

## 19세기의 수학과 음악의 구조

서강대학교 홍성사  
숙명여자대학교 홍영희

### 0. 서론

#### 1. 19세기의 음악

#### 2. 19세기의 수학

### 0. 서론

19세기의 수학과 그 전 2000여년의 수학과 전혀 다른 방향으로 발전한 것과 오늘날의 수학의 기초를 이룬 것은 주지의 사실이다.

실제로, 19세기 이전의 수학의 대상은 객관적이며, 그 대상의 존재를 가정하고 구조를 연구하였지만, 19세기 이후의 수학은 다분히 수학자의 주관에 강조하게 되었다. 즉, 연구의 대상과 그 구조를 수학자가 주관적으로 정의하고, 그 바탕 위에서 새로운 수학을 이루었다.

이미 다 알려져 있듯이, 모든 예술의 형식과 사고의 틀은 항상 두 가지의 축 - 고전주의와 낭만주의 - 사이를 주기적으로 움직이면서 발전해 왔다. 특히, 19세기의 음악은 낭만주의 음악이 그 주조를 이루고 또 최상의 발전을 이룬 시기임도 잘 알려져 있다.

우리는 수학과 음악의 발전 형태를 비교하여, 19세기의 수학사조를 이해할 수 있다는

가설과 우리의 개인적 주요 관심사인 세 분야 - 수학, 음악, 철학 - 의 공통점을 알아보고자 하는 노력에서 이 논문을 쓰게 되었다. 따라서, 세밀한 연구의 결과나, 그 결과의 저자에 대한 사적 자료(史的 資料)에 대하여는 다음 기회로 넘기고, 그 구조의 흐름을 비교하는 쪽으로 연구의 대상을 제한하고 있음을 명기한다.

### 1. 19세기의 음악

19세기의 벽두부터 서구사회는 매우 큰 소용돌이 속으로 빠져 들어가기 시작하였다. 18세기 중엽부터 시작된 산업혁명은 전통적인 소수 귀족사회와 농경사회를 산업과 상업에 의하여 생성된 다수의 중산층의 사회로 바꾸어 놓았고, 미국이 독립하면서 새로운 체제의 정부를 구축한데 이어, 일시적으로는 실패하였지만, 1789년 7월에 시작된 5년 동

안의 불란서혁명(Anarchy)은 서구사회의 구조를 완전히 바꾸어 놓았다.

이 과정에서, 자유 기업에 기초를 둔 사회로의 이행으로, 전례없이 개인이 강조되는 사회가 형성되어, 정치, 경제, 종교 및 개인의 자유가 강조되었다.

이를 대표하는 것으로, Jean Jacques Rousseau 는 다음과 같이 말하였다.

“I am different from all the men I have seen. If I am not better, at least I am different.”

이와 같은 사회적 변혁은 모든 분야의 지성인 및 예술가들에게 피할 수 없는 새로운 도전과 희망이 되고, 이에 따라서 이들은 사고와 작품활동을 하게 되었다.

이러한 사회적 변혁도 일조를 하였고, 또 18세기의 Haydn, Mozart 및 초기 Beethoven 의 음악에 의하여 이루어진 고전주의 음악은 전술한 두 개의 축 - 고전주의, 낭만주의 - 중 고전주의의 극에 달했으므로, 19세기의 음악은 낭만주의 음악 쪽으로 기울어지게 되었다.

E. T. A. Hoffmann (1776-1822) 은 음악의 속성은 낭만성에 그 기초를 두고 있다고 하였다. 즉 “Music is the most romantic of all the arts - one might almost say, the only genuinely romantic one - for its sole subject is the *infinite*. Music discloses to man an unknown realm, a world in which he leaves behind him all *definite* feelings to surrender himself to an inexpressible longing.”

