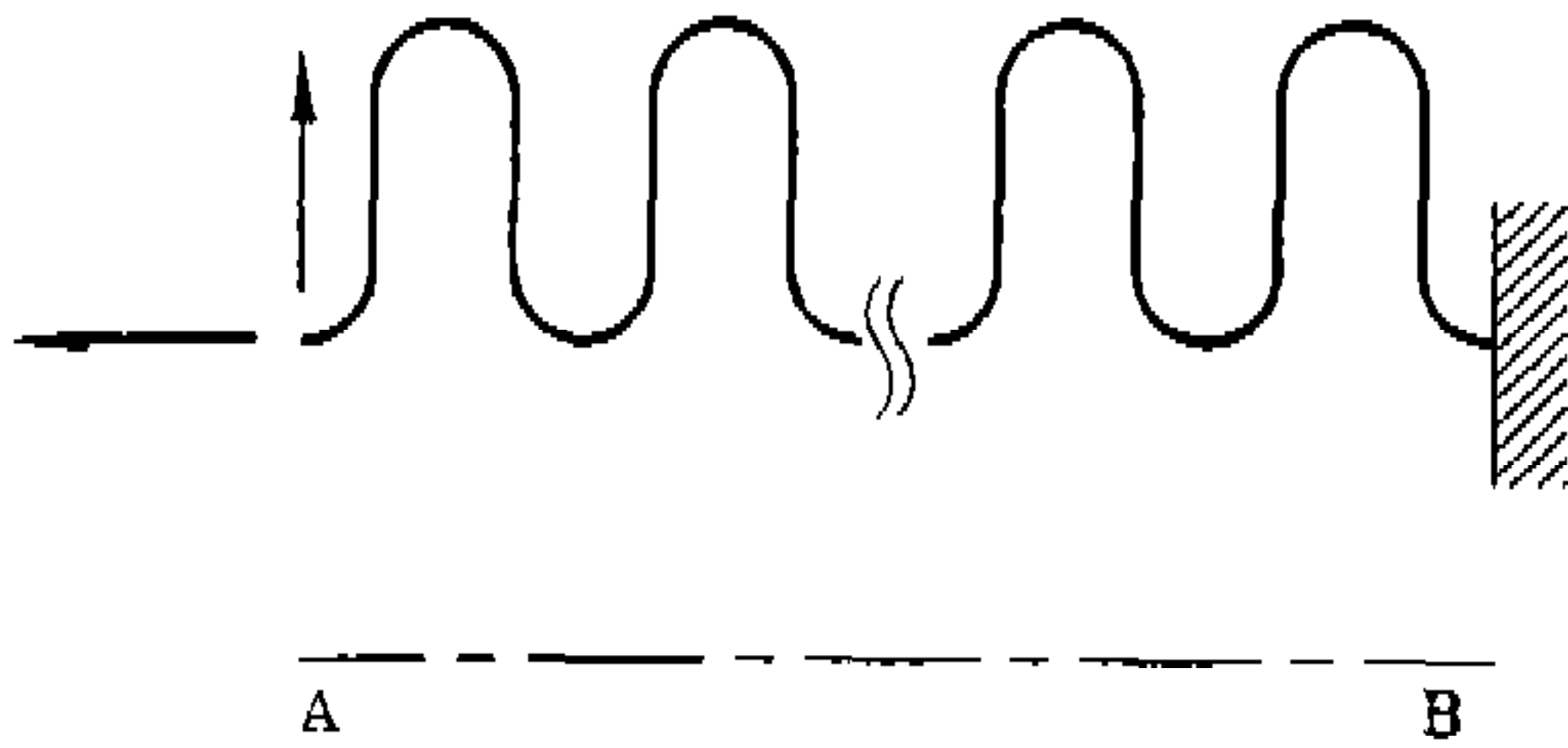


Fig.6 Boundary condition

$$\text{Min. } \bar{f}(\bar{x}) = [f_1(\bar{x}) \ f_2(\bar{x}) \ \dots \ f_k(\bar{x})]^T \quad (18)$$

s.t.

$$g_j(\bar{x}) \leq 0 \quad j=1,2,\dots,m \quad (19)$$

$$h_j(\bar{x}) = 0 \quad j=1,2,\dots,p < n \quad (20)$$

여기서, $\bar{x} = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n]^T$
 즉, 식 (19)의 m 개의 부등제조건함수와 식 (20)의 p 개의 등제조건함수를 만족하며, 식 (18)의 다목적함수를 최소화하는 설계변수 $\bar{x} = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n]^T$ 의 최적값 $\bar{x}^* = [x_1^* \ x_2^* \ \dots \ x_n^*]^T$ 를 구하는 문제가 된다. 여기서 식 (18)로 표현된 다목적 함수에 포함된 각각의 함수들의 수치적 크기를 균등하게 하기 위하여 본 연구에서는 가중목적법¹⁵⁾을 적용하였다. 이 방법의 기본 개념은 모든 목적함수를 각 목적함수에 대한 각기 다른 가중치와 곱해진 형태의 합으로 표현하는 것이다.

즉, 가중목적법을 적용한 다목적 최적화기법은 다음 식과 같이 표현된다.

$$f(\bar{x}) = \sum_{i=0}^k w_i f_i(\bar{x}) \quad (21)$$

여기서 $w_i \geq 0$ 이고, 각 목적함수들의 상대적인 중요성을 나타내며, 다음의 조건을 만족하도록 결정된다.

$$\sum_{i=0}^k w_i = 1 \quad (22)$$

식 (21)를 적용한 최적화경향은 가중치에 따라 많은 차이를 나타내지만 가중치의 선택에 대한 방법은 거의 알려져 있지 않으므로 동일한 문제에 대해 가중치를 변화시켜 가면서 최적해를 구하고 있는 실정¹⁶⁾이다. 따라서 모든 함수값들이 첫번째 반복과정에서 동일해 수치를 가지고 반복할 수 있도록 다음과 같이 가중치를 선정하였다.

$$f(\bar{x}) = \sum_{i=0}^k w_i f_i(\bar{x}) c_i \quad (23)$$

여기서 $c_i = 1/f_i^0$ 이며, f_i^0 는 각 목적함수들만을 최적화했을 때의 최적값을 나타낸다.

3.2 수학적 정식화

일반적으로 배관시스템에서 벨로우즈는 이 시스템의 변형을 최대한 흡수할 목적으로 장착되므로 벨로우즈에 대한 기존의 설계에서는 벨로우즈의 유연성 향상에 관점을 두고 최적화기법이 수행되어 왔다. Hamada¹⁷⁾는 벨로우즈의 단위 길이당 변형을 목적함수로 선정하여 최대화하였으며, Bhavikatti¹⁸⁾와 Chakraverti¹⁹⁾는 배관시스템으로 전달되는 반력을 목적함수로 선정하여 최소화하였다. 또한 Lee¹⁶⁾는 벨로우즈의 강성과 중량을 동시에 다목적함수로 고려하여 이를 최소화하였다.

그러나 최근 자동차 배기시스템에서는 엔

진의 운동으로 인한 진동을 흡수하기 위하여 벨로우즈가 장착되고 있으며, 이러한 벨로우즈는 배관시스템용 벨로우즈와 같이 유연성만을 고려하여 설계될 수 없다. 왜냐하면 벨로우즈의 강성의 변화는 배기시스템의 고유진동수를 변화시키며, 이로 인해 배기시스템의 고유진동수가 엔진의 주파수와 일치하여 공진현상이 발생할 수 있기 때문이다. 따라서 배기시스템에 장착되는 벨로우즈는 진동 흡수를 위한 유연성 및 배기시스템에서 요구하는 강성이 동시에 만족되는 설계가 요구되고 있다.

따라서 형상최적설계의 기법을 이용하여 먼저 벨로우즈의 유연성에 영향을 미치는 기하학적 인자들에 관하여 고찰하고, 이와 같은 고찰을 통하여 최종적으로 배기시스템에서 요구하는 특정한 강성을 만족하도록 하는 벨로우즈의 형상을 결정한다. 이를 위해 벨로우즈의 유연성에 영향을 미치는 기하학적 인자들을 고찰하기 위한 형상최적설계의 수학적 정식화는 다음과 같이 표시된다.

$$\text{Min. } w_1 \frac{K_l}{f_1^0} + w_2 \frac{K_a}{f_2^0} \quad (24)$$

s.t.

$$g_r = \frac{(\sigma_e)_i}{A \log_{10} N_{sys} + B} - 1.0 \quad r=1,2,\dots,260 \quad (25)$$

$$g_{261} = 1.5 \text{Freq}_{sys} / \text{Freq}_{axi} - 1.0 \quad (26)$$

$$g_{261} = 1.5 \text{Freq}_{sys} / \text{Freq}_{lat} - 1.0 \quad (27)$$

$$g_{263} = F_{axi} / F_{cr} - 1.0 \quad (28)$$

$$g_s = 0.5 \leq \frac{q}{h} \leq 1.5 \quad s=264, 265, \dots, 271 \quad (29)$$

$$g_t = \frac{h}{2R} \leq 0.25 \quad t=271, 272, \dots, 274 \quad (30)$$

식 (24)는 벨로우즈의 유연성에 영향을 미치는 기하학적 인자를 고찰하기 위하여 축방향 및 횡방향 강성을 다목적함수로 표현한 것이다. 여기서 K_l, K_a 는 곡선 원추대요소를 이용한 유한요소해석에 의하여 계산되는 벨로우즈의 횡방향 및 축방향 강성이다. 또한, w_1, w_2 는 가중치이며, f_1^0, f_2^0 는 각각의 목적함수만으로 최적화를 수행했을 때 산출되는 목적함수의 최적값이다.

