

## 非線形 干涉을 考慮한 多方向 不規則波의 解析 Nonlinear Interaction of Directional Irregular Waves

홍 기 용\*  
Key Yong Hong\*

**要 旨** : 비선형 간섭현상들을 고려하여 다방향 심해 불규칙파를 해석하였다. 선형 위상함수를 사용하여 섭동해를 파기울기의 3차항까지 구하였으며, 비선형 간섭에 기인하는 파특성들의 변조를 살펴보았다. 해의 수렴성은 파기울기뿐 아니라 파성분들 사이의 파장비에도 크게 영향을 받는다. 섭동해중 장파의 특성을 나타내는 성분은 빠른 수렴속도를 가지나, 장파의 의해 간섭되어지는 단파의 섭동해는 수렴속도가 매우 느리거나 발산하는 경향을 보인다. 단파해에서 발생하는 수렴의 어려움은 단파 주파수의 변조특성을 선형파형법이 정확히 표현하지 못하기 때문이다. 따라서 광대역 파스펙트럼의 특성을 갖는 해양파에서 고주파 성분의 특성을 해석하기 위한 목적으로는 선형파형법의 사용이 부적합하다.

**Abstract** □ Nonlinear interaction between directional wave components is theoretically analyzed in deep water. The perturbed solution for an irregular wave is derived accurate up to the third order of the wave steepness and it is shown that the wave characteristics are modulated due to the nonlinear interaction. The convergence rate of the perturbed solution depends on not only wave steepness but also wavelength ratio between wave components. The long-wave component of the perturbed solution converges rapidly, while the short-wave solution converges slowly or diverges. The short wave properties in a broad-band wave spectrum cannot accurately be obtained by the conventional wave-mode method because it fails to properly describe the modulation of short-wave frequency caused by the nonlinear interaction with much longer wave.

### 1. 서 론

자유수면의 비선형성에 기인하는 해양파의 비선형적 특성을 이론적으로 해석하기 위하여 선형파형법 (conventional wave-mode method)에 기초한 섭동법이 흔히 사용되어 왔다. 선형파형법에서는 파진폭, 파수, 파주파수 등의 파랑 특성치들을 상수로 가정하고, 자유수면 경계조건들을 정수면에 대해 전개하여 경계치 문제를 파기울기의 차수에 따라 분리한다. 각 차수에서 독립된 경계치 문제를 저차에서 고차의 순서로 차례로 풀면 원하는 정도의 해를 얻을 수 있다. 규칙파의 비선형해는 선형주파수 성분의 정수배에 해당하는 성분만을 포함한다. 그러나 다양한 파성분들의 합으로 주어지는 불규칙파의 비선형해는 주파수 성분들의 합 또는 차에 해당하는 다양한 주파수 성

분들을 포함한다. 불규칙파의 비선형해가 서로 다른 성분들간의 간섭을 포함하는 반면에 규칙파의 비선형해는 동일한 특성을 갖는 파 사이의 간섭으로 이해될 수 있다. 파기울기가 충분히 작다는 가정하에서, 규칙파의 해석에서는 선형파형법으로 수렴하는 해를 구할 수 있다. 그러나 불규칙파 비선형해의 크기는 파기울기뿐 아니라 파장비에 크게 의존하므로 불규칙파 섭동해의 수렴특성을 올바르게 해석하기 위해서는 수렴성에 대한 파장비의 영향을 이해하는 것이 필수적이다.

실해역의 파는 다방향 불규칙파로서 파성분들 사이의 상호간섭과 방향성에 기인하는 여러 현상들을 수반한다. 일례로 해양구조물의 운동응답 특성은 파의 방향성에 따라 변화하며, 파성분들 사이의 간섭에 기인하는 고주파 또는 저주파는 각기 서로 다른 형

\*韓國機械研究院 船舶海洋工學研究센터 海洋技術研究部 (Ocean Engineering Department, Korea Research Institute of Ships and Ocean Engineering, 171 Jang-dong, Yousung-ku, Taejon 305-600, Korea)

태의 공진현상을 일으켜서 구조물에 심각한 결함을 초래할 수 있다. 또한 근래에 이르러 대형 해양 구조물의 등장과 그에 대한 역학적 해석의 필요성, 해양 오염 문제의 수치역학적 모델의 개발, 표사에 의한 해안의 침식과 변형의 해석등 여러 해양공학 문제가 대두되고 있는바 주요 외력인 해양파의 정밀한 계산 없이는 올바른 해석이 불가능한 실정이다. 이에 따라 실험적 파의 방향성과 파성분들 사이의 간섭효과를 고려한 불규칙파 비선형 해석법의 개발이 요구되고 있다.

해양파의 역학적 특성에 대한 연구는 수치적인 방법에 의해 비선형 특성이 강한 단일파의 현상들을 해석하려는 노력과 섭동법에 의해 파랑성분들 사이의 간섭효과를 고려하여 불규칙파의 수렴해를 얻으려는 이론적인 노력들이 있어 왔다. 전자의 연구는 주로 비선형 자유수면 경계조건의 수치적 표현을 통한 단일파의 특성해석(Schwartz, 1974; Cokelet, 1977)이나 쇄파의 시간에 따른 변화(Longuet-Higgins와 Cokelet, 1976) 추적등에 집중되었다. 한편 Longuet-Higgins (1987)는 장파에 의한 단파의 변형을 수치적으로 계산하였다. 섭동법에 의해 고차해를 구함으로써 불규칙파의 비선형 간섭을 해석하려는 시도로서 Longuet-Higgins와 Stewart(1960)는 일방향파들의 간섭에 대해 천해에서 2차까지의 해를 구하였으며, Longuet-Higgins(1963)는 이를 확장하여 다방향파에 대해 심해에서 2차까지의 해를 구하였다. 이들 결과들은 수조실험의 측정치들과 후에 비교되었다(Miller 등, 1991). 2차해의 결과는 기본적으로 두파의 간섭에 기인하는 파의 변조만을 포함한다. 섭동법에서 각 차수에서 얻어진 해를 비교함으로써 결정되는 해의 수렴성은 사용한 섭동법의 유효성을 결정하는 기준이 되며, 수렴성의 경향을 파악하기 위해서는 최소한 3차까지의 해가 필요하다. 또한 서로 다른 세파의 간섭에 기인하는 비선형 효과들을 살피고, 비교적 느린 수렴속도를 갖는 경우에까지 섭동법을 적용하기 위해서는 고차해를 얻는 것이 필요하다.

