Journal of Historia Mathematica Vol. 8. No. 1, (1995), 26 - 34.

실수의 通約성(Commensurability)에 관한 수학사적 논의

건국대학교 **장 경 윤**

1. 서 론

피타고라스에서 비롯된 가장 중요한 발견은 선분의 통약성(commensurability)을 통한 무리수의 발견이다. 학교수학을 통해 학생들이 처음으로 경험하게 되는 무리수 $\sqrt{2}$도 직각이등변삼각형과 관련되어 그 실재성이 인식되고 있다. 그러나 Struik[8]은 이 발견이 당시 귀족사회의 상징이었던 기하평균 $a:b=b:c$에 대한 그들의 관심때문일 수도 있다고 기록하고 있다. 1과 2의 기하평균은 얼마일까? 이것이 정사각형의 변의 길이와 대각선의 관한 比를 연구하게 하였고, 결국 그 비는 그들이 생각했던 "수"(유리수)의 범주를 벗어 나는 것임이 알려지게 되었다는 것이다. $\sqrt{2}$는 "제곱해서 2가 되는 수", 존재는 부인할 수 없지만 당시로서는 설명할 수 없는 수였던 것이다. 그러므로 19세기 말 Dedekind가 유리수집합을 '절단(cut)'이라는 분할 (A_1, A_2)로 나타내고 여기에서부터 A_1의 최대원소(혹은 A_2의 최소원소)의 존재유무로 유리수와 무리수를 정의하기까지 무리수는 수학의 핵심부분에서 제외되어 있었다. 그러나 현재 학교수학에서 제시하는 유리수의 정의는, Dedekind 절단이 아니라, '분모와 분자가 모두 정수인(분모 $\neq 0$) 분수로 나타낼 수 있는 수'이다. 이는 통약성을 기준으로 한 그리이스수학의 것에서 기하학적 요소를 배제한 것이다.

본 고에서는 대수적 대상이 되고 있는 수가 어떻게 기하학적으로 연결이 되고 있는지 몇 가지 통약성(Commensurability)의 의미를 『원론』을 중심으로 정리하고, 통약적인 두 수의 공통단위를 구하는 방법, $\sqrt{n}$ 형태의 무리수의 통약불가성과 근사값에 관한 역사적 기록과 근사값 구하는 방법들을 수학사에서 살펴 보려고 한다.

2. 선분과 정사각형의 통약성 (commensurability)

2. 1. 『원론(Elements)』 제 10권

유클리드의 『원론(Elements)』 제 10권은 13권의 책들 중에서 가장 특기할 만한 책으로[5], 근대대수가 출현하기 전에는 최고의 존경과 두려움의 대상이 되었던 책이기도 하다[2]. 이 책은 $a \pm \sqrt{b}$, $\sqrt{a \pm \sqrt{b}}$, $\sqrt{\sqrt{a} \pm \sqrt{b}}$ (a, b는 양의 유리수)형태의 무리량을 길이로 갖는 선분들을 체계적으로 분류하고 있으며, 특히 $\sqrt{\sqrt{a} \pm \sqrt{b}}$ 형태의 무리량사이의 관계를 기하학적으로 자세히 다루고 있다. 『원론』 제 10권에는 115개의 명제를 담고 있는데 대부분은 대수학적으로 무리수와 관련된 것을 기하학적으로 다룬 것이다. 유클리트는 이 책에서 양들을 각각 하나의 수로서 대상화하는 대신에, 각각의 크기를 길이(또는 넓이)로 갖는 두 선분(정사각형)의 통약성(commensurability)이라는 기하학적 개념으로 유리수와 무리수를 다루고 있음에 주목할 필요가 있다.

다음은 『원론』 10권에 있는 통약성에 관한 정의이다[6].

정의 :

1. 같은 단위(measure)에 의해서 측정할 수 있는 두 量은 *통약적 (commensurable)* 이라 하고, 공통의 단위를 찾을 수 없는 두 量은 *통약불가(incommensurable)*라 한다.

2. 직선[1]을 한 변으로 하는 정사각형들이 공통의 면적단위로 측정할 수 있는 것은 *정사각형이 통약적(commensurable in square)*[2]이라 하고, 어떤 면적도 공통의 단위가 될 수 없는 경우를 *정사각형이 통약불가(incommensur- able in square)*라 한다.