식 (25)는 피로한도에 대한 제한조건함수를 나타내며, 사용된 응력은 등가응력(equivalent stress)이다. 여기서 N_{sys} 는 시스템에서 요구하는 벨로우즈의 피로수명으로서 30만회로 입력된다. A 와 B 는 실험값으로서 각각 -33.33과 220으로 입력²⁰⁾되며, 피로한도에 대한 제한조건함수는 벨로우즈의 전체 파형에서 평가된다.

벨로우즈의 고유진동수는 벨로우즈가 장착되는 시스템의 고유진동보다 1.5배이상 커야 한다고 보고²⁰⁾되고 있다. 따라서 식 (26), (27)은 각각 벨로우즈의 축방향 및 횡방향의 고유진동수²¹⁾에 대한 제한조건함수를 나타낸다. 여기서 Freq_{sys} 는 시스템의 고유진동수로서 본 연구에서는 자동차 배기시스템을 고려하였으므로 엔진 공회전(engine idling)시의 주파수인 25Hz보다 5Hz가 작은 값을 입력하였다.

벨로우즈의 전체 길이가 증가하면 좌굴이 발생할 가능성이 있으므로 이를 방지하기 위하여 식 (28)과 같이 좌굴에 대한 제한조건함수²²⁾를 고려하였으며, 실제 현장에서의 제작 환경을 제한조건함수에 포함시켰다. 식 (29), (30)은 제작 환경에 대한 제한조건함수로서 식 (29)는 파형 피치(pitch)와 높이와의 관계를, 식 (30)은 벨로우즈 반경과 파형 높이와의 관계를 표시한다.

벨로우즈의 최적설계에 대한 기존의 연구^{16~19)}는 벨로우즈의 하나의 파형에 대해서만 최적설계를 수행하고 여기서 산출된 최적화 경향을 모든 파형에 동일하게 적용시켰다. 그러나 벨로우즈는 양끝단 부근의 파형 끝부분에서 파손된다는 실제의 파손사례를 고려

한다면 이와 같은 기존의 연구는 벨로우즈의 설계에 불충분한 결과를 제시하고 있는 실정이다. 따라서 본 연구에서는 Fig.7에 표시한 바와 같이 두께, 파형 반경 및 원형판의 길이를 벨로우즈의 전체 파형에 대하여 설계변수로 선정하였다.

4. 결과 및 고찰

4.1 해석이론의 정확도

벨로우즈를 해석하기 위하여 사용한 곡선 원추대요소의 유한요소법의 정확도를 검토하기 위하여 벨로우즈의 변형량 측정 실험을 수행하였다. Photo.1은 각각 축방향 및 횡방향의 강성 측정장치를 나타낸다.

Photo.2는 실험에 사용된 벨로우즈 모델을 나타내며, 스테인레스 강(stainless steel;

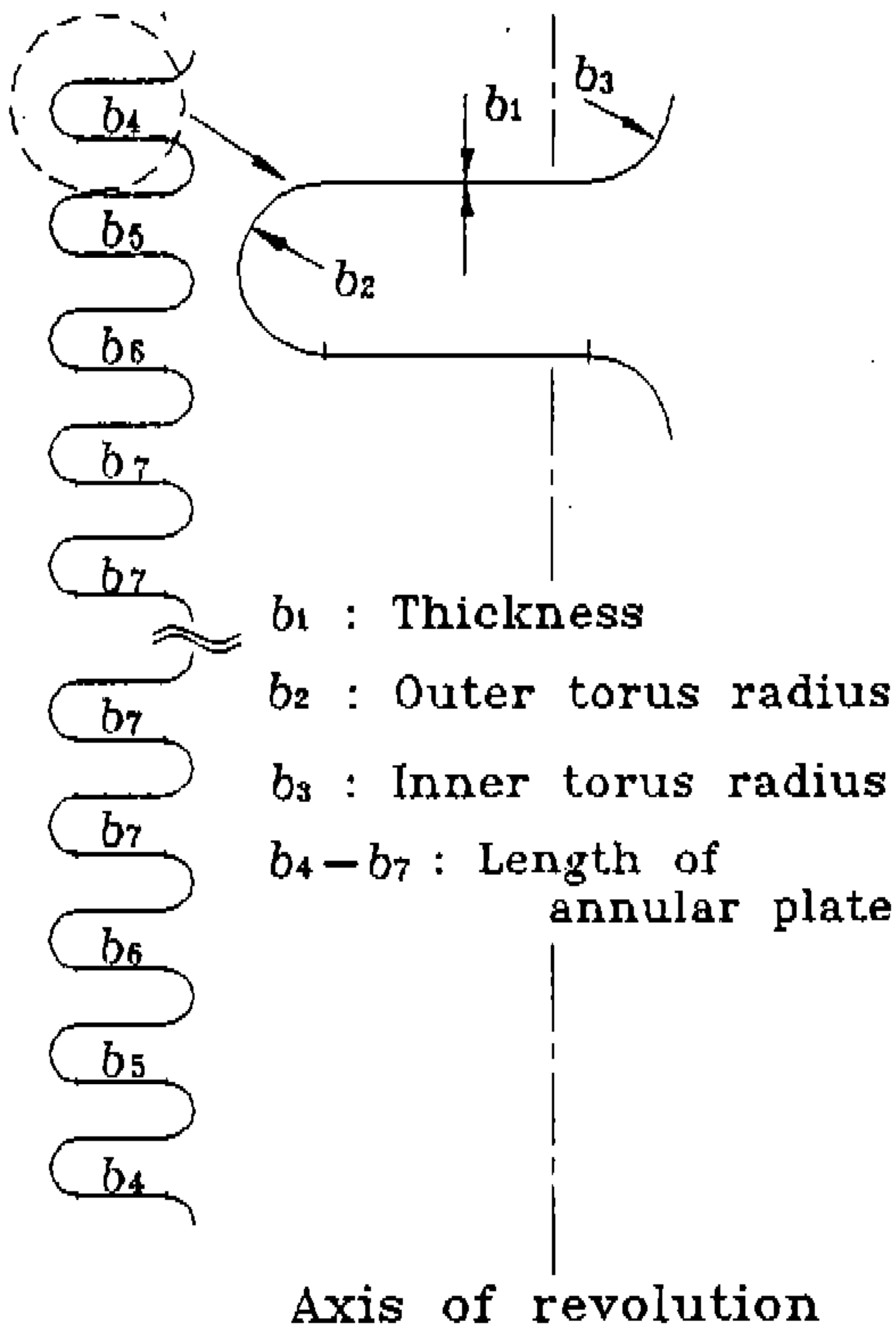
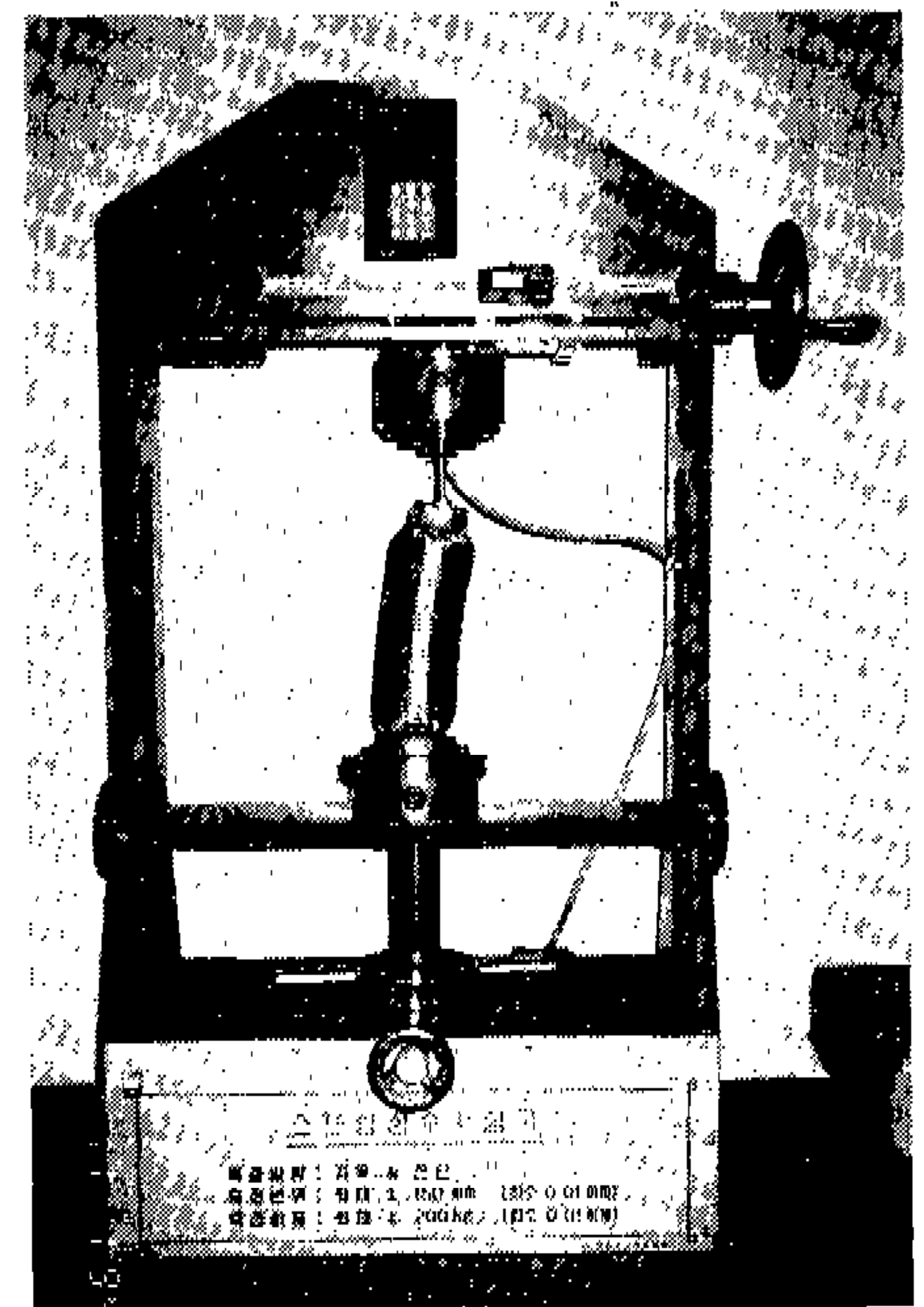
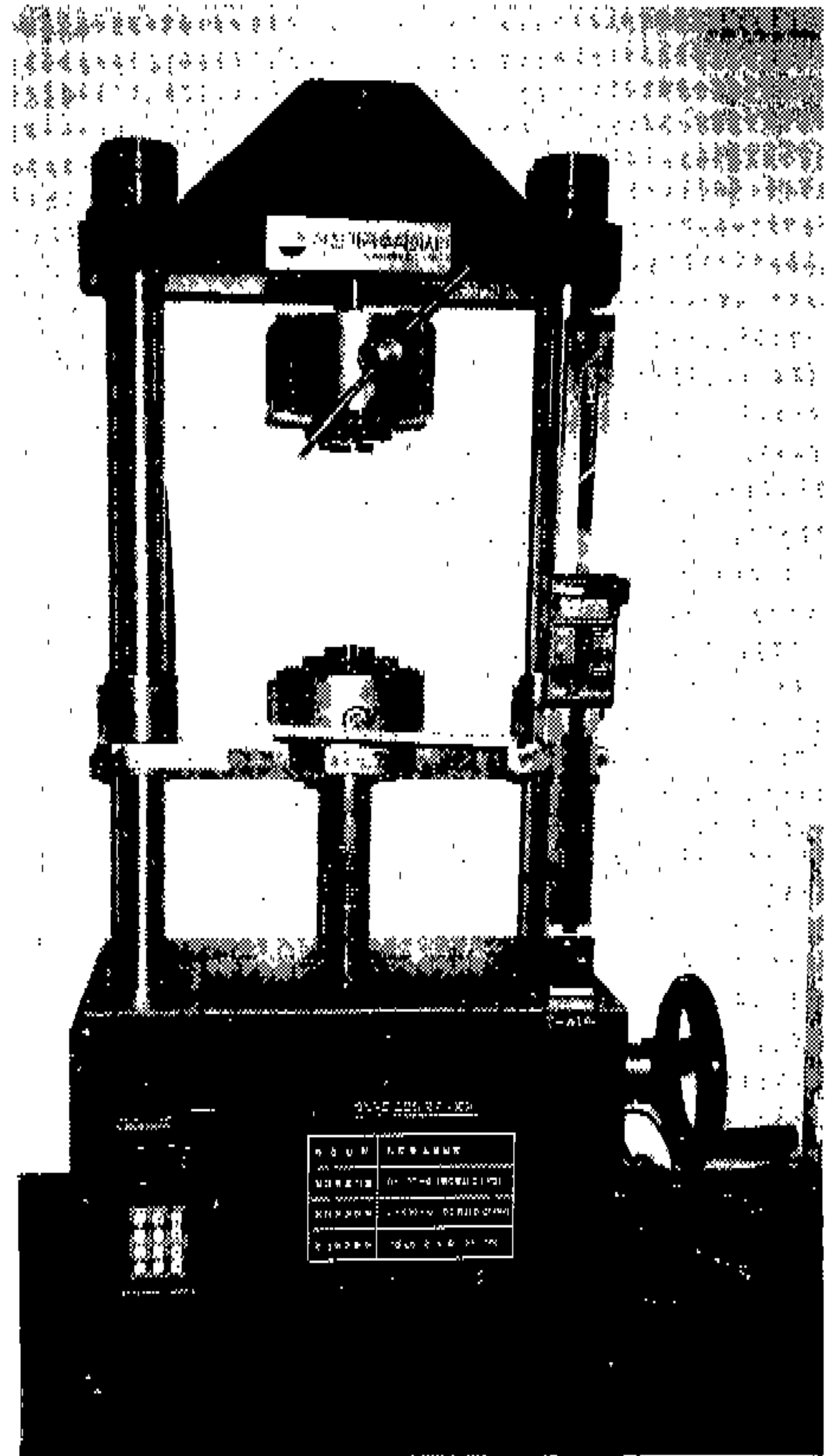