파성분들 사이의 간섭은 해양파의 특성을 변형시킨다. 파들사이의 간섭에 기인하여 파의 특성이 변화하는 현상은 Unna(1941, 1942)에 의해 처음으로 연구되었다. Unna는 동일방향으로 진행하는 장파위에 놓인 단파는 장파의 파장에서 파장이 짧아지고 파진폭은 커지며, 파저에서는 반대의 현상을 수반함을

지적하였다. 한편 Longuet-Higgins와 Stewart(1960)는 간섭효과를 나타내는 이차해로부터 파의 변조를 장파위상의 함수로 구하였으며, Bretherton과 Garrett (1968)은 균일하지 않은 속도의 매질위를 전파하는 표면파의 진폭 변화를 고찰하였다. 파의 위상속도로 움직이는 이동좌표계를 도입하여 파의 특성을 해석하는 기법이 Phillips(1981)에 의해 소개되었다. 이를 확장하여 Zhang 등(1993)는 단파의 파특성치들을 직접 장파위상의 함수로 표현하는 변조파형법(modulated wave-mode method)을 사용하여 두파의 간섭에 기인하는 파의 변조를 해석하였으며, Hong(1993)은 3차원의 경우로 이를 확장하였다. 변조파형법을 사용한 위의 두 경우는 비록 3차까지의 해를 유도하였으나, 두파의 간섭만을 고려하였기 때문에 서로 다른 세파의 간섭에 기인하는 3차해를 무시하고 있다. 아래에서는 다방향 불규칙파의 해석을 위하여 3차까지의 모든 항을 포함하는 비선형해를 선형파형법으로 구하고 그의 수렴특성과 변조특성을 고찰함으로써 선형파형법에 의한 섭동해의 유효성과 한계를 논하고자 한다.

## 2. 다방향 불규칙파의 비선형해

유체입자의 비회전성을 가정하여 속도포텐셜을 도입하고, 파의 기울기  $\epsilon$ 이 작다고 가정하여 속도포텐셜  $\phi$ 와 해수면상승  $\zeta$ 를 크기에 따라 분리하면,

$$\phi = \sum_{m=1}^M \phi^{(m)} + O(\epsilon^{m+1}) \quad (1)$$

$$\zeta = \sum_{m=1}^M \zeta^{(m)} + O(\epsilon^{m+1}) \quad (2)$$

여기서  $m$ 은 파기울기에 따른, 차수를 의미한다. 다방향 해양파의 운동은 다음의 경계치 문제에 의해 정의되어진다.

$$\nabla^2 \phi = 0, \quad -\infty < z \leq \zeta \quad (3)$$

$$\phi_z + \frac{1}{2} \nabla \phi \cdot \nabla \phi + g\zeta = C_0 \quad \text{at } z = \zeta \quad (4)$$

$$\zeta_x - \phi_x + \phi_x \zeta_x + \phi_y \zeta_y = 0 \quad \text{at } z = \zeta \quad (5)$$

$$\nabla \phi \rightarrow 0 \quad \text{as } z \rightarrow -\infty \quad (6)$$

여기서

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

여기서  $g$ 는 중력가속도이며  $C_0$ 는 베르누이 상수이다.  $z$ 는 양의 방향이 수면위쪽을 향하는 정수면에 수직인 좌표축이다. 식 (3)은 비압축성, 비회전성 유체의 질량보존 법칙을 의미한다. 식 (4)는 동력학적 자유수면 경계조건으로서 자유수면의 압력은 대기압과 동일함을 의미하며, 식 (5)는 운동학적 자유수면 경계조건으로서 자유수면에 위치한 유체입자의 연직방향 속도는 자유수면의 연직방향 속도와 동일해야 함을 나타낸다. 식 (6)은 심해 해저면에서의 경계조건을 나타낸다. 식 (1)과 (2)를 식 (3)~(6)에 대입한 후 차수에 따라 경계치 문제를 분리하고 저차에서부터 고차의 순서로 차례로 풀면 원하는 정도의 해를 구할 수 있다.

2.1 경계치 문제의 선형해

다방향 불규칙파의 선형 경계치 문제는 다음으로 주어진다:

$$\nabla^2 \phi^{(1)} = 0, \quad -\infty < z \leq 0 \tag{7}$$

$$\phi_i^{(1)} + g\zeta^{(1)} = 0 \text{ at } z=0 \tag{8}$$

$$\phi_i^{(1)} - \phi_z^{(1)} = 0 \text{ at } z=0 \tag{9}$$

$$\lim_{z \rightarrow -\infty} \nabla \phi^{(1)} = 0 \tag{10}$$

다방향 불규칙파의 속도포텐셜과 해수면상승의 선형항은 독립적으로 식 (7)~(10)을 만족하는 서로 다른  $N$ 개의 성분파들의 합으로 표현될 수 있다.

$$\phi^{(1)} = \sum_{i=1}^N \phi_i^{(1)} = \sum_{i=1}^N A_i e^{k_i z} \sin \psi_i \tag{11}$$

$$\zeta^{(1)} = \sum_{i=1}^N \zeta_i^{(1)} = \sum_{i=1}^N a_i \cos \psi_i \tag{12}$$

여기서

$$\psi_i = k_i \cdot x - \sigma_i t + \theta_i = k_{ix} x + k_{iy} y - \sigma_i t + \theta_i \tag{13}$$

윗식에서 아랫첨자  $i$ 는 불규칙파를 구성하는 해양파중  $i$ 번째 성분을 나타내며, 편위상 파랑성분은 단파에서 장파의 순서로 배열한다. 정해진 시공간상에서 파의

위상  $\psi_i$ 는 파수  $k_i$ , 파주파수  $\sigma_i$ , 파의 초기위상  $\theta_i$ 에 의해 결정되어진다. 파수의  $x$ 와  $y$ 방향 성분을 각각 표시하는  $k_{xi}$ 와  $k_{yi}$ 는 다음과 같이 정의된다.

$$k_{xi} = k_i \cos \beta_i, \quad k_{yi} = k_i \sin \beta_i. \tag{14}$$

여기서  $\beta_i$ 는 양의  $x$ 축으로부터 반시계 방향으로 측정되는 파의 입사각을 나타낸다. 식 (11)과 (12)를 선형화된 동력학적 자유수면 경계조건 식 (8)에 대입하면 속도포텐셜과 해수면상승 진폭들 사이의 관계식이 얻어진다.

$$A_i = g a_i / \sigma_i. \tag{15}$$

두 자유수면 경계조건식 (8)과 (9)를 결합하면 다음의 자유수면 경계조건을 얻는다.

$$\phi_i^{(1)} + g\phi_z^{(1)} = 0 \text{ at } z=0. \tag{16}$$

선형 범위내에서 파진동수와 파장 사이의 관계를 나타내는 분산식은 식 (11)과 (12)를 식 (16)에 대입함으로써 유도된다.

$$\sigma_i^2 = g k_i^2. \tag{17}$$

2.2 경계치 문제의 2차해

2차 경계치 문제는 다음으로 주어진다:

$$\nabla^2 \phi^{(2)} = 0, \quad -\infty < z \leq 0 \tag{18}$$

$$\phi_i^{(2)} + g\zeta^{(2)} + \frac{1}{2}(\nabla \phi^{(1)})^2 + \zeta^{(1)} \phi_{zz}^{(1)} = 0 \text{ at } z=0 \tag{19}$$

$$\zeta_x^{(2)} - \phi_z^{(2)} + \phi_x^{(1)} \zeta_x^{(1)} + \phi_y^{(1)} \zeta_y^{(1)} - \zeta^{(1)} \phi_{zz}^{(1)} = 0 \text{ at } z=0 \tag{20}$$

$$\lim_{z \rightarrow -\infty} \nabla \phi^{(2)} = 0 \tag{21}$$

2차경계치 문제의 해는 파성분들 사이의 비선형 간섭에 기인하는 항들을 포함하며 2.1절에서 얻어진 선형항들을 2차경계치 문제에 대입함으로써 유도된다.