3. 이러한 가정아래, 하나의 주어진 직선과, 어떤 것들은 길이로 보아 또 다른 것들은 길이와 정사각형 모두, 통약적인 직선들과 통약불가의 직선들이 각각 무수히 많이 존재한다는 것이 증명되었다. 이 주어진 직선의 길이를 *有比적(rational)*이라고 부르기로 하면, 길이에서와 정사각형 모두 또는 정사각형만 이것과 통약적인 것은 *有比적(rational)*이고, 통약불가한 것은 *有比적이 아니다(irrational).*[3]

---

1) 『원론』 제 1권에서 직선(straight line)을 "그 위에 점들이 고르게 놓여 있는 선"으로 정의하고 있으나, 23개의 용어정의에서 선분은 제외되어 있다. 그러나 1권의 제 2공준에서 "유한의 직선(finite straight line)"으로 선분을 표현하고 있는 것으로보아 "선분"을 직선의 하나로 간주하고 있음을 알 수 있다. 여기에서도 "직선"이란 용어를 "선분"의 의미로 사용하고 있다.

2) '정사각형'과 '제곱' 모두 영어로는 square 이다. 그리이스시대에 제곱수(square number)란 정사각형 모양의 모양수를 지칭하는 것으로 보다 기하학적 색채가 짙은 용어였다. "commensurable in square"란 결국 '제곱을 한 결과가 통약적'이라는 말인데 각 선분을 한 변으로 정사각형의 넓이들의 공통 단위의 존재 유무를 그 판정기준으로 하고 있는 본래의 의미를 나타내기 위하여 "정사각형이 통약적"이라 번역하였다.

3) *有比적인*(rational) 수와 *有比적이 아닌*(irrational) 수가 우리가 사용하는 용어로 각

4. 주어진 직선을 한 변으로 하는 정사각형이 *有比적(rational)*이면, 이것과 통약적인 정사각형들은 *有比적(rational)*이며, 이것과 통약적이 아닌 정사각형들은 *有比적이 아니고 (irrational)* 이 정사각형들을 이루는 선분들은 *有比적이 아니다 (irrational)*.

이 정의에 따르면, $3\frac{2}{21}$ 와 $1\frac{5}{6}$ 는 $\frac{1}{42}$ 를 공통단위로 가지므로 통약적이며, $\sqrt{2}$와 $\frac{\sqrt{5}}{7}$ 는, $\frac{1}{49}$ 이 각각을 한 변으로 하는 정사각형의 넓이의 공통단위가 되므로, 정사각형이 통약적이다.

위의 세번 째 정의를 오늘날의 용어로 바꾸어 말하면, a가 *유리수*이면 a와 임의의 수 b에 대하여, b와 b^2이 각각 a와 a^2과 통약적이면 b와 b^2은 *유리수*, b^2만 a^2과 통약적이면 b는 *무리수*이고 b^2은 *유리수*이며, b와 b^2이 모두 a와 a^2과 통약불가하면 b와 b^2은 모두 *무리수*라는 것이다. 우리는 여기에서 두 개의 선분의 길이나, 면적들이 같은 단위로 측정이 가능한가 하는 "통약성(commensurability)"의 여부에 따라 수를 분류하고 있음을 알 수 있다. 이는 수를 기하학적 대상으로 취급하고 있는 것이며, 오늘날 두 정수의 순서쌍 $Z \times Z$에서의 동치류로서 유리수를 취급하고 있는 것과는 큰 차이가 있다.

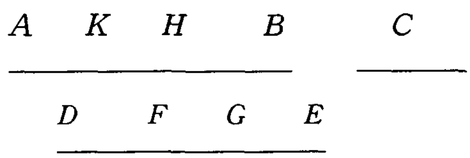
『원론』에서는 정의 뿐 아니라 명제들도 기하학적으로 다루고 있다.

각 유리수(rational number)와 무리수(irrational number)이다. 이 정의는 유리수와 통약적인 수가 유리수이고, 통약불가한 수가 무리수라는 의미이다.

<u>명제 1</u>

두 개의 서로 다른 양이 있다고 하자. 큰 것에서 그 반 이상을 떼어 내고, 나머지에서 다시 그 반 이상의 양을 떼어 낸다고 하자. 이같은 과정을 계속하면 남은 양이 처음의 작은 양 보다 더 작게 될 것이다.