Fig.7 Design variables

Photo 1 Stiffness sester

SUS304)으로 제작하였다.

이 모델에 대한 제원이 Table 1에 표시되어 있으며, 각 모델당 10개씩의 벨로우즈 시편을 선정하여 강성을 측정하고 그 평균값을 Table 1에 포함하여 표시하였다.

Figs.8, 9는 본 연구의 해석이론과 실험을 비교한 것이다. 또한 벨로우즈 유한요소(Bellows element)²³⁾와 사변형 셸 유한요소(이하 'Shell element'라 칭함)²⁴⁾를 이용한 해석결과가 Figs.8, 9에 포함되어 표시되어 있다.

Figs.8, 9에 표시된 바와 같이 본 연구의 해석결과는 실험 및 기타의 유한요소 해석결과와 잘 일치하고 있으므로 정확도가 입증되었다. 참고적으로 벨로우즈 유한요소를 이용한 해석은 축방향만을 취급하므로 Fig.9에서는 이에 대한 비교가 생략되어 있다.

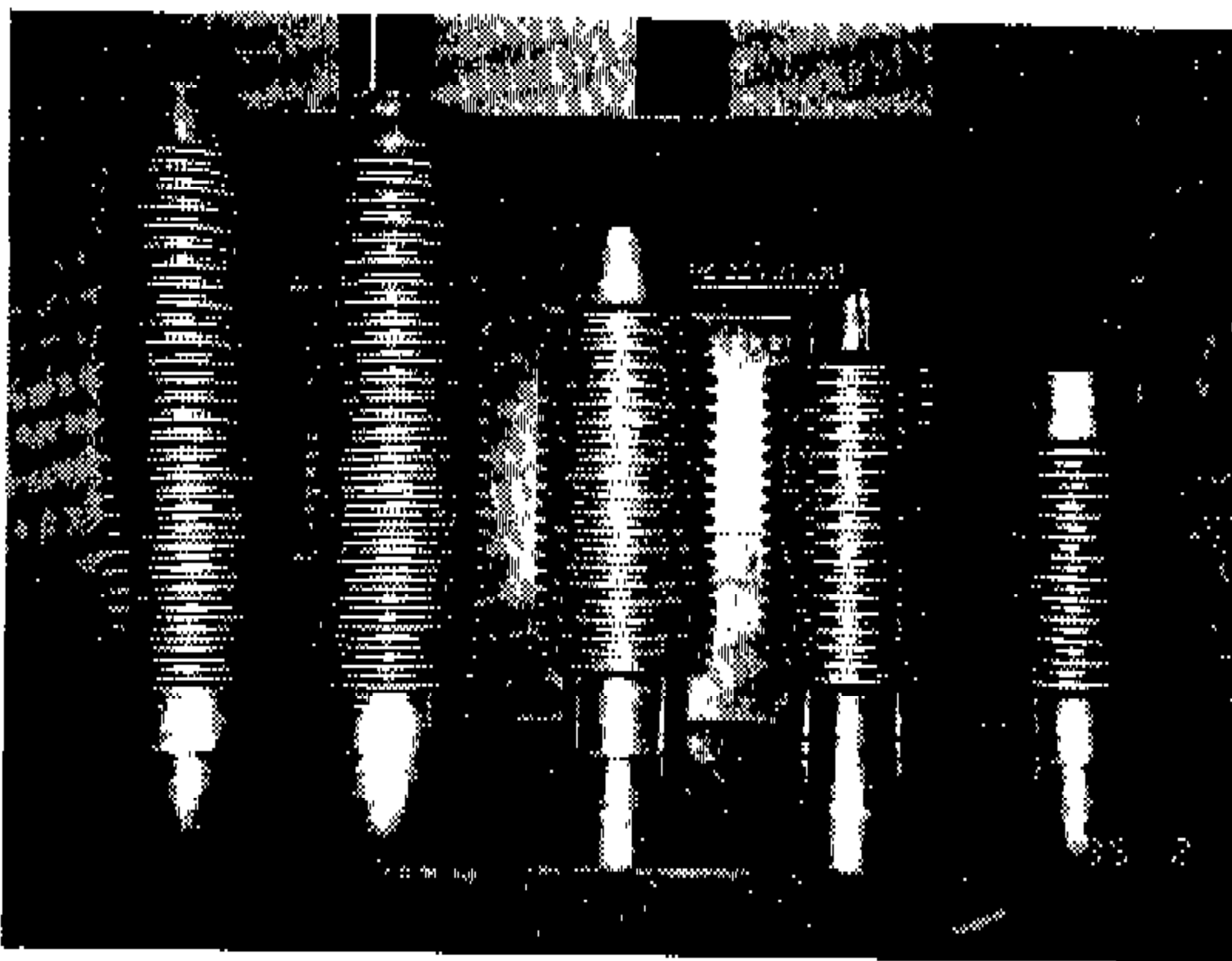
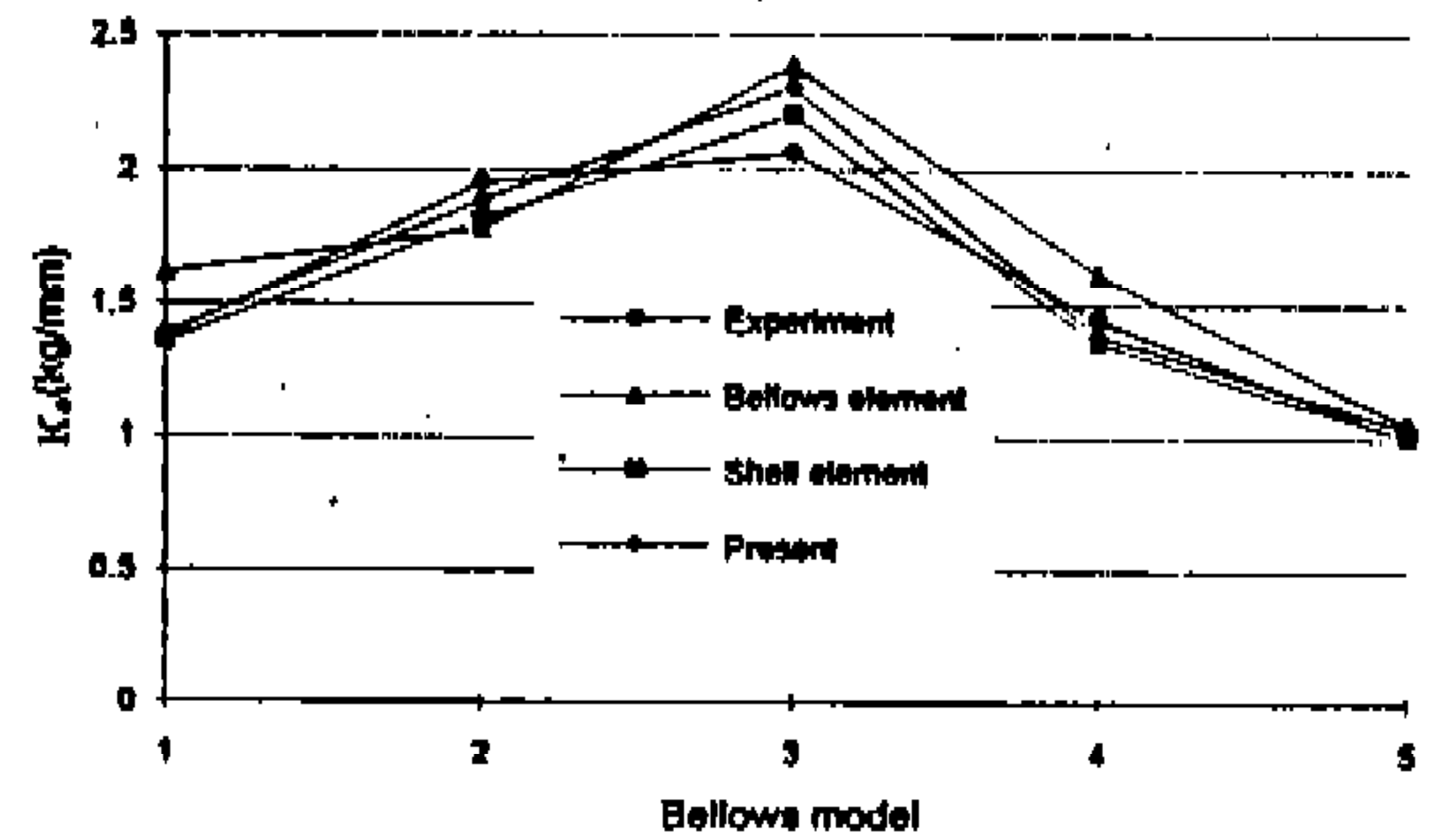