$$\phi^{(2)} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N A_i A_j [B_{ij} e^{k_i \cdot k_j \cdot z} \sin(\psi_i - \psi_j) + B_{ij}^* e^{k_i \cdot k_j \cdot z} \sin(\psi_i + \psi_j)] \tag{22}$$

$$\zeta^{(2)} = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \frac{a_i a_j}{(k_i k_j)^{1/2}} [\cos(\psi_i - \psi_j) \{2B_{ij} (\sigma_i - \sigma_j)$$

$$\begin{aligned}
& -k_i \cdot k_j - k_j k_j + \sqrt{k_i k_j (k_i + k_j)} \} + \cos(\psi_i + \psi_j) \\
& \times \{ 2B_{ij}^+ (\sigma_i + \sigma_j) - k_i \cdot k_j + k_j k_j + \sqrt{k_i k_j (k_i + k_j)} \} \\
\end{aligned} \quad (23)$$

여기서

$$B_{ij}^\pm = \frac{(\sigma_i \pm \sigma_j)(k_i \cdot k_j \mp k_j k_j)}{(\sigma_i \pm \sigma_j)^2 - g |k_i \pm k_j|} \quad (24)$$

계수  $B_{ij}^\pm$  은  $i=j$ 일때 영이므로 속도포텐셜은 간섭에 기인하는 항들만을 포함한다. 그러나 해수면상승은 성분파의 간섭항들뿐 아니라 각 성분 자체의 2배주파수에 상응하는 비선형 항들을 포함하고 있다.

### 2.3 경계치 문제의 3차해

3차경계치 문제의 지배방정식들은 다음으로 주어진다:

$$\nabla^2 \phi^{(3)} = 0, \quad -\infty < z \leq 0 \quad (25)$$

$$\begin{aligned}
& \phi_i^{(3)} + g \zeta^{(3)} + \nabla \phi^{(1)} \cdot \nabla \phi^{(2)} + \zeta^{(1)} \{ \nabla \phi^{(1)} \cdot \nabla \phi_z^{(1)} + \phi_{zz}^{(2)} \} \\
& + \zeta^{(2)} \phi_{zz}^{(1)} + \frac{1}{2} (\zeta^{(1)})^2 \phi_{zz}^{(1)} = 0 \quad \text{at } z=0 \quad (26)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \zeta_x^{(3)} - \phi_z^{(3)} + \phi_x^{(1)} \zeta_x^{(2)} + \phi_y^{(1)} \zeta_y^{(2)} + \phi_x^{(2)} \zeta_x^{(1)} + \phi_y^{(2)} \zeta_y^{(1)} \\
& + \zeta^{(1)} \{ (\phi_x^{(1)} \zeta_x^{(1)} + \phi_y^{(1)} \zeta_y^{(1)})_z - \phi_{zz}^{(2)} \} - \zeta^{(2)} \phi_{zz}^{(1)} \\
& + \frac{1}{2} (\zeta^{(1)})^2 \phi_{zz}^{(1)} \quad \text{at } z=0 \quad (27)
\end{aligned}$$

$$\lim_{z \rightarrow -\infty} \nabla \phi^{(3)} = 0 \quad (28)$$

3차경계치 문제 식 (25)~(28)에 2.1과 2.2절에서 얻어진 저차해의 결과들을 대입하여 풀면 3차 속도포텐셜이 다음처럼 얻어진다.

$$\begin{aligned}
\phi^{(3)} &= \sum_{i,j,k=1}^N [C_{i,j,k}^1 \sin(\psi_i + \psi_j + \psi_k) + C_{i,j,k}^2 \sin(\psi_j + \psi_j - \psi_k) \\
& - C_{i,j,k}^3 \sin(\psi_i - \psi_j + \psi_k) + C_{i,j,k}^4 \sin(\psi_i - \psi_j - \psi_k)] \\
&= \sum_{l=1}^N A_l^{(3)} \sin \psi_l + \sum_{i,j,k=1}^N C_{i,j,k}^1 \sin(\psi_i + \psi_j + \psi_k) \\
& + \sum_{k=1}^N \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N (C_{i,j,k}^2 + C_{i,k,j}^3 - C_{k,j,i}^4) \sin(\psi_i + \psi_j - \psi_k) \\
\end{aligned} \quad (29)$$

여기서

$$\begin{aligned}
A_l^{(3)} &= \sum_{m=1}^N [C_{l,m,m}^2 + C_{l,m,m}^3 - C_{m,m,l}^4] + (C_{m,l,m}^2 \\
& + C_{m,m,l}^3 - C_{m,l,m}^4) - (C_{l,l,l}^3 + C_{l,l,l}^3 - C_{l,l,l}^4) \quad (30)
\end{aligned}$$

이때 다방향 불규칙파는 다음의 분산식을 만족한다.

$$\begin{aligned}
\sigma_l^2 &= g k_l + \frac{1}{A_l} (\sigma_l^2 - g k_l) \left[ \sum_{m=1}^N \{ (C_{l,m,m}^2 + C_{m,l,m}^2) \right. \\
& + (C_{l,m,m}^3 + C_{m,m,l}^3) - (C_{m,m,l}^4 + C_{m,l,m}^4) \} \\
& \left. - (C_{l,l,l}^2 + C_{l,l,l}^3 - C_{l,l,l}^4) \right] \quad (31)
\end{aligned}$$

상응하는 3차 해수면상승은 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
\zeta^{(3)} &= \sum_{i,j,k=1}^N [D_{i,j,k}^1 \cos(\psi_i + \psi_j + \psi_k) + D_{i,j,k}^2 \cos(\psi_i + \psi_j - \psi_k) \\
& + D_{i,j,k}^3 \cos(\psi_i - \psi_j + \psi_k) + D_{i,j,k}^4 \cos(\psi_i - \psi_j - \psi_k)] \\
&= \sum_{i,j,k=1}^N [D_{i,j,k}^1 \cos(\psi_i + \psi_j + \psi_k) + \{ D_{i,j,k}^2 + D_{i,j,k}^3 \\
& + D_{k,j,k}^4 \} \cos(\psi_i + \psi_j - \psi_k)] \quad (32)
\end{aligned}$$

삼차해 (29)와 (32)의 계수들은 부록에 주어진다. 삼차해에서는 각 성분 자체의 비선형성에 기인하는 일차와 삼차 조화항을 포함한다. 또한 서로다른 두 파 성분 및 세 파성분들 사이의 간섭에 기인하는 항들을 포함한다.