*AB*와 *C*가 서로 다른 양으로 *AB*가 *C* 보다 크다고 하자. 그러면 *AB*에서 그 반 보다 큰 양을 떼어 내고, 나머지에서 다시 그 반 보다 큰 양을 떼어 내는 일을 계 계속하면, *C* 보다 작은 양이 남게 될 것이다.



*C*에 적당한 수를 곱하여 *AB*보다 크게 할 수 있다. *DE*를 *C*의 몇 배가 되는 양으로 *AB*보다 크다고 하자. 위의 그림에서와 같이 *DE*가 *C*와 같은 길이를 갖는 *DF, FG, GE* 세 부분으로 이루어져 있다고 하자. *AB*에서 *AB*의 반 보다 큰 *BH*를 떼어 내고, 다시 *AH*에서 그 반 보다 큰 *HK*를 떼어 내고, 이런 과정을 *AB*의 나머지가 *DE*의 분할과 같은 양이 되기 까지 계속한다.

...........(중략).........., Q.E.D. [6, pp.133-134]

<u>명제 9</u>

길이로 보아 서로 통약적인 선분을 한 변으로 하는 정사각형들(넓이)은 제곱수/제곱수의 비율을 가진다. 또 정사각형들이 제곱수/제곱수의 비율을 가지면 그 정사각형의 변들은 길이로 보아서도 서로 통약적이다.

그러나 길이로 보아 서로 통약적이 아닌 선분을 한 변으로 하는 정사각형들(넓이)은 제곱수/제곱수의 비율을 갖지 못한다. 또 정사각형들이 제곱수/제곱수의 비율을 갖지 못하면 그 정사각형의 변들은 길이로 보아서도 서로 통약적이 아니다.

이를 현대적인 기호로 나타내면 다음과 같다.

임의의 수 a, b에 대하여(a, b가 정수일 필요 없음), a/b 가 유리수이면 $\frac{a^2}{b^2}$ 은 $\frac{n^2}{m^2}$ (m, n 은 자연수)의 형태로 나타낼 수 있으며, 그 역도 성립한다. 임의의 수 a, b에 대하여(a, b가 정수일 필요 없음), a/b 가 무리수이면 $\frac{a^2}{b^2}$ 은 $\frac{n^2}{m^2}$ (m, n 은 자연수)의 형태로 나타낼 수 없으며, 그 역도 성립한다.

이상에서 살펴 본 바와 같이, 통약성(commensurability)이란 선분의 길이라는 두 개의 量의 크기가 단위길이의 정수比로 나타낼 수 있음을 의미하며, 이것이 “분모와 분자가 모두 정수인 수로 나타낼 수 있는 수” 라는 유리수(rational number)의 개념과 근본적으로 같은 것이다.

2. 2. 두 선분에서 공통의 단위를 구하는 방법

그러면 두 선분이 통약적일 때 공통의 단위는 어떻게 구하였는가? 몇 가지 경우로 나누어 살펴 보기로 하자.

길이가 긴 것이 짧은 것의 정수倍인 경우: 이 경우에는 짧은 것의 길이가 공통단위가 될 수 있다. 예를 들면 길이가 4, 12인 경우에는 4가 공통단위가 된다.

길이가 긴 것이 짧은 것의 정수배가 아닌 경우: 이 때는 긴 것(L)에서 작은 것(S) 만큼 여러번 떼어 내어 그 남은 것(R1)이 작은 것(S) 보다 작게 되도록 한다. 다시 작은 양(S)에서 남은 것(R1)을 가능한 대로 여러번 떼어내어 나머지(R2)가 R1 보다 작게 되도록 한다. R1이 R2의 정수배가 되면, R2가 구하는 공통단위이다. 만일 R1이 R2의 정수배가 아니면, R1에서 R2를 가능한 대로 여러 번 떼어 내어 나머지(R3)가 R2 보다 작게 만들고, 이러한 과정을 R(n)이 R(n+1)의 정수배가 될 때 까지 되풀이한다. 이 때 R(n+1)이 공통단위이다. 예를 들면 7과 23의 공통단위는 23에서 7을 3번 떼어 내어 나머지가 2(<7)가 되게 한다. 7이 2의 배수가 아니므로 7에서 2를 여러번 덜어내어 나머지가 2보다 작게 되게 한다. 따라서 7에서 2를 3번 덜어 내면 나머지가 1이 되는데, 이때 2는 1의 배수가 된다. 그러므로 1이 공통단위이다.[4]