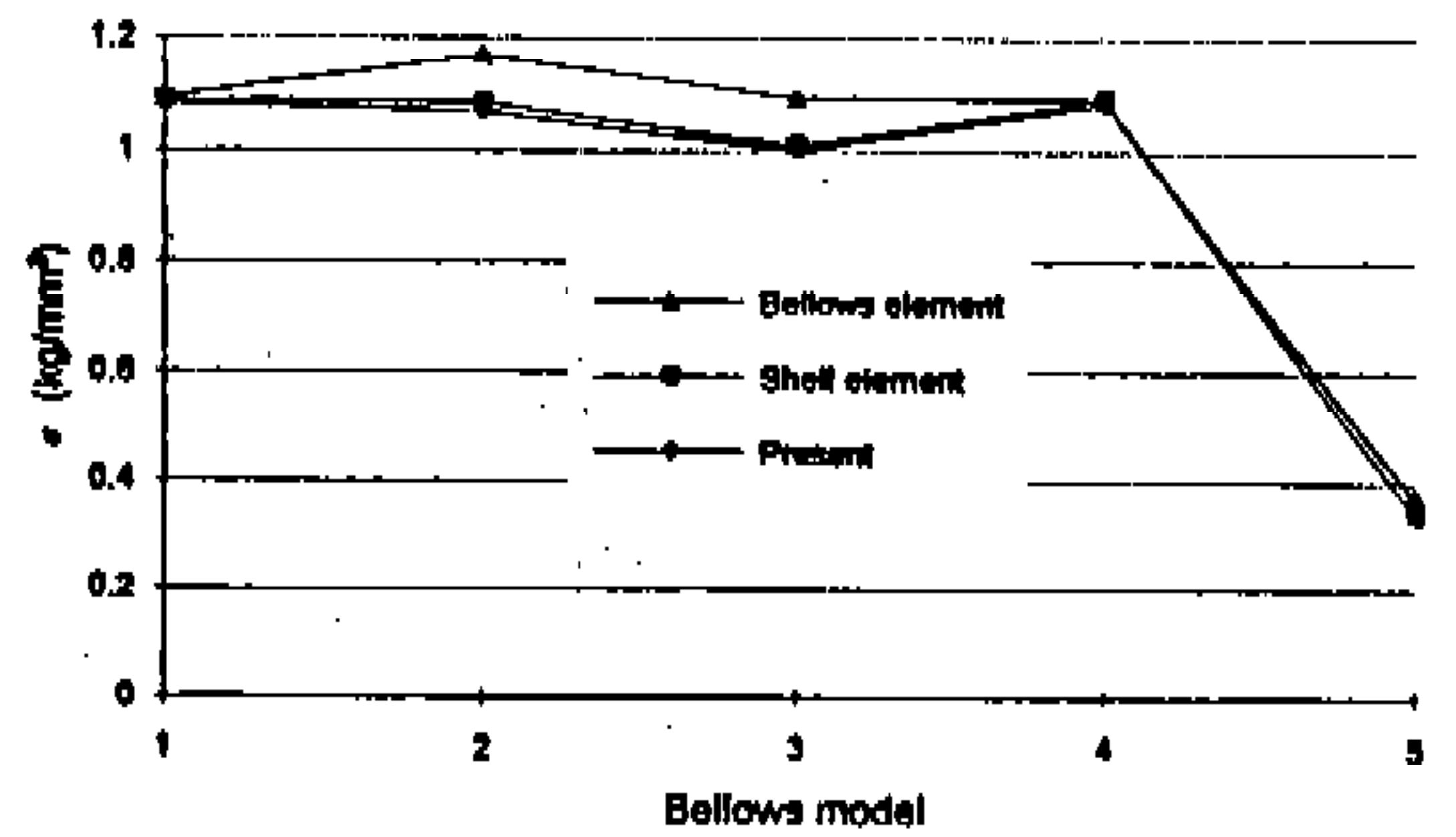
Photo 2 Bellows model tested

4.2 형상최적설계의 경향

본 연구에서는 벨로우즈의 고유의 기계적 기능인 유연성을 목적함수로 선정하여 최적설계를 수행한 후 이를 통하여 시스템에서 요구하는 특정한 강성을 만족하는 벨로우즈의 형상을 결정하고자 한다. 이를 위한 설계



(a) Stiffness



(b) Stress

Fig.8 Comparison of the axial behavior

Table 1 Dimensions of the bellows model tested

Model	D_o	D_i	L_t	R_o	R_i	L_a	t	N_c	K_a'	K_l'
1	75.5	49.5	266.0	2.0	2.0	9.0	0.38	28.0	1.375	0.030
2	75.6	49.6	210.0	2.0	2.0	9.0	0.38	21.0	1.950	0.069
3	80.0	54.5	200.0	1.875	1.875	9.0	0.38	19.0	2.064	0.108
4	75.5	49.5	280.0	2.0	2.0	9.0	0.38	28.0	1.450	0.026
5	75.5	49.5	160.0	2.1	2.0	6.0	0.63	12.0	24.606	1.475

(unit : mm)

(note) D_o : Outer diameter, D_i : Inner diameter, L_t : Total length, r_o : outer radius of corrugation, r_i : inner radius of corrugation, L_a : Length of annular plate, t : Thickness, N_c : No. of corrugation, K_a' : Axial stiffness, K_l' : Lateral stiffness