## 3. 비선형 간섭의 영향

### 3.1 해의 수렴성

섭동법에서 해의 수렴성은 사용한 방법의 유효성을 결정하는 판단기준이 된다. 불규칙파는 파성분들의 비선형성과 파성분들 사이의 간섭에 기인하는 다양한 비선형해 성분들을 가지고 있다. 이들중 각 차수에서 가장 큰 성분의 크기를 비교함으로써 해의 수렴성을 결정할 수 있다. 특정 주파수의 파성분은 교란되지 않은 고유의 파성분과 고유성분의 변조를 유발하는 간섭에 기인하는 비선형 성분의 두성분으로 이루어져 있다. 이중 고유성분의 수렴도는 파기울기만에 비례하나, 비선형 간섭성분의 수렴도는 간섭을 일으키는 파성분들 사이의 파장비에도 관련이 있다. 따라서 파기울기가 작다고 가정할때, 특정 파성분의 수렴성은 근접한 주파수 특성을 갖는 비선형 간섭항의 수렴특성에 크게 좌우된다.

고주파 파성분(i)에 의해 간섭되어지는 저주파 파성분(j)의 해수면상승과 속도포텐셜은  $m$ 차수에서 각각  $O(\epsilon_i^m) a_i$ 와  $O(\epsilon_i^{m-1}) A_i$ 의 크기를 보여준다. 이로부터 해가 파기울기에 비례하는 수렴도를 가짐을 알 수 있다. 불규칙파의 성분중 고주파인 파성분의 수렴성은 상이한 특성을 갖는다. 예를들어  $i$ 번째 성분파의 수렴특성을 살피기 위하여, 상응하는 주파수를 갖는 불규칙파의 비선형 간섭항들을 보면 해수면상승과 속도포텐셜이 각각  $O(\epsilon_j^{m-1} \delta_{ij}^{-(m-1)}) a_i$ 와  $O(\epsilon_j^{m-1} \delta_{ij}^{-(m-1)}) A_i$ 의 크기를 갖는다. 이는 각 차수에서 비선형해가 파기울기에 비례할 뿐만 아니라,  $i$ 번째 파에 대한  $j$ 번째파의 파장비  $\delta_{ij} = k_j/k_i (< 1)$ 에 역비례함을 의미한다.  $i$ 번째 성분파에 대해  $\delta_{ij} < 1$ 을 만족하는 간섭파는 상대적으로 저주파인 파성분이므로, 장파와의 간섭에 기인하는 단파의 변조 성분은 고차항일지라도 무시될 수 없다. 따라서 장파에 의해 변조되어지는 성분파의 해수면상승과 속도포텐셜의 수렴속도는  $\epsilon \delta^{-1}$ 에 비례한다. 간섭을 일으키는 두파 파장의 차이가 매우 커서  $\delta$ 가 매우 작은 값일 때 해의 수렴도는 매우 느리게 되며, 파기울기  $\epsilon$ 의 크기에 따라서는 발산할 수 있다.

앞에서와 같은 수렴의 어려움을 해결하기 위하여 Zhang 등(1993)과 Hong(1993)은 각각 2차원과 3차원 파의 간섭을 변조파형법으로 해석하였다. 변조파형법은 장파의 간섭에 기인하는 단파의 특성 변조를 장파위상의 함수로 표현하며, 경계치 문제를 정수면이 아니라 장파의 표면에 대해 전개한다. 위의 연구자들은 변조파형법을 중복파(dual wave)의 간섭을 해석하기 위해 사용하였으며, 셋 이상의 파성분들 간의 간섭에서는 적용시 수식적 어려움이 예상되지만 기본적으로 불규칙파의 해석에 확장될 수 있다.

### 3.2 파랑특성의 변조

파성분들 사이의 간섭은 성분파들과는 특성을 달리하는 새로운 파랑성분을 유발하며, 한편으로 각 성분파들의 특성을 변화시킨다. 불규칙파를 구성하는  $N$ 개의 파성분 중에서  $i$ 번째 파성분은  $(N-1)$ 개의 다른 파성분에 의해 간섭되어진다. 이중  $i$ 번째 파성분의 주파수와 비슷한 주파수를 갖는 파성분에 기인하는 간섭항은 두성분파와 전혀다른 파랑특성을 갖는다. 일례로  $i$ 번째 파와 그보다 파장이 짧은  $j$ 번째 파(즉,  $i > j$ ;  $k_i < k_j$ ;  $\sigma_i < \sigma_j$ ) 사이의 간섭을 생각하자.

2차해에서 이들사이의 간섭은 합주파수(sum frequency)와 차주파수(difference frequency)의 간섭파를 유발한다. 이때 두 성분파의 주파수 크기가 유사하면 합주파수는 성분파 주파수의 두배 가량의 고주파가 되며, 차주파수는 성분파에 비해 상당히 저주파가 된다. 따라서 이때의 간섭파는 두 성분파와는 상이한 파랑특성을 갖는다. 한편  $i$ 번째 파에 대한  $j$ 번째 파의 파장의 비가 매우 작을 때에는 합주파수와 차주파수의 크기는  $i$ 번째 파의 주파수 크기에 근접한다. 따라서 이때의 간섭파는  $i$ 번째 파와 유사한 특성을 가지며,  $i$ 번째 파와 간섭파들의 중첩으로 이루어지는 파는 이차 간섭에 기인하는  $i$ 번째 파의 변조로 해석될 수 있다. 결과적으로 파의 비선형 간섭은 성분파의 특성파는 현저히 다른 고주파와 저주파의 파랑성분을 발생시키며, 한편으로 각 성분파의 파랑특성을 변조시킨다.

서로 크게 다른 파성분들 사이의 간섭에 기인하는 파의 변조특성은 특정 파주파수의 일차해와 이차해의 합으로부터 얻어질 수 있다.

$$\begin{aligned} \zeta_i &= \zeta_i^{(1)} + \zeta_i^{(2)} \\ &= a_i \cos \psi_i + a_j M_{ij}^- \cos(\psi_i - \psi_j) + a_j M_{ij}^+ \cos(\psi_i + \psi_j) \\ &= a_i \{1 + a_j (M_{ij}^- + M_{ij}^+) \cos \psi_j\} \cos(\psi_i - \Pi) + O(\epsilon_j^2) a_i \\ &\equiv \tilde{a}_i \cos \tilde{\psi}_i \equiv \tilde{a}_i \cos(\tilde{k}_i x + \tilde{k}_i y + \tilde{\sigma}_i t - \tilde{\theta}_i) + O(\epsilon_j^2) a_i \end{aligned} \quad (33)$$