여기에서 알 수 있듯이, 낭만주의의 사고의 틀과 음악은 현재의 시공을 초월하려 하고 있다. 즉, 과거와 미래를 넘나들고, 항상 인간의 한계를 초월하려는 노력, 즉 자연과 인간관계를 개인의 관점에서 초월하고자 한다. 이에 반하여, 고전주의의 사고의 틀과 음악은 인간의 한계를 인정하고, 그 안에서 정

돈, 평형, 완성을 추구하고자 한다.

인간의 무한에 대한 무기력함을 극복하는 방법은 무한의 존재를 철저히 긍정하고, 언제 인가는 아주 조금씩이라도 무한에 접근할 수 있다는 사고를 가지는 쪽과, 그 반대로, 개인이 존재하지 않으면 무한도 존재할 수 없다는 생각에서 개인이 주체가 되어 무한을 극복하려는 쪽으로 대별될 수 있다. 이 두 가지 생각의 틀은 결국 고전적인 사고와 낭만적인 사고의 기초를 이루게 되었다.

지금부터, 19세기 낭만주의 음악의 특징을 살펴보자.

낭만주의는 결국 유한인 인간이 도달할 수 없는 목표를 지향하고 있기 때문에, 항상 이를 극복하기 위한 노력으로, 어떤 의미에서든 개인의 억지가 포함된다. 이로 인하여, 그들은 자유, 개혁, 열정 등을 강조하면서, 고전주의가 갖고 있는 정돈되고 평형을 이룬 음악에서 탈피하게 된다.

더욱이 사회의 변혁으로, 음악을 즐기는 대상이 소수 귀족계급의 후원자에서부터 일반 대중으로 바뀌는 과정에서, 작곡가와 음악을 즐기는 청중사이에 새로운 관계 정립의 문제가 대두되었다. 이 과정에서, 작곡가는 더욱 자유스러워 질 수가 있었다. 실제로, 그들은 그 당시의 청중은 물론이고, 언제인가는 자기들의 작품을 이해할 수 있는 이상적인 청중을 상정하고 작품을 작곡할 수 있는 자유를 가지게 되었다. 또 미리 정해진 후원자의 취향을 만족시키기보다는 작곡가 자신과 뜻이 맞는 소수의 청중을 위한 작곡도 가능해 지게 되므로, 얼마든지 실험적인 작곡형태를 시도할 수 있었다. 또 일반대중과 직접 대화하는 형식, 즉, 이들이 쉽게 접근할 수 있는 음악을 작곡할 필요성도 느끼게 되었다. 따라서, 민요나 여러 나라의 민족주의 색채가 짙은 음악재료는 새로운 활력소가 되었고, 이는 19세기 이전까지 음악의 발전을 주도해 온 직관과 감성을 주로 나타

내려서 Italy 음악과, 내용을 정확하게 전달하려고 노력하는 독일 음악의 테두리에서 벗어나, 주변 여러 나라의 음악은 19세기 음악의 발전에 크게 기여하였다.

산업혁명의 결과로, 농경사회가 산업사회와 도시중심의 사회로 이행되면서 인간의 생활은 점점 자연과 유리되었다. 그럴수록, 인간은 더욱 자연에 매료되었고, 또 자연은 인간의 내면생활에 활력을 넣어 주는 대상이 되고, 신에 의하여 주어진 것이라기보다는 개인의 감성을 통하여 자연을 보게 되었다. 따라서 낭만주의 음악가들은 자신이 설정한 자연을 표현하려는 노력을 하게 되었다. 이는 자연을 경외하고 찬미하는 음악에서 탈피하고, 작곡가가 느낀 대로 자연을 나타내어 도시생활의 인위적인 면을 개인과 자연의 교감을 통하여 상쇄시킬 수 있게 되었다. 또, 다른 관점으로 자연을 봄으로써 작곡 재료의 확장도 가져다주었다. Haydn 은 자연을 있는 그대로 나타내는데 만족하였고, Mozart 는 인간 개개인의 내면생활에 주로 관심을 두었지만, 고전주의에서 낭만주의로 옮긴 Beethoven 은 Faust 와 같이 인간의 한계를 초월하고자 노력하며 이상 (Ideal)에 강력하게 도전하는 음악을 작곡하였다.