3. 무리수 $\sqrt{n}$

3. 1. 무리수와 그리이스 수학자들

유클리트는 제 10권의 명제 17과 18에서, 이 방정식 $ax - x^2 = b^2$의 근이 a와 통약적인가의 여부는 $\sqrt{a^2 - 4b^2}$이 a와 통약적인가의 여부에 따라 결정된다는 것을 보이고 있다. 우리는 여기에서 그리이스인들이 이차방정식의 풀이에 수론적인 방법을 사용하고 있었음을 알 수 있다. 그러나 방정식 $ax - x^2 = b^2$의 근은 항상 작도가능하였다. Boyer는 그리이스에서 산술적인 대수가 기하 보다 더 일반적인 것이었음에도 불구하고, 기하학적으로 대상을 다룬 이유를 ‘실수 개념의 결여’로 보고 있다[2, p. 117]. 에우독소스(408-355 B.C.)는 비율이론을 유리량 뿐 아니라 무리량에도 적용할 수 있도록 개량하였다. [원론] 5권의 비율이론은 에우독소스의

4) 이는 두 정수의 최대공약수를 구하는 유클리트의 호제법을 사용하고 있다.

이론으로 알려져 있다.

그러나 모든 것이 양의 비(ratio)에 관하여 정의하고 있음에도 불구하고 '量' 자체는 정의되지 않은 채 남아 있었으므로 무리수를 수로 정의하는 문제는 완전히 피해가고 있는 셈이었다. 에우독소스의 접근은 수학을 기하학자들의 손에 밀어 넣었다. 무리수에 관한 산술적 이론이 전혀 없는 상태에서 수 개념의 근본이 재언급되었다. 그 후 200년 동안 기하학은 엄밀한 수학적 추론의 거의 모든 기초 역할을 해 오게 되었다.

통약불가한 기하량의 존재는 논리적 엄밀성에 관한 관심와 더불어 수학의 기초를 완전히 뒤바꾸는 일이 불가피하게 만들었다. 여기에 기여를 한 수학자들이 테오도루스 (Theodorus, B.C. 470년경), 디에테투스 (Theaetetus, 415-369 B.C.), 아키타스 (Archytas, 428-347 B.C.) 그리고 에우독소스였다. 키레네의 테오도루스(B.C. 470년경)는 플라톤에게 수학을 가르친 인물로서, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt{8}$, $\sqrt{10}$, $\sqrt{11}$, $\sqrt{12}$, $\sqrt{13}$, $\sqrt{14}$, $\sqrt{15}$와 $\sqrt{17}$로 나타내어 지는 정사각형의 변의 길이는 단위길이와 통약적이 아님을 기하학적으로 보여 주었다고 전해 진다. 즉 3 부터 17까지의 제곱수가 아닌 수의 제곱근이 무리수인 것을 보여 주었는데, 플라톤에 의하면 어떤 이유에 의해 17에서 멈춘 것이라 한다. 테오도루스의 제자인 디에테투스는 스승의 결과를 확장하여 제곱수가 아닌 수의 제곱근은 모두 무리수임을 보였고, 플라톤은 여기에 임의의 유리수는 두 무리수의 합으로 나타낼 수 있다는 것을 추가하였다. 유클리트가 기록한 [원론] 10권의 내용은 디에테투스의 업적으로 전해지고 있다.

아키타스는 원형 실린더 위에서의 기하를 최초로 연구한 사람이었는데 타원의 몇 가지 성질들을 발견했으며 정육면체의 부피를 두 배로 하는 해법도 고안하였다.

에우독소스의 업적은 크게 세가지 이다. 비율에 관한 일반이론, 황금분할에 관한 연구, '착출법(method of exhaustion)'의 고안이다. 착출법은 후에 아르키메데스에 의해 세련되어서 후에 적분의 기초를 다지는데 기여를 하였다.[3]

3.2. 무리수 $\sqrt{n}$의 증명

$\sqrt{2}$가 유리수가 아니라는 증명 가운데 우리에게 잘 알려져 있는 것은 아리스토텔레스에 의한 것이다.