여기서

$$\begin{aligned} M_{ij}^- &= \frac{k_i k_j + k_i \cdot k_j}{\sqrt{k_i k_j}} \left\{ -\frac{1}{2} + \frac{(\sigma_i - \sigma_j)^2}{(\sigma_i - \sigma_j)^2 - g|k_i - k_j|} \right\} \\ &\quad + \frac{1}{2}(k_i + k_j), \\ M_{ij}^+ &= \frac{k_i k_j - k_i \cdot k_j}{\sqrt{k_i k_j}} \left\{ \frac{1}{2} - \frac{(\sigma_i + \sigma_j)^2}{(\sigma_i + \sigma_j)^2 - g|k_i + k_j|} \right\} \\ &\quad + \frac{1}{2}(k_i + k_j) \end{aligned}$$

$$\Pi = \tan^{-1} \{ a_j (M_{ij}^- - M_{ij}^+) \sin \psi_j \}. \quad (34)$$

윗식에서 “~”는 상응하는 변수들의 간섭에 기인하여 변조되어진 값을 의미하며,  $\zeta_i^{(2)}$ 는 2차 해수면상승중  $i$ 번째와  $j$ 번째 파의 간섭에 기인하는 간섭파 성분을 나타낸다.  $\delta_{ij}$ 는 두파가 서로 크게 다를때 미소 값이므로 식 (34)는  $\delta_{ij}$ 에 대해 전개함으로서 근사될 수

있다. 따라서 장파에 의해 변조되어진 단파의 파랑 특성은 처음 둘째항까지만 고려할때 다음처럼 주어진다.

$$\tilde{\psi}_i = \psi_i + a_j k_j \sin \psi_j \left( \cos \beta_{ij} - \frac{1}{2} \delta_{ij}^{1/2} \sin^2 \beta_{ij} \right) + O(\delta_{ij}) a_j k_j \quad (35)$$

$$\tilde{a}_i = a_i \left[ 1 + \frac{1}{4} \varepsilon_j \cos \psi_j \{ 3 + \cos^2 \beta_{ij} + \delta_{ij}^{1/2} (\cos \beta_{ij} - \cos^3 \beta_{ij}) \} \right] + O(\varepsilon_j \delta_{ij}) a_i \quad (36)$$

$$\tilde{k}_{xi} = k_{xi} + \varepsilon_j k_j \cos \beta_j \cos \psi_j \left( \cos \beta_{ij} - \frac{1}{2} \delta_{ij}^{1/2} \sin^2 \beta_{ij} \right) + O(\varepsilon_j \delta_{ij}) k_i \quad (37)$$

$$\tilde{k}_{yi} = k_{yi} + \varepsilon_j k_j \cos \beta_j \cos \psi_j \left( \cos \beta_{ij} - \frac{1}{2} \delta_{ij}^{1/2} \sin^2 \beta_{ij} \right) + O(\varepsilon_j \delta_{ij}) k_i \quad (38)$$

$$\tilde{\sigma}_i = \sigma_i - a_j k_j \sigma_j \cos \psi_j \left( \cos \beta_{ij} - \frac{1}{2} \delta_{ij}^{1/2} \sin^2 \beta_{ij} \right) + O(\delta_{ij}) a_j k_j \sigma_j \quad (39)$$

$$\tilde{\theta}_i = \theta_i + a_j k_j \sin \theta_j \left( \cos \beta_{ij} - \frac{1}{2} \delta_{ij}^{1/2} \sin^2 \beta_{ij} \right) + O(\delta_{ij}) a_j k_j \quad (40)$$

여기서  $\beta_{ij} = \beta_i - \beta_j$ .

파진폭과 파수의 변조의 크기는  $O(\varepsilon_j)$ 에 비례하며, 파장비가 작을수록 수렴하는 값을 얻기에 용이하다. 그러나 파주파수와 초기위상 변조는  $O(\varepsilon_j \delta_{ij}^{-1})$ 의 크기를 가지며, 이에 기인하여 위상의 변조 또한 동일한 크기를 갖는다. 파장비가 파기울기 보다 작을때 이들 변조값은 선형값보다 커진다. 이것은 변조가 실제 매우 커서라기 보다는, 사용한 섭동법이 서로 크게 다른 파성분들 사이의 간섭시 파주파수의 변조를 해석하기에 부적합하기 때문이다. 불규칙파의 해석에서 각 파성분의 초기위상 값의 크기는 불규칙파의 물리적 해석에서 중요치 않으나 파주파수의 크기는 해의 주요 특성이므로 정확한 계산이 필수적이다. 해수면상승과 속도포텐셜의 수렴속도가  $O(\varepsilon_j \delta_{ij}^{-1})$ 임에 주목하면, 장파에 의해 변조되는 단파의 비선형해가 발산하는 경향을 보이는 이유는 파주파수의 부정확한 표현에 기

인함을 알 수 있다.

앞에서 논의한 것처럼 서로 비슷한 크기의 주파수를 갖는 파성분 사이의 간섭은 간섭을 일으키는 두 파성분과 전혀다른 특성의 간섭파를 유발한다. 그러나 이들 간섭파의 합주파수 또는 차주파수에 상응하는 불규칙파의 일차해 성분이 존재할 수 있다. 이때 1차해 성분의 특성은 상응하는 합주파수 또는 차주파수에 의해 변조되어지며, 위에서 다루어진 서로 크게 다른 파성분간의 간섭에 기인하는 단파 성분의 변조에서와 유사한 과정에 의해 변조특성이 해석될 수 있다. 한편 이차 해수면상승은 2차조화 성분을 포함하며, 따라서 이차조화 주파수에 상응하는 일차해 성분의 변조를 유발한다. 그러므로 불규칙파를 구성하는 각각의 파성분은 고유의 선형해, 상대적으로 매우 장파인 파성분에 의한 변조, 비교적 장파인 두 파의 합주파수에 상응하는 간섭파에 의한 변조 및 선형해의 주파수에 근접하는 차주파수에 상응하는 간섭파에 의한 변조, 그리고 절반의 주파수를 갖는 파의 2차조화 성분에 의한 변조 등이 결합된 결과이다. 3차해에서는 이들 뿐아니라 각 성분 자체의 고유 비선형해 및 3차 간섭파에 기인하는 변조가 추가되어진다. 이들 3차해에 의한 각 고유 성분파의 변조는 기본적으로 이차해들에 의한 변조해석과 유사한 방법으로 다루어질 수 있다.

#### 4. 수치계산 및 해석

이론해가 갖는 수렴특성과 파들사이의 비선형간섭에 기인하는 해양파의 변조특성을 살피기 위하여 Table 1에 주어진 다성분파에 대하여 계산이 수행되었다. 계산에서는 4개의 성분으로 이루어진 불규칙파를 가정하였으나, 일반적으로 무한대의 성분파의 합으로 표현되는 실해역 불규칙파의 계산에 어려움없이 확장될 수 있다. case 1, 2, 3는 성분파들이 각각 0.2, 0.1, 0.1의 파기울기를 갖는 다방향파의 경우이다. 파기울기와 더불어 해의 수렴성에 결정적 영향을 끼치는 파성분들 사이의 파장비  $\delta$ 는 case 1과 case 2에서는 0.1과 0.5사이의 값을 가지며, case 3에서는 0.05과 0.5사이의 값을 갖는다. 모든 계산에서 파의 초기위상 값들은 편의상 0으로 가정하였으며, 시간변수  $t$ 에도 0이 대입되었다.