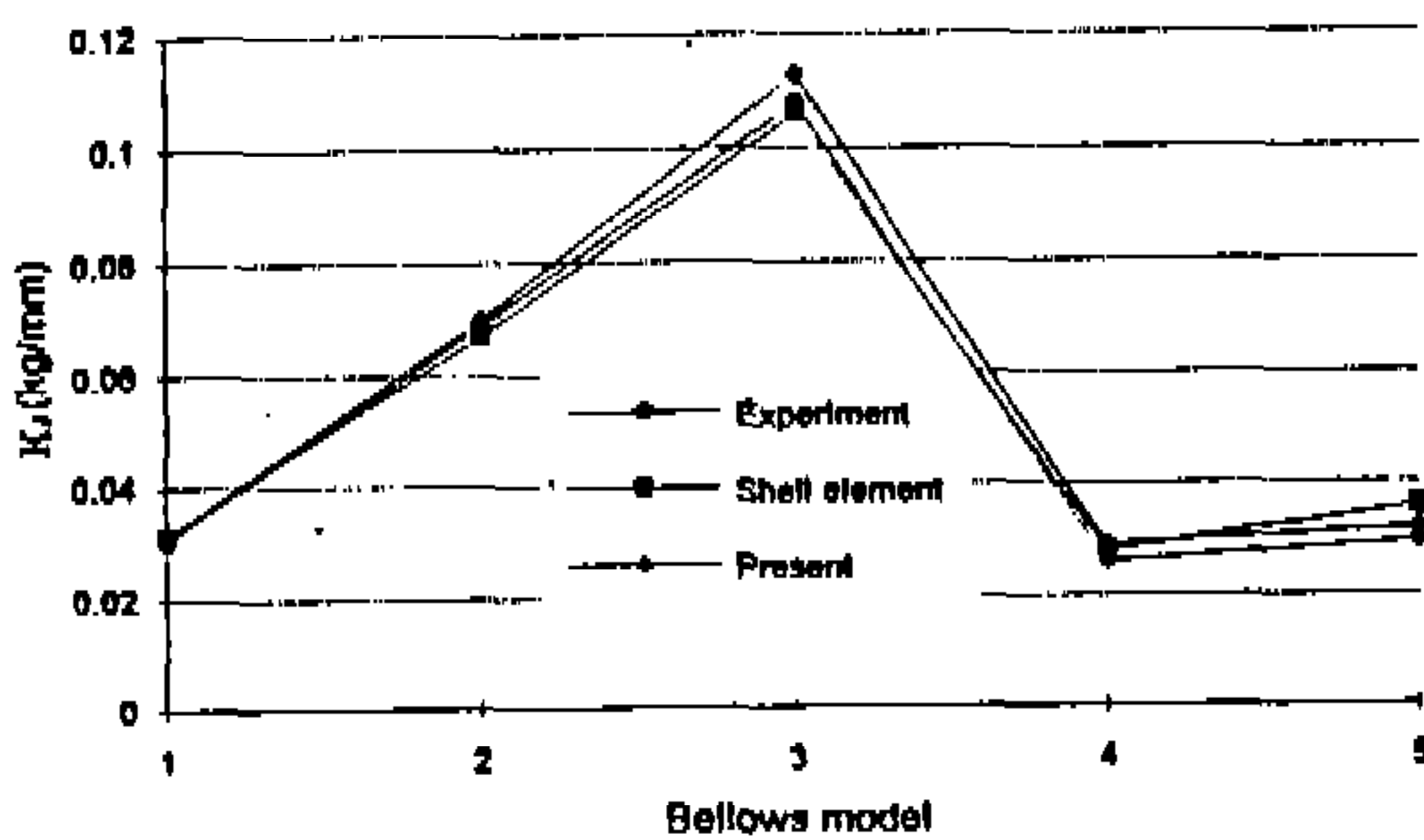
변수의 상한값, 하한값 및 초기값이 Table 2에 제시되어 있으며, 초기값은 현재의 설계값으로 선정하였다.

먼저 (24)식에 나타난 바와 같이 벨로우즈

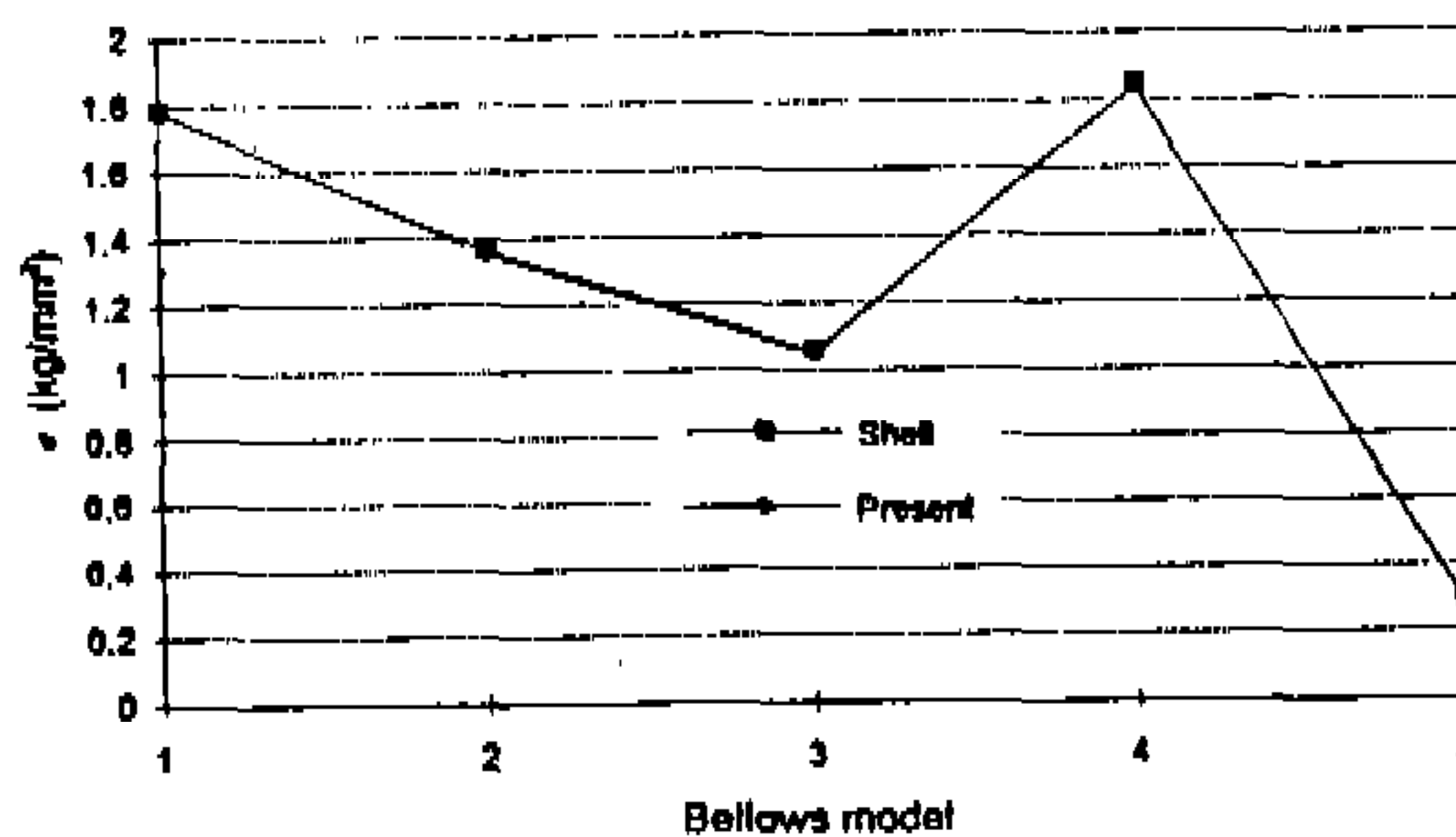
Table 2 Bound and initial values of the design variables

Design variables	Lower bound	Initial value	Upper bound
b_1	0.1	0.5	3.0
b_2	0.5	2.1	10.0
b_3	0.5	2.1	10.0
b_4	1.0	8.0	20.0
b_5	1.0	8.0	20.0
b_6	1.0	8.0	20.0
b_7	1.0	8.0	20.0

(unit : mm)