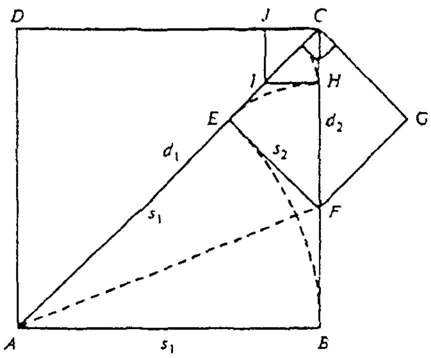
> 이 비가 $p:q$라 하자. p와 q를 서로 소가 되게 할 수 있다. 그러면 $p^2 = 2q$, 그러므로 p^2 그러니까 p는 짝수이다. $p = 2r$이라 하자. 그런데 q는 홀수라야 한다. 그러나 $q^2 = 2r^2$ 이므로 q는 짝수라야 한다. 이 모순은, 수개념의 확장으로는 해결되지 않았으므로, 이런 경우에 수이론을 부정함으로써 기하학에서의 통합을 찾으려 하였다.

기하학적으로 $\sqrt{2}$가 무리수임을 보일 수 있다. 이 증명은 전술한 것 보다 더 오래된 것으로 『원론』의 주장과 맥을 같이 하는 것이다. 이것의 기본적인 아이디어는 임의의 정사각형 안에 점점 더 작은 정사각형들을 계속 그려 나갈 수 있다는 것이다[2, 114-115].

> 정사각형 $ABCD$ 안에 반지름을 $AB(=s_1)$호 BE를 그려서 아래 그림과 같이 대각선 $AC(=d_1)$위에 E가 있게 한다. 그리고 F에서 d_1에 수직선을 그려 BC와 만난 점을 F라 한다. 여기에서 두 삼각형 BAF와 FAE는 합동이므로 $FB=FE$ 이다. 그리고 삼각형

CEF는 $CE=FE$인 직각이등변 삼각형이다.

또 한변의 길이가 $s_2(=CE=d_1-s_1)$이고 대각선의 길이가 $d_2(=CB-FB=s_1-s_2)$인 정사각형 $CEFG$를 작도한다. 변 $s_2=FE$를 대각선 $d_2=FC$ 위에 (원호를) 내려서 $CH(=S_3)$라하고 이것을 세 번째 정사각형의 한 변으로 한다. 세 번째 정사각형에서 $s_3=d_2-s_2$이고 대각선의 길이 $d_3=s_2-s_3=CE-EI$가 된다.



이 과정을 되풀이 하면 조금씩 크기가 작은 정사각형들을 얻게 되며 변의 길이와 대각선의 길이는 다음 관계식을 만족한다.

$$s_n = d_{n-1} - s_{n-1},$$

$$d_n = s_{n-1} - s_n.$$

처음의 정사각형이 통약적이라고 가정하면 모순에 이르게 됨을 보이도록 하자. 만일 두 양이 통약적이면 공통단위 δ가 존재하고, 다음을 만족시키는 정수 M_1, M_2이 존재한다.

$$s_1 = M_1\delta, \quad d_1 = N_1\delta.$$

그런데

$$s_2 = d_1 - s_1 = (N_1 - M_1)\delta = M_2\delta,$$

$$d_2 = s_1 - s_2 = (M_1 - M_2)\delta = N_2\delta,$$

여기서 $M_2 < M_1$이고 $N_2 < N_1$.

이같은 과정을 되풀이하면

$1 \le \ldots < M_3 < M_2 < M_1$,

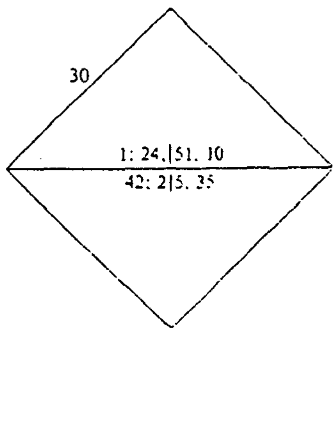
$1 \le \ldots < N_3 < N_2 < N_1$ 이 된다.

그런데 M_1과 N_1 보다 작은 양의 정수는 오직 유한개 뿐이므로 위의 식은 모순이다.