19세기 과학문명의 빠른 발달은 음악에 두 가지 영향을 미쳤다. 첫째로, 악기를 싸게 대량생산할 수 있었고, 또 여러 가지로 악기의 개량을 가져다주었다. 따라서 지금까지 상상할 수도 없는 새로운 소리를 낼 수 있게 되었고, 그만큼 작곡의 영역은 넓어지게 되었다. 둘째로, 과학의 발전은 인간 개인을 위축시켰으며 이 위기감을 극복하려는 노력으로 이성의 한계를 넘어서 무의식의 세계와 초자연에 대한 동경을 나타내는 쪽으로 작곡을 하게 되었다.

음악을 즐기는 청중의 확대는 전술한 대로 19세기 음악에 중요한 변수로 작용하였을 뿐만 아니라, 민주사회로의 이행에 따른 교육

기회의 확대는 전문적인 음악가를 양산하게 되었다. 따라서 서구의 거의 모든 주요도시는 음악학교와 큰 연주무대를 확보하게 되었다. 큰 연주장과 훌륭한 연주자들의 수요를 충족하기 위해서 대편성의 관현악단이 생기고, 이는 작곡가들에게 새로운 표현방식의 창출을 유도하므로, 관현악의 발전은 필연적인 결과로 나타나게 되었다. 100여곡이 넘는 Haydn의 교향곡과 40여편이 넘는 Mozart의 교향곡에 비하여, 수적으로는 열세이지만, 서곡의 위치에서 완전히 벗어난 새로운 교향곡의 틀이 19세기에 확립된 것을 보면 이를 알 수 있다. 또 일반대중이 쉽게 연주할 수 있는 음악도 많이 작곡되었고, 함께 즐길 수 있는 합창곡이 많이 작곡된 것도 19세기 음악의 특징중의 하나이다.

지금까지 기술한 내용을 종합하는 의미에서 Grout 의 다음 말을 인용하고자 한다.

“When we listen to a sonata by Mozart we rejoice in the composer’s constant and willing submission to an accepted order of things musical; when we listen to one of Beethoven’s sonatas we rejoice that the revolutionist submits only where he pleases, and that elsewhere he creates a new order, one growing out of the old but resembling it only in externals.”

## 2. 19세기의 수학

1 절에서 19세기의 음악에 대하여 알아보았는데, 이 절에서는 음악의 발전에 대응되어 수학도 같은 맥락으로 발전된 것을 알아봄으로써, 19세기의 수학사조도 역시 낭만주의 시대의 사조와 함께 하고 있음을 보이고자 한다.

Euclid 의 기하학원론에서 사용된 공리에

대하여 非 Euclid 기하학이 19세기에 정립됨으로, 공리는 개인이 설정할 수 있음을 알게 되었다.

非 Euclid 기하학은 Lobachevsky (1793-1856), Bolyai (1802-1860), Gauss (1777-1855) 등에 의하여 발전되었다. 한편, Hamilton (1805-1865) 에 의하여 사원수(quaternions)가 도입되어, 지금까지의 수의 사칙에 의존하던 대수적 구조와는 전혀 다른 대수적 구조가 존재함을 보게 되었다. 이로 인하여, 공리계는 어떤 현상의 진리를 나타내는 것이 아닌 가설에 지나지 않게 되었다. 물리적인 현상에 상관하지 않고 단지 무모순성(consistency)만 확인되는 것들을 공리계로 택할 수 있게 되므로, 19세기의 수학은 수학자의 주관을 최대한으로 용인하며 발전하였다.