방향성을 갖는 파들사이의 간섭에 기인하는 합성

Table 1. The combination of four component waves for numerical calculation

	wave 1			wave 2		wave 3				wave 4		
	$\epsilon_1$	$a_1$	$\beta_1$	$\epsilon_2$	$a_2$	$\beta_2$	$\epsilon_3$	$a_3$	$\beta_3$	$\epsilon_4$	$a_4$	$\beta_4$
case 1	0.2	0.1	0.0	0.2	0.05	30.0	0.2	0.02	60.0	0.2	0.01	90.0
case 2	0.1	0.1	0.0	0.1	0.05	30.0	0.1	0.02	60.0	0.1	0.01	90.0
case 3	0.1	0.2	0.0	0.1	0.1	30.0	0.1	0.02	60.0	0.1	0.01	90.0

(unit:  $a[m]$  and  $\beta[\text{beta}]$ )

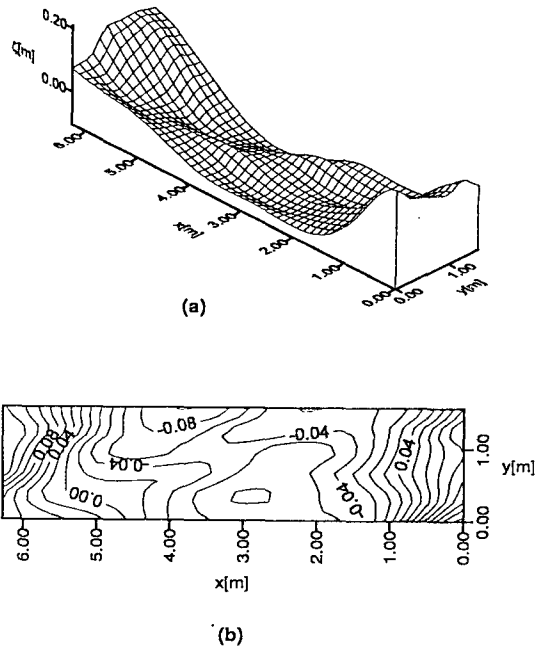


Fig. 1. The interaction of four component waves corresponding to case 2 of Table 1: (a) wave elevation and (b) its contour.

파의 해수면상승과 상응하는 등고선의 형상이 case 2의 경우에 대하여 Fig. 1의 (a)와 (b)에 주어진다. 계산은  $x$ 방향에 대해서는 최장파의 한파장에 해당하는 길이만큼 그리고  $y$ 방향에 대해서는 파장의  $y$ 방향 성분중 최대치에 해당하는 길이만큼의 영역에서 각각 수행되었다. 이 영역내에서 해수면 상승의 최대값은 0.210 m이고 최소값은 -0.102 m이다. 최대값이 발생하는 원점에서 선형해의 합이 0.180 m이고, 각각의 파성분들 자체의 비선형성에 기인하는 비선형해의 합이 0.009 m임을 고려할때, 서로다른 파성분들사이의 비선형 간섭에 기인하는 해수면상승은 0.021 m에 이른다.

Fig. 2의 (a)~(d)에는 case 1의 합성파에 대하여,

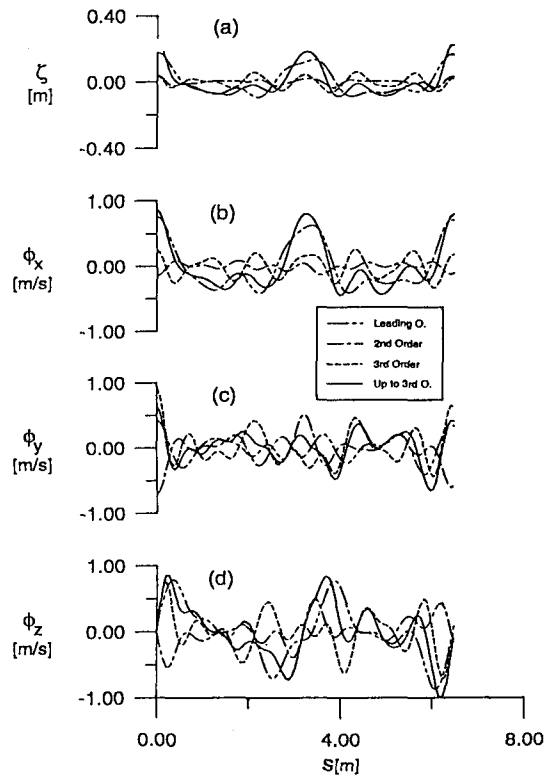


Fig. 2. Wave elevation and velocities along a line crossing the origin with  $\beta=14^\circ$ , for four component waves corresponding to case 1 of Table 1: (a) elevation (b), (c) and (d) x-, y- and z-directional velocity, respectively.

원점을 지나면서 양의  $x$ 축에 대해  $14^\circ$ 의 경사각을 갖는 직선을 따라서 해수면상승과 수평( $x$ 와  $y$ )과 수직방향의 유체입자의 속도가 계산되어진다. 여기서  $s$ 는 원점에서부터 직선위의 점까지의 거리를 나타낸다. 한편 Fig. 3의 (a)-(d)에는 case 2의 합성파에 대하여 Fig. 2의 (a)-(d)에 각각 상응하는 파특성치들이 주어진다. 파기울기가 상대적으로 작은 Fig. 2의 값들이 Fig. 3의 결과들에 비하여 좋은 수렴특성을 가짐을

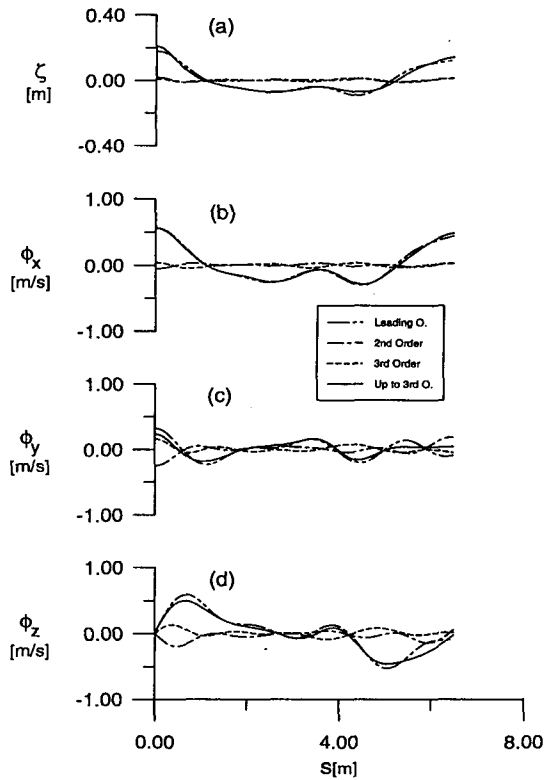


Fig. 3. The same as Fig. 2 except for waves of case 2.