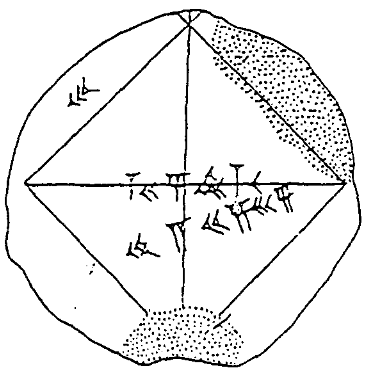
3.3. $\sqrt{n}$의 근사값

$\sqrt{n}$이 무리수인 경우에 무리성의 논의와는 별도로 그 근사값을 구하려는 시도들이 이루어져 왔다.

미국 예일대학이 소장하고 있는 쐐기문자판의 기록(그림)은 피타고라스 이전에 바빌로니아인들이 $\sqrt{2}$의 매우 정확한 근사값(1.414213562...)을 사용하고 있었음을 보여준다[6, p.32]. 그들은 정사각형의 대각선의 길이가 변의 길이의 $\sqrt{2}$배(1;24;51;10)가 된다는 사실은 알고 이미 알고 한 변의 길이가 30인 정사각형의 대각선의 길이(42;25;35)를 구하고 있다.



YBC 7289



데온(Theon of Smyrna, 130년경)은 $\sqrt{2}$의 근사값을 좀 더 정확하게 계산하는 방법을 알고 있었다. 그는 각각 '邊수(x_n)'와 '대각수(y_n)'라는 이름의 두 가지 수열을 다음과 같이 정의하여 이를 근사값 계산에 이용하고 있다[3, pp.111-112].

$$x_n = x_{n-1} + y_{n-1},$$
$$y_n = 2x_{n-1} + y_{n-1} \qquad (*)$$

여기에서 $x_1 = 1$, $y_1 = 1$ 로 놓으면,

$$x_2 = 1 + 1 = 2, \quad y_2 = 2 \cdot 1 + 1 = 3$$
$$x_3 = 2 + 3 = 5, \quad y_3 = 2 \cdot 2 + 3 = 7$$
$$x_4 = 5 + 7 = 12, \quad y_4 = 2 \cdot 5 + 7 = 17$$
$$\cdots$$

이제 수열 $\left\{\frac{y_n}{x_n}\right\}$을 생각하면,

$$\frac{y_1}{x_1} = 1, \ \frac{y_2}{x_2} = \frac{3}{2}, \ \frac{y_3}{x_3} = \frac{7}{5}, \cdots,$$

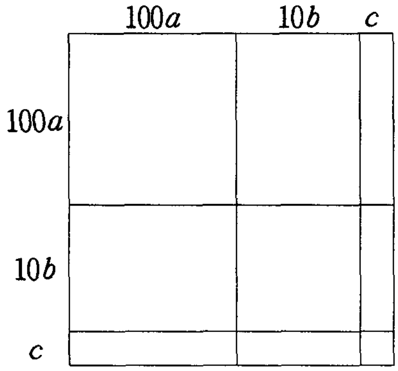
이 수열의 정의에서 다음의 식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} 2x_n^2 - y_n^2 &= -2x_{n-1}^2 - y_{n-1}^2 \\ &= \cdots \\ &= (-1)^{n-1}(2x_1^2 - y_1^2) \\ &= (-1)^{n-1} \end{aligned}$$

그러므로 $\frac{y_n}{x_n} = \sqrt{2 \pm \frac{1}{x_n^2}}$이 되며, n값이 클수록 $\frac{y_n}{x_n}$의 값은 $\sqrt{2}$에 한없이 가까와 진다.

위에서 $x_n = x_{n-1} + y_{n-1}$, $y_n = 2x_{n-1} + y_{n-1}$의 두 번째 식에서 x_{n-1}의 계수를 임의의 양의 정수 n으로 바꿔 주면, 이 과정은 $\sqrt{n}$의 근사값을 구하는 방법이 된다[3, pp112-114 참조].