(a) Stiffness

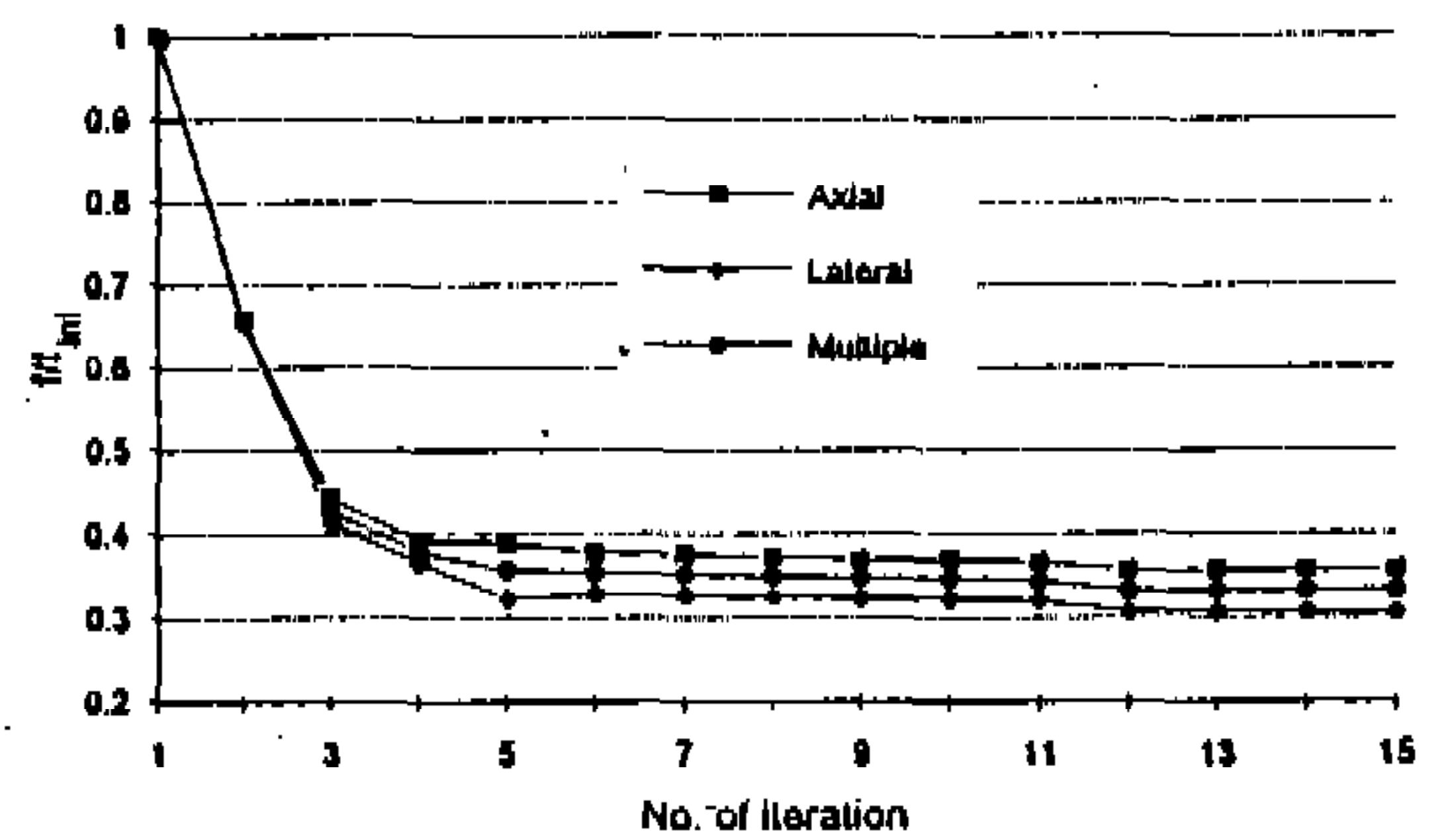


(b) Stress

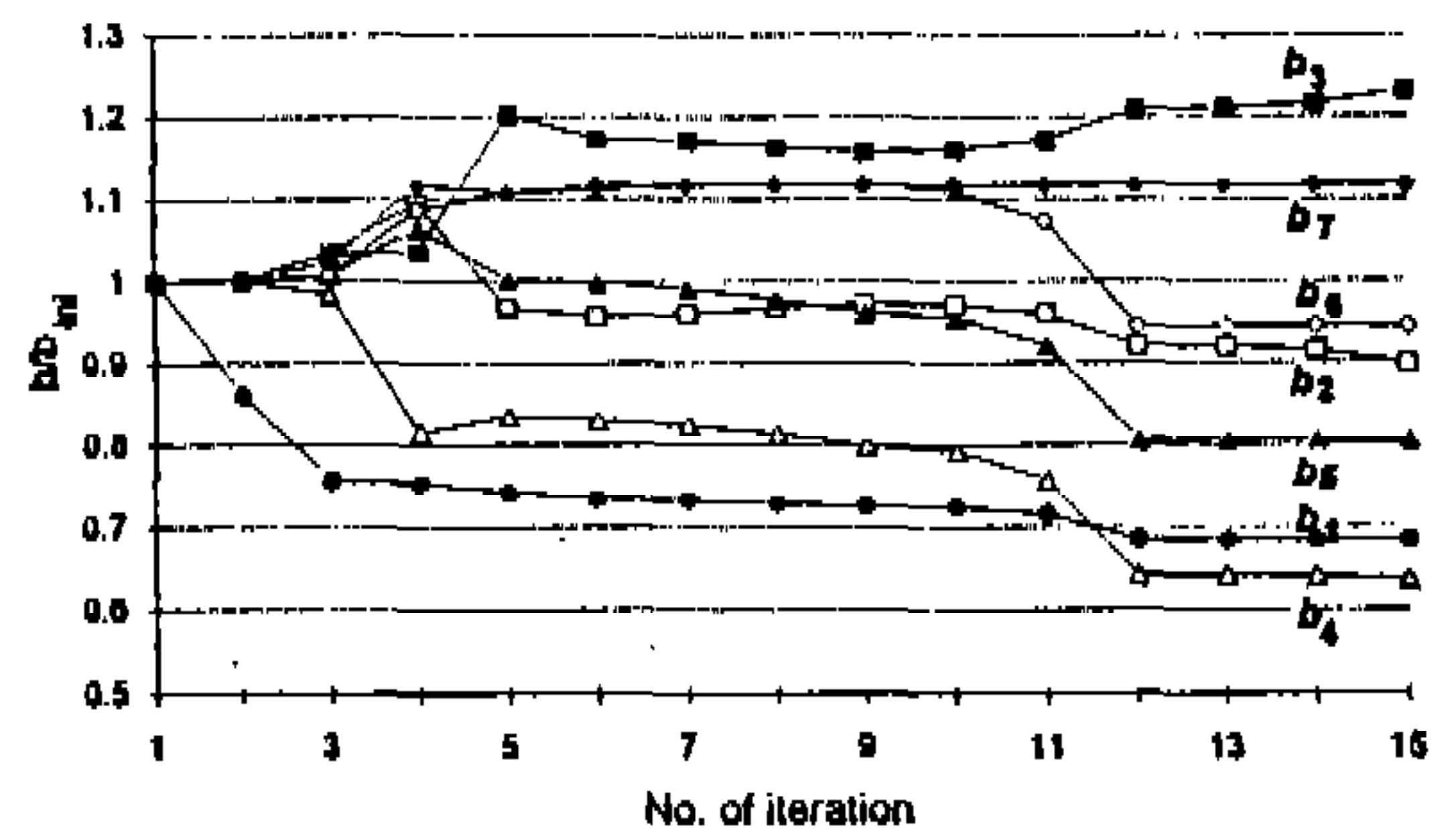
Fig.9 Comparison of the lateral behavior

의 강성을 다목적함수로 하여 최적화 경향을 고찰하였으며, 그 결과가 Fig.10에 나타나 있다.

종축의 아래 첨자 ini 는 초기값을 의미하고, Fig.10에 나타난 바와 같이 최적화의 반복과정은 15번째에서 종료되었으며, 다목적함수에 대한 최적화 과정을 각각의 목적함수를 포함하여 고찰하였다. 다목적함수는 5번째 반복과정부터 거의 일정한 값을 가지며, 이러한 경향은 두께의 감소로 인한 결과임을 알 수 있다. 이와 같이 두께가 감소하면 최적설계의 경향은 응력이 증가하여 식 (25)의 피로한도에 대한 구속조건에 위반되지만 이를 방지하기 위한 2가지 경향이 고찰된다. 첫번째는 Fig.10(b)로부터 파형 골부분의 반경이 산부분의 반경에 비해 큰 값으로 최적화됨을 알 수 있다. 이것은 파형의 골부분의 응력이 산부분의 응력보다 크다는 연구²⁵⁾와



(a) Objective functions



(b) Design variables

Fig.10 Optimization process for a multiple objective function

비교해 볼 때, 응력을 완화시키기 위하여 골부분의 반경이 커지기 때문이다. 그리고 두 번째 원형평판의 길이가 양단으로 갈수록 작아지는 경향을 나타내며, 이러한 경향 또한 벨로우즈의 양단에서 발생하는 응력을 완화시키기 위하여 양단에서의 원형평판의 길이가 감소하기 때문이다. 이상의 최적화경향은 현재 벨로우즈의 설계 현장에서 설계안으로 채택되고 있다.

이제 배기시스템에서 요구하는 벨로우즈의 특정 강성을 만족하기 위한 형상최적설계를 고찰하기로 한다. 이를 위해 형상최적설계의 수학적 정식화는 다음과 같이 재정의된다.

$$\text{Min. } W_{bellows} \quad (31)$$

s.t.

$$h_1 = K_l / K_l' - 1.0 \quad (32)$$

$$h_2 = K_a / K_a' - 1.0 \quad (33)$$

$$g_r \equiv \frac{(\sigma_e)_i}{A \log_{10} N_{sys} + B} - 1.0 \quad r=1,2,\dots,260 \quad (34)$$

$$g_{261} \equiv 1.5 \text{Freq}_{sys} / \text{Freq}_{axi} - 1.0 \quad (35)$$

$$g_{262} \equiv 1.5 \text{Freq}_{sys} / \text{Freq}_{lat} - 1.0 \quad (36)$$

$$g_{263} \equiv F_{axi} / F_{cr} - 1.0 \quad (37)$$

$$g_s \equiv 0.5 \leq \frac{q}{h} \leq 1.5 \quad s=264, 265, \dots, 271 \quad (38)$$

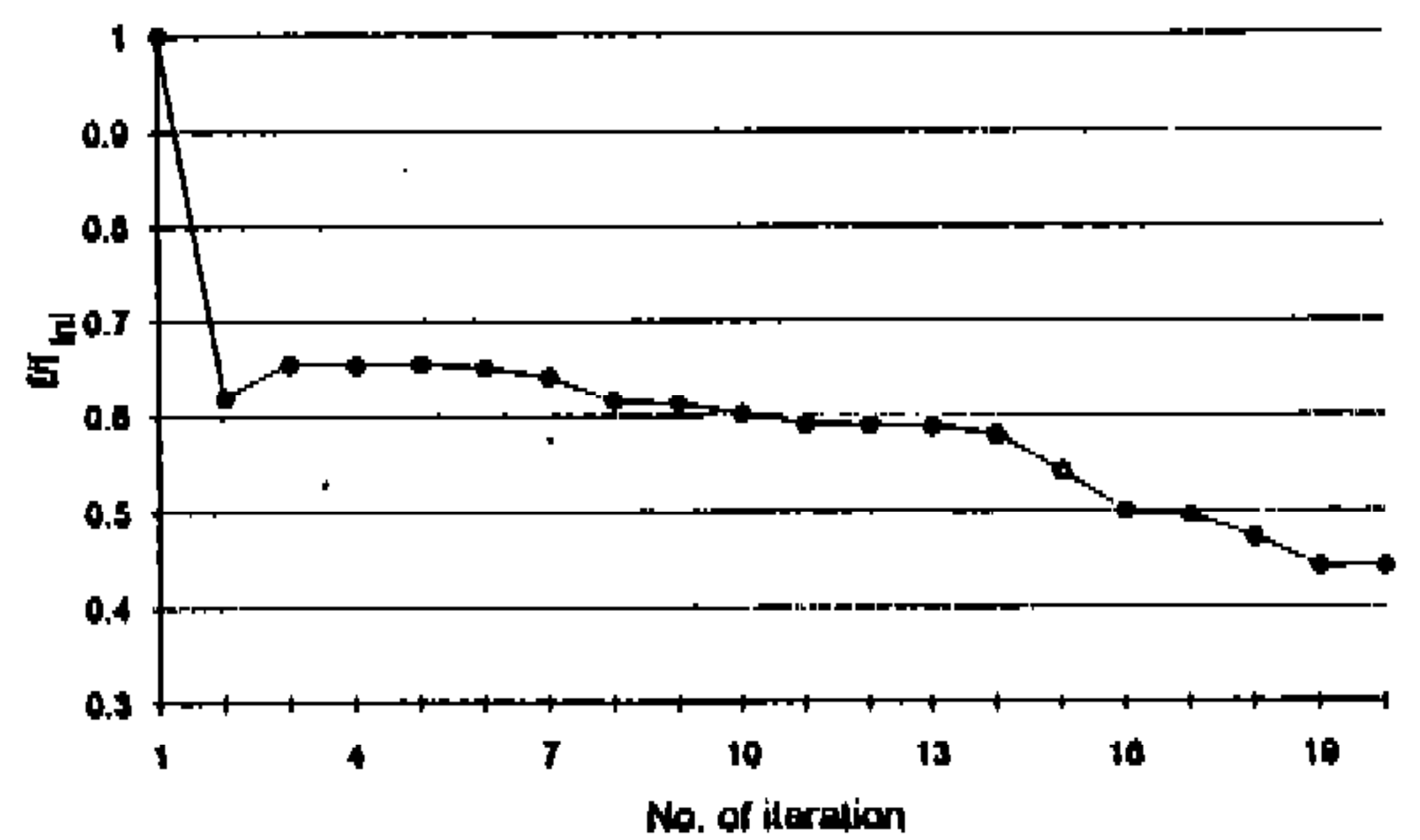
$$g_t \equiv \frac{h}{2R} \leq 0.25 \quad t=271, 272, \dots, 274 \quad (39)$$