알 수 있다. 동일한 파기울기를 가정할 때 장파에 기인하는 해수면 상승이나 유체입자의 속도가 단파의 상응하는 특성값들에 비해 상대적으로 크므로, 합성파의 수렴특성은 장파의 수렴특성에 좌우된다. 한편 장파에 의한 단파의 변조는 2차해에서 처음으로 나타나지만, 단파에 의한 장파의 변조는 3차해에서 처음으로 시작된다(Hong, 1993) 그러므로 장파의 수렴특성은 2차해까지는 장파의 기울기에만 좌우되며, 3차해에서 비로서 서로다른 파들의 간섭에 기인하는 비선형해의 영향, 즉 파장비  $\delta$ 의 영향을 받는다. Fig. 2에서 3차항이 2차항 보다 큰 값을 갖는 것이 이러한 이유 때문이다. Fig. 3에서 2차와 3차항의 크기가 근접하는 것은 파기울기에 대한 파장비  $\delta$ 의 비가 Fig. 3에서 상대적으로 작으므로 3차항에서 나타나는 간섭파의 영향이 작기 때문이다.

합성파의 성분중 특정 주파수 파의 변조를 살펴보기 위한 시도가 Figs. 4~5에 주어진다. 해양구조물의 공진현상 해석이나 위성관측등에 사용되는 초단파의 특성을 파악하기 위해서는 합성파의 성분중 특정주

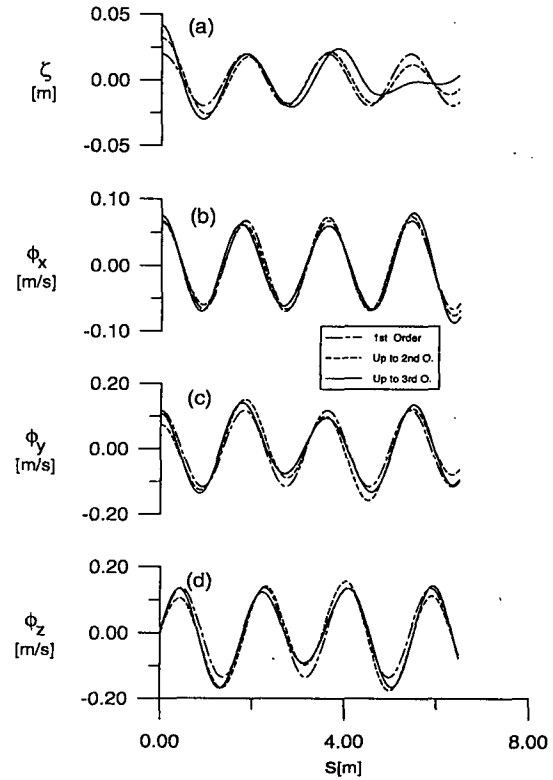


Fig. 4. Wave elevation and velocities of the 3rd wave component in case 2 of Table 1 along a line crossing the origin with  $\beta=14^\circ$ : (a) elevation (b), (c) and (d) x-, y- and z-directional velocity, respectively.

파수 파의 간섭에 기인하는 변조를 정확히 이해해야 한다. Fig. 4와 Fig. 5는 각각 case 2와 case 3의 합성파에서 셋째 파랑성분의 선형 주파수에 해당하는 파랑성분만을 추출하여 변조성분의 크기를 계산하였다. 셋째 파랑성분은 보다 장파인 첫째와 둘째 파랑성분들에 기인하는 비선형간섭 항들이 2차해에서 존재하므로, 파장비에 역비례하는 수렴특성을 나타낸다. 두 경우 모두에서 파랑성분들의 파기울기는 동일하며 셋째 파랑성분의 파장 또한 같다. 그럼에도 Fig. 4에 비해 Fig. 5의 수렴속도가 느린 것은 case 2에 비해 case 3의 장파 성분들의 파장이 길기 때문에 셋째 파랑성분에 대한 장파들의 간섭효과가 case 3에서 크게 나타나기 때문이다. 선형해의 크기를 고려할 때, Fig. 5에서는 장파의 존재에 기인하는 변조가 무시할 수 없는 크기임을 알 수 있다.

선형파형법에 기초한 섭동법으로 다성분파의 간섭을 해석할 때, 해의 수렴성을 보장하기 위해서는  $\delta \ll 1$



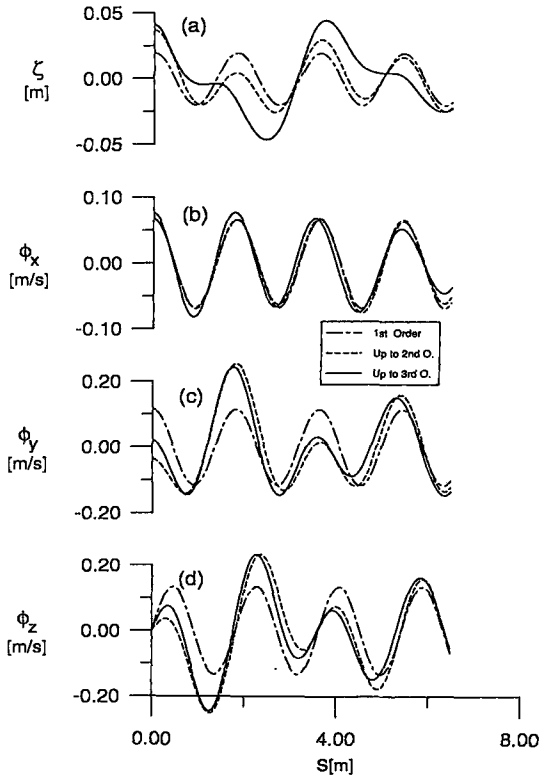


Fig. 5. The same is Fig. 4 except for waves of case 3.

일때  $\epsilon \ll (m-1)\delta$ 의 조건을 만족하여야 한다(Zhang 등, 1993). 실험역의 다방향 불규칙 파는 무한대의 파랑성분들로 이루어져 있으며, 인접한 파성분들 사이의 파장비  $\delta$ 는 단위값에 근접하여 수렴조건을 쉽게 만족한다. 그러나 주파수 영역 양끝단의 서로 크게 다른 파랑성분들 사이의 파장비는 매우 작은값이므로 위의 수렴조건을 만족하기 어렵다. 그러므로 일반적으로 선형파형법은 광대역(broad band) 스펙트럼 특성을 갖는 불규칙파의 해석에는 사용될 수 없다. 그러나 광대역 특성의 불규칙파라 할지라도 저주파 영역의 파성분 특성을 해석하기 위한 목적으로는 유효하게 사용될 수 있다. 고주파 성분에 의한 저주파 성분의 변조는 파기울기에 비례하는 수렴속도를 갖기 때문이다. 저주파 영역 성분파의 파고가 매우 작아서 파기울기가 위의 수렴조건을 만족하는 경우에도 선형파형법은 광대역 불규칙파의 해석에 사용될 수 있다.