우리에게 '제곱근풀이법'으로 알려진 방법에 대하여 Katz[7]는 Mathew를 인용하여 그 발견과정에 대체로 학자들 사이에 일치된 견해가 있다고 기록하고 있다. 넓이가 A인 정사각형의 한 변의 길이 n을 구한다는 것은 $(a \cdot 100 + b \cdot 10 + c)^2 = A$가 되는 a, b, c를 발견해 내는 것이다. 우리는 먼저 $(a \cdot 100)^2 < A$인 A를 찾아낸다(그림). 큰 정사각형을 떼어 내고 난 후에 $(10 \cdot b)(100 \cdot a) \cdot 2 < A - (a \cdot 100)^2$가 되는 b를 찾아낸 다음, 필요하다면 $(a \cdot 100 + b \cdot 10 + c)^2 < \mathrm{A}$ 가 되도록 조정을 한다. 유사한 방법으로 c를 찾아 낼 수 있다. $\sqrt{n}$이 무리수인 경우에근사값계산이 불가피하므로 소수점 이하 원하는 자리만큼의 근사값을 구하게 된다.



4. 요약 및 논의

본 고에서 유클리트가 기록한 "통약성"의 의미와 통약불가한 양으로서 무리수의 인식, $\sqrt{2}$의 무리성의 인식과 증명방법들, 제곱근의 근사값 구하는 방법들을 수학사를 통하여 살펴 보았다. 그러나 실수를 기하학적 대상으로 인식하고 통약성에 의해 분류하여 갈등을 해결해 보려고 하였으며, 무리수의 존재에 증명을 고안해 내고, 무리수의 근사값을 구하려는 노력들의 흔적을 수학사를 통해 살펴 볼 수 있었다.

Arcavi 등[1]은 한 조사연구 결과를 근거로 중등학교 수학교사를 위한 수학사 강좌를 개설하였다. 56명의 중등학교 수학교사 가운데, 무리수의 수학적인 정의를 묻는 질문에 2명만이 Dedekind cut를 언급하였고 대부분이 "분모 분자가 정수인 분수로 나타낼 수 없는 수"라고 답하였기 때문이다. 중등학교 수학교사라면, 적어도, 이같은 정의가 수학적인 정의는 아니라는 사실과, 그러나 무리수의 이같은 정의는 실재하며 그 기원이 유클리트로 소급한다는 사실을 인식하고 있을 것이라는 예상을 뒤엎는 것이었다.

수학교사에게 있어서 수학사는 흥미유발 이상의 매우 중요한 의미를 갖는다. 우리는 수학사를 통해서 수학적인 개념들이, 절대진리가 한꺼풀씩 베일을 벗어 온 것이라 보다는, 어떠한 필요에 의해서 시대를 두고 변천해 왔으며 앞으로도 변화할 개연성이 있다는 사실을 보게 된다. 이같은 인식은 최근의 구성주의적 학습이론에서 볼 때 매우 유용한 인식이다. 역사를 통한 지식의 발명이 있었다면 학습자 역시 능동적으로 지식의 발명에 참여할 수 있다는 사실의 인식은 '규칙에 얽매인(rule-based)' 작업에 의미를 줄 수 있기 때문이다. 학교수학과 관련된 수학사의 구체적인 자료들을 찾고 이들을 적절히 활용하는 일은 수학교육에 큰 도움을 줄 것이다.

참고문헌

1. Arcavi, A., Bruckheimer, M., & Ben-Zvi, Ruth. (1987). History of mathematics for teachers: the case of irratinal numbers. For the Learning of Mathematics. 7 (2). pp. 19-23.
2. Boyer, C. (1991). A history of mathematics. 2nd. ed. New York: John Wiley & Sons, Inc. pp. 116-117.
3. Burton, D.M. (1991). The history of mathematics: an introduction. 2nd. ed. Dubuque, IA: Wm. C. Brown Publishers.
4. Dedekind, R. (1956). Irrational numbers. In J.R. Newman(ed.). The world of mathematics. (pp. 528-536). New York: Simon & Schuster.
5. Eves. H. (1990). An introduction to the history of mathematics. 6th ed. Orlando, FL: Holt, Rainhart and Winston, Inc.

6. Fauvel, J. & Gray, J. (ed.) (1987). The history of mathematics: A reader. London, UK: Macmillan Press Ltd. pp. 32, 132-135.
7. Katz, V. J. (1986). Using history in teaching mathematics. For the Learning of Mathematics. vol. 6. (3). pp. 13-19.
8. Struik, D. (1987). A concise history of mathematics. 4th ed. NewYork: Dover Pub. Inc. pp. 41-50.
9. Todhunter, I. (ed.). (1955). Euclid's Elements. London: Great Britain.