$$g_u \equiv b_4 \leq b_5 \leq b_6 \leq b_7 \quad u=275, 277 \quad (40)$$

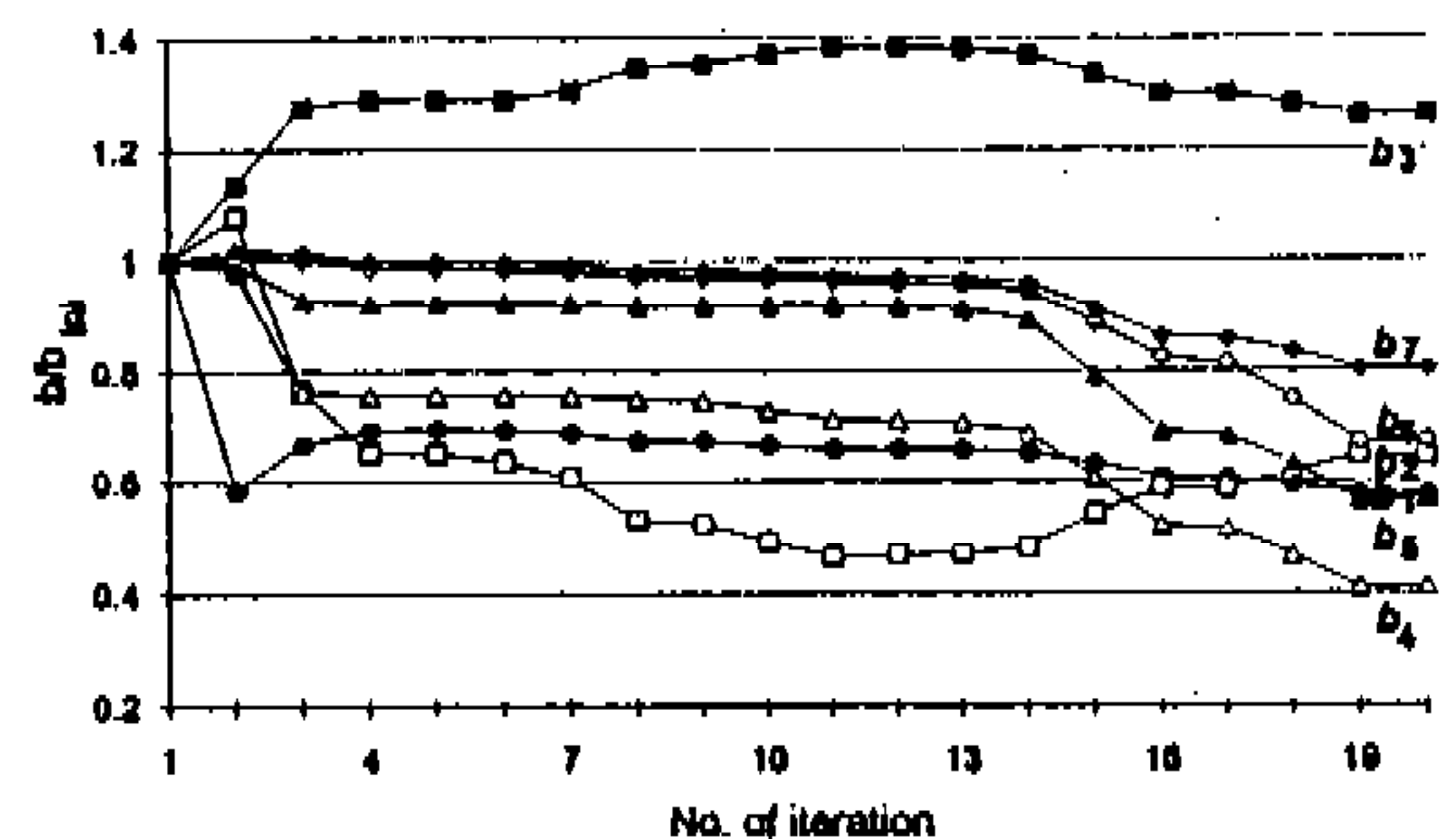
강성을 만족하도록 하는 형상을 결정하기 위하여 벨로우즈의 강성을 식 (32), (33)에 나타난 바와 같이 등제한조건함수로 고려하였으며, 목적함수는 식 (31)에 나타난 바와 같이 벨로우즈의 중량을 선정하였다. 식 (32), (33)에서 K_a 와 K_l 은 각각 벨로우즈의 축방향 및 횡방향 강성을 나타내며, 윗 첨자 '는 배기시스템에서 요구하는 벨로우즈의 특정 강성을 나타낸다. 또한 식 (34)~(39)의 제한조건함수는 식 (25)~(30)과 동일하며, 식 (40)은 벨로우즈의 강성을 다목적함수로 최적화하였을 때의 결과로부터 도입된 관계식이다.

이상과 같은 형상최적설계의 수학적 정식화로부터 산출된 최적화 경향이 Fig.11에 나타나 있다.

중량을 최소화하는 문제이므로 벨로우즈의



(a) Objective functions



(b) Design variables

Fig.11 Optimization process in case of the specified stiffness

배기시스템에서 요구하는 벨로우즈의 특정

Table 3 Results for various shape optimal design

Design variable	Lower bound	Initial value	Upper bound	Multiple	Specified stiffness			
					Free	Installation environment fixed		
						Length	Diameter	Leong.-Dia.
b_1	0.1	0.5	3.0	0.34	0.29	0.29	0.30	0.31
b_2	0.5	2.1	10.0	1.89	1.36	1.77	1.08	1.49
b_3	0.5	2.1	10.0	2.59	2.65	2.39	2.96	2.67
b_4	1.0	8.0	20.0	5.09	3.29	3.39	1.01	3.05
b_5	1.0	8.0	20.0	6.44	4.55	4.49	4.72	4.20
b_6	1.0	8.0	20.0	7.55	5.39	5.28	6.10	5.12
b_7	1.0	8.0	20.0	8.95	6.43	6.25	7.67	7.54

(unit : mm)

두께를 비롯한 모든 기하학적 형상변수는 하한값 근방에서 최적화되어야 한다. 그러나 모든 설계변수의 이러한 하한값으로의 최적화 경향은 벨로우즈의 강성을 매우 증가시키므로 배기시스템에서 요구하는 특정 강성 즉, 등제한조건함수를 위반하게 된다. Fig.11의 결과는 우선 중량의 최소화를 위하여 두께가 감소하며, 두께의 감소에 따른 응력의 증가를 완화시키기 위하여 앞서의 고찰과 마찬가지로 파형 골부분의 반경이 중량의 최소화에도 불구하고 큰 값으로 산출되었다. 또한 두께의 감소는 벨로우즈의 강성을 매우 작게하므로 배기시스템에서 요구하는 특정 강성보다 더욱 작은 강성을 부여하므로 강성을 크게 하기 위하여 원형평판의 길이가 감소하므로써 등제한조건함수를 만족시킨다. 따라서 벨로우즈의 강성에 가장 큰 영향을 미치는 설계변수는 두께이며, 다음 설계변수는 원형평판의 길이이고 파형의 반경은 벨로우즈의 강성에 큰 영향이 없음을 알 수 있다.

벨로우즈는 배기시스템의 한 성분(component)이므로 시스템의 실제 장착환경을 고려하여 설계되어야 한다. 즉, 벨로우즈의 전체 길이나 직경 혹은 이 2가지 모두가 구속되어 장착되는 경우가 발생한다. 따라서 이와 같은 실제 장착환경을 고려한 형상최적설계를 수행하였으며, 이에 대한 결과를 Table 3에

제시하였다. 또한 Table 3에는 앞서 고찰한 결과 즉, 강성을 다목적함수로 고려한 경우와 특정강성을 만족시키기 위한 경우의 결과를 포함하여 제시하였다.

Table 3에 제시된 바와 같이 강성을 최소화시키는 경우보다 중량을 최소화시키는 경우의 두께가 오히려 작음을 알 수 있다. 따라서 응력의 완화를 위하여 파형 골부분의 반경이 큰 값을 갖으며, 결국 특정 강성에 대한 등제한조건을 만족시키기 위하여 원형평판의 길이가 감소한다. 이와 같은 최적화 경향은 앞서의 고찰이 타당함을 입증한다.