이와 같이 개인의 주관이 강조되고, 또 구조에 대한 관점이 바뀔 수 있게 되므로, 지금까지 절대적으로 인정되어 온 모든 수학적 사실에 대하여 재검토가 불가피해 지게 되었다. 특히, Weierstrass (1815-1897), Riemann (1822-1866), Cauchy (1789-1857) 등에 의하여 시작된 해석학 분야의 업적들을 보면 이 사실을 알 수 있다. 이들은 함수의 연속성, 미분가능성등에 그치지 않고, 실수의 구조 자체에 대한 의심을 가지게 되었다. 이는 지금까지 실수 - 자연 - 는 우리와 상관없이 존재하고 그 구조를 받아들이는 입장과 전혀 다른 입장을 보여 준 예이다. 이 문제에 대하여, Cauchy 와 Dedekind (1831-1916)의 업적은 잘 알려져 있다.

실수 구조의 문제와 무한의 문제가 복합되어 Cantor (1829-1920)가 이룬 집합론 = 무한론은 그 당시 수학자와 지식인들에게 큰 충격이었다. 왜냐하면, 그 이전까지 무한이란 인간이 접근할 수 없는 대상이며, 무한의 속성과 신의 속성을 일치시키고 유일신의 사고에 익숙해 있던 사고의 틀에서, 무한 종류의

무한(無限)이 존재할 수 있다는 사실은 쉽게 이해할 수 없는 일이었기 때문이다. Cantor의 논리는 여러 곳에서 문제를 포함하고 있지만, 하여튼 인간으로부터 유리된 무한(無限)이 상당히 많이 우리에게 접근되는 계기를 이룬 것은 틀림이 없다. 이 과정에서, 자연수의 문제가 대두된 것은 당연하다. 수학에서 무한이나 유한을 설명하려면 결국 자연수의 구조를 이용할 수밖에 없다. 그러나, 유한인 인간의 입장에서 그 구조의 이해는 불가능하다. Peano 에 의하여 도입된 자연수의 공리계를 써서 이 문제를 접근하고 또 이에 기초를 두고 Cauchy 와 Dedekind 가 실수를 구성한 것도 흥미 있는 일이다.

또 서양 논리의 근간인 Archimedes (287-212 B.C.) 논리로부터, Boole (1815-1864)에 의하여 정립된 논리의 수학화로 인하여, 논리도 여러 종류의 논리가 가능해지게 되었다. 사고의 틀을 결정 짓는 논리에까지 개인의 주관이 들어 갈 수 있게 된 것도 19세기 수학의 특징중의 하나이다.

19세기 수학은 역시 교육기회의 확장으로 소수 귀족중심에서부터 점점 대학이 중심이 되어 연구가 진행되고, 또 여러 나라에서 많은 수학자에 의하여 연구가 진행됨으로, 19세기 전반부에 연구지(journal)가 출판되기 시작하였다. 1826년에 독일에서 발간한 Journal für die reine und angewandte Mathematik 를 시작으로 여러 나라에서 오늘날의 Journal 과 같은 것들이 속속 출판되었다.

이상에서 우리는 19세기 음악과 수학은 그들이 다루고 있는 내용과 방법에서 공통점을 가지고 있고, 그 발전 형태가 동형임을 알 수 있다. 따라서, 수학은 그 당시 다른 자연과학의 발전과 보조를 맞춘은 물론이고 철학 및 예술의 발전과 함께 함을 알 수 있다.

끝으로, 19세기 말에 음악과 더불어 수학은 낭만주의의 축에서 다시 고전주의의 축으

로 옮겨갔는데, 이의 자세한 내용은 다음 기회로 넘긴다.

### 참고문헌

1. P. J. Davis and R. Hersh, The Mathematical Experience, Houghton Mifflin Co. 1981, Boston.
2. H. Eves, An Introduction to the History of Mathematics, 3rd. ed. Holt, Rinehart and Winston, 1969, New York.
3. D. J. Grout, A History of Western Music, W. W. Norton & Co. Inc, 1964, New York.
4. D. R. Hofstadter, Gödel, Escher, Bach, Vintage Books, 1979, New York.
5. J. Machlis, The Enjoyment of Music, 4th. ed., W. W. Norton & Co., 1977, New York.
6. R. Rucker, Infinity and the Mind, Birkhauser Boston Inc. 1982, New York.