5. 결 론

곡선 원추대요소를 이용한 U형 벨로우즈의 유한요소해석과 특정 강성을 위한 다목적 최적화기법이 형상최적설계를 통하여 다음과 같은 결론을 얻었다.

- 1) 기존의 해석이론에 비해 해석 범위가 넓고, 해석 과정에서 인위적인 가정을 최소화할 수 있으며, 적은 요소수로도 곡선 형상의 벨로우즈를 정확하게 구현할 수 있는 곡선 원추대요소(curved conical frustum element)의 유한요소법을 벨로우즈의 해석에 적용하여 신뢰성을 입증하였다.
- 2) 벨로우즈의 강성을 다목적함수로 고려

한 형상최적설계의 결과는 벨로우즈의 유연성을 향상시키기 위해 두께가 감소하였다. 또한 두께의 감소에 따른 응력의 증가를 완화시키기 위하여 파형 골부분의 반경이 산부분의 반경에 비해 크게 산출되었으며, 원형평판의 길이는 양단으로 갈수록 작아지는 경향을 나타내었다. 이와 같은 경향은 현재 현장의 설계안으로 채택되고 있다.

- 3) 벨로우즈의 중량을 목적함수로 선정하고 벨로우즈의 특정한 강성을 등제한 조건함수로 고려한 형상최적설계의 결과는 벨로우즈의 중량을 최소화하기 위하여 두께가 감소하며, 두께의 감소에 따른 응력의 증가를 완화시키기 위하여 파형 골부분의 반경이 중량의 최소화에도 불구하고 큰 값으로 산출되었다. 또한 두께의 감소는 벨로우즈의 강성을 매우 작게하므로 배기시스템에서 요구하는 특정 강성보다 더욱 작은 강성을 부여하므로 강성을 크게 하기 위하여 원형평판의 길이가 감소하므로써 등제한조건함수를 만족시킨다.
- 4) 본 연구에서는 곡선 원추대요소를 이용한 유한요소해석을 통하여 U형 벨로우즈의 해석에 대한 보다 정확한 해를 산출하였으며, 형상최적화기법을 도입하여 강성에 따른 벨로우즈의 형상을 실제 장착환경까지 고려하여 결정하였다. 따라서 이와 같은 해석이론과 형상최적화기법은 벨로우즈의 해석 및 설계에 정확성, 효율성과 실질성을 부여하리라 기대된다.

참 고 문 헌

1. 서용진, "일정 강성의 U형 벨로우즈에 관한 형상최적설계", 한양대학교 석사학위 청구논문, 1994
2. 兵田 實외 3명, "圓環かくの強度に關する研究(解の提案)", 日本機械學會論文集, Vol.29, pp.142-158, 昭38
3. R. A. Clark, *Asymptotic solutions of Elastic Shell Problem, Asymptotic solutions of Differential Equations and Their Applications*, John Wiley and Sons, Inc., 1964
4. A. Laupa and N. A. Weil, "Analysis of U Shaped Expansion Joint", *J. Appl. Mech.*, 29(1), pp.115-123, 1962
5. 이완익, 김태완, "벨로우즈 문제 해석을 위한 수정 에너지이론", 한국자동차공학회지, 제11권 제 2 호, pp.55-65, 1989
6. 고병갑, "Bellows의 굽힘문제에 관한 연구,-외팔보형태를 중심으로", 한양대학교 석사학위 청구논문, 1989
7. J. S. Arora, and C. H. Tseng, *IDESIGN User's Manual Version 3.5*, Optimal Design Laboratory, University of Iowa, 1986
8. 鷺津久一郎, 有限要素法 핸드ブック, 培風館, pp.291-348, 1981
9. O. C. Zienkiewicz, *The Finite Element Method*, McGraw-Hill, 1977
10. J. A. Stricklin, "Improvements on the Analysis of Shells of Revolution by the Matri Displacement Method", *AIAA Journal*, Vol.4, No.11, pp.2069-2072, 1966
11. J. E. Gibson, *Thin Shells-Computing and Theory-*, Pergamon Press, 1980
12. A. C. Ugural, *Stresses in Plates and Shells*, McGraw-Hill, 1981
13. W. J. Sutcliffe, "Application of Shell Equations to An Unsymmetrically Loaded Corrugated Shell of Revolution", *Int. J. Mech. Sci.*, Vol.14, pp.681-692, 1972
14. H. Kraus, *Thin Elastic Shells*, John Wiley and Sons, Int., 1967
15. A. Osyczka, *Multicriterion Optimization in Engineering with FORTRAN Programs*, John Wiley & Sons Inc., 1984
16. W. I. Lee, B. K. Koh and G. J. Park, "An Optimal Design of the Bellows in the Automobile Exhaust System", The 5th Inter-

national Pacific Conference on Automotive Engineering, Vol.1, pp.401-411, 1991

17. M. Hamada, "On the Optimum Shapes of Some Axisymmetric Shells", IUTAM Symp. on Optimization in Structural Design, Warsaw/Poland, Springer Verlag, pp.248-262, 1973

18. S. S. Bhavikatti et al, "Optimum Design of Flanged and Flued Expansion Joints", Engineering Optimization, Vol.4, pp.121-128, 1979

19. G. Chakraverti, "Optimum Design of Expansion Bellows for Piping Systems", M. Thesis, Dept. of Applied Mechanics, IIT, Delhi, 1976

20. Expansion Joint Manufacturers Association, Inc., *Standards of the Expansion Joint Manufacturers Association, Inc. Sixth Edition*, 1993

21. 고병갑, 이완익, 박경진, "벨로우즈의 장착에 따른 자동차 배기계의 동특성개선 및 벨로우즈의 최적위치 평가", 한국자동차공학회논문집, 제 2 권, 3호, pp.21-32, 1994

22. J. A. Haringx, "Instability of Bellows Subjected to Internal Pressure", Philips Res. Rep.7, pp.189-196, 1952

23. 고병갑, 박경진, 이완익, "배관시스템 해석을 위한 벨로우즈 유한요소의 개발", 대한기계학회논문집, 제19권, 제 6 호, pp. 2237-2246, 1995

24. G. j. Desalvo, R. W. Gorman, *ANSYS Engineering Analysis System User's Manual*, Swanson Analysis Systems, Inc., Revision 5.0a, 1994

25. B. K. Koh, G. J. Park, W. I. Lee, "Mechanical Behavior of U-Shaped Bellows and Shape Optimal Design Using Multiple Objective Optimization Method", KSME J., Vol.9, No.1, pp.91-101, 1995

부록 A 좌표변환행렬

식 (5)의 i 절점원에 있어서의 요소의 좌표 변환행렬 $[\lambda]$ 는 다음과 같다.

$$[\lambda] = \begin{bmatrix} \cos\phi & 0 & \sin\phi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin\phi & 0 & \cos\phi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cos\phi & 0 & \sin\phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\sin\phi & 0 & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

여기서, ϕ 는 셸 중앙면에 있어서의 자오선방향의 접선과 z 축과의 이루는 각이며, 요소의 형상에 의하여 s 또는 ζ 의 함수로 주어진다.

부록 B 형상함수행렬

식 (10)의 곡선 원추대요소의 형상함수행렬 $[N]$ 은 다음과 같다.

$$[N] = \begin{bmatrix} A_1 & 0 & 0 & 0 & 1-A_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_1 & 0 & 0 & 0 & 1-A_1 & 0 & 0 \\ -a_1 A_1 & 0 & A_1 & LA_1 & A_1^* A_1 & 0 & A_1 & -LA_1 \\ A_1^* A_1 / L & 0 & -6A_1 / L & A_1 & A_1^* A_1 & 0 & 6A_1 / L & -A_1 \end{bmatrix}$$

단,

$$A_1 = 1 - \xi, A_2 = 1 - 2\xi, A_3 = \xi - \xi^2, A_4 = 2\xi - 3\xi^2,$$

$$A_5 = 1 - 4\xi + 3\xi^2, A_6 = \xi^2 - \xi^3, A_7 = 3\xi^2 - 2\xi^3,$$

$$A_8 = 1 - 3\xi^2 + 2\xi^3, A_9 = \xi - 2\xi^2 + \xi^3,$$

$$A_1^* = \alpha_1 + 2\alpha_2 \xi, A_2^* = 3\alpha_1 + 2\alpha_2,$$

$$A_3^* = \alpha_1 + 2\alpha_2, A_4^* = 3\alpha_1 + 4\alpha_2$$

부록 C 축대형 셸의 변형률-변위 관계식

축대칭 셸의 변형률-변위 관계식은 다음과 같다.

$$\varepsilon_s = \frac{\partial u}{\partial s} - w \frac{d\phi}{ds}$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial v}{\partial \theta} + u \sin \phi + w \cos \phi \right)$$

$$\varepsilon_{s\theta} = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u}{\partial \theta} - v \sin \phi + r \frac{\partial u}{\partial s} \right)$$

$$\chi_s = - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial s^2} + u \frac{\partial^2 \phi}{\partial s^2} + \frac{\partial u}{\partial s} \frac{d\phi}{ds} \right)$$

$$\chi_\theta = - \frac{1}{r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} - \frac{\cos \phi}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} \right.$$

$$\left. + \left(\frac{\partial w}{\partial s} + u \frac{d\phi}{ds} \right) \sin \phi \right\}$$

$$\chi_{s\theta} = \frac{2}{r} \left\{ \frac{\partial^2 w}{\partial s \partial \theta} - \frac{\sin \phi}{r} \left(\frac{\partial v}{\partial \theta} - v \cos \phi \right) \right.$$

$$\left. - \frac{\partial v}{\partial s} \cos \phi + \frac{\partial u}{\partial \theta} \frac{d\phi}{ds} \right\} \sin \phi$$