5. 결 론

실험역 파의 특성인 방향성과 불규칙성을 갖는 일반적인 심해 해양파의 이론적 해석이 시도되었다. 선형파형법에 기초한 섭동법이 사용되었으며, 3차까지의 이론해가 유도되었다. 파성분들 사이의 비선형 간섭이 해의 수렴성에 미치는 영향이 논의되었으며, 비선형 간섭에 기인하는 파랑특성의 변조가 고찰되었다.

이론해의 고찰과 수치계산을 통한 검증을 통하여, 다음의 결론들이 도출되었다. 첫째, 불규칙파를 구성하는 각각의 파성분은 고유의 선형해, 상대적으로 매우 장파인 파성분에 의한 변조, 비교적 장파인 파들의 합성파에 의한 변조, 고유 선형해의 주파수에 근접하는 차주파수를 갖는 합성파 및 고유의 고차 조화해에 의한 변조등이 결합된 결과이다. 둘째, 단파에 의한 장파의 간섭을 나타내는 비선형해의 크기는 파기울기에 비례하지만, 장파에 의한 단파의 간섭을 나타내는 비선형해는 파기울기뿐 아니라 파장비(단파 파장에 대한 장파 파장의 비)에 역비례한다. 셋째, 선형파형법은 광대역 스펙트럼 특성을 갖는 불규칙파의 해석에는 사용될 수 없다. 그러나 광대역 특성의 불규칙파라 할지라도 저주파 영역의 파성분 특성 해석이나 파기울기에 비해 파장비가 작은 경우에는 사용될 수 있다. 넷째, 장파에 의한 단파의 변조를 선형파형법으로 해석할때 발생하는 섭동해의 발산은 선형파형법이 파주파수의 변조를 적절히 나타내지 못하기 때문이다.

謝 辭

본 논문은 과학기술처의 1994년도 기본연구사업으로 수행한 “방향성을 고려한 심해 불규칙파의 비선형 해석” 과제의 결과중 일부이다.

참고문헌

Bretherton, T.P. and Garrett, C.J.R., 1968. Wavetrains in inhomogeneous moving media, *Proc. Roy. Soc. London*, A **302**, pp. 529-554.  
 Cokelet, E.D., 1977. Steep gravity waves in water of arbitrary uniform depth, *Phil. Trans. Roy. Soc. London A* **286**, pp. 183-230.  
 Hong, K., 1993. Nonlinear interactions between directional dual component waves in deep water, Ph.D. dissertation, Texas A&M University.

- Longuet-Higgins, M.S., 1963. The effect of non-linearities on statistical distributions in the theory of sea waves, *J. Fluid Mech.* **17**, pp. 459-480.
- Longuet-Higgins, M.S., 1987. The propagation of short surface waves on longer gravity waves, *J. Fluid Mech.*, **177**, pp. 293-306.
- Longuet-Higgins, M.S. and Cokelet, E.D., 1976. The deformation of steep surface waves on water, I. A numerical method of computation, *Proc. Roy. Soc. London*, **A 350**, pp. 1-26.
- Longuet-Higgins, M.S. and Stewart, R.W., 1960. Changes in the form of short gravity waves on long waves and tidal currents, *J. Fluid Mech.*, **8**, pp. 565-583.
- Miller, S.J., Shemdin, O.H. and Longuet-Higgins, M.S., 1991. Laboratory measurements of modulation of short-wave slopes by long waves, *J. Fluid Mech.*, **233**, pp. 389-404.
- Phillips, O.M., 1981. The dispersion of short wavelets in presence of a dominant long wave, *J. Fluid Mech.*, **107**, pp. 465-485.
- Schwartz, L.W., 1974. Computer extension and analytic continuation of Stokes' expansion for gravity waves, *J. Fluid Mech.*, **62**, pp. 553-578.
- Unna, P.J.H., 1941. White horses, *Nature, London*, **148**, pp. 226-227.
- Unna, P.J.H., 1942. Waves and tidal streams, *Nature, London*, **149**, pp. 2219-220.
- Zhang, J., Hong, K. and Yue, D.K.P., 1992. Effects of wavelength ratio on wave-mode modelling, *J. Fluid Mech.*, **248**, pp. 107-127.

### 부록 : 삼차해의 계수

$$C_{i,j,k}^1 = \frac{1}{8} \frac{A_i A_j A_k e^{|k_i + k_j + k_k|z}}{(\sigma_i + \sigma_j + \sigma_k)^2 - g|k_i + k_j + k_k|} \\ \times [4B_{ij}^+ (\sigma_i + \sigma_j + \sigma_k) \{k_k \cdot (k_i + k_j) - k_k |k_{ij}^+|\} \\ - (k_i \cdot k_j - k_i k_j) \{k_k \cdot (k_i + k_j) - k_k (k_i + k_j)\} \\ + 2(k_i \cdot k_j - k_i k_j)(k_k / \sigma_k) \{2(k_i + k_j)\sigma_i \\ - (\sigma_i + \sigma_j) |k_{ij}^+|\}],$$

$$C_{i,j,k}^2 = \frac{1}{8} \frac{A_i A_j A_k e^{|k_i + k_j - k_k|z}}{(\sigma_i + \sigma_j - \sigma_k)^2 - g|k_i + k_j - k_k|} \\ \times [4B_{ij}^+ (\sigma_i + \sigma_j - \sigma_k) \{k_k \cdot (k_i + k_j) + k_k |k_{ij}^+|\} \\ - (k_i \cdot k_j - k_i k_j) \{k_k \cdot (k_i + k_j) + k_k (k_i + k_j)\} \\ + 2(k_i \cdot k_j - k_i k_j)(k_k / \sigma_k) \{2(k_i + k_j)\sigma_i \\ - (\sigma_i + \sigma_j) |k_{ij}^+|\}],$$

$$C_{i,j,k}^3 = \frac{1}{8} \frac{A_i A_j A_k e^{|k_i + k_j - k_k|z}}{(\sigma_i + \sigma_j - \sigma_k)^2 - g|k_i + k_j - k_k|} \\ \times [4B_{ij}^- (\sigma_i - \sigma_j + \sigma_k) \{k_k \cdot (k_i - k_j) - k_k |k_{ij}^-|\} \\ - (k_i \cdot k_j + k_i k_j) \{k_k \cdot (k_i - k_j) - k_k (k_i + k_j)\}]$$

$$+ 2(k_i \cdot k_j + k_i k_j)(k_k / \sigma_k) \{2(k_i + k_j)\sigma_i \\ - (\sigma_i - \sigma_j) |k_{ij}^+|\}],$$

$$C_{i,j,k}^4 = \frac{1}{8} \frac{A_i A_j A_k e^{k_i - k_j - k_k z}}{(\sigma_i - \sigma_j - \sigma_k)^2 - g|k_i - k_j - k_k|} \\ \times [4B_{ij}^- (\sigma_i - \sigma_j - \sigma_k) \{k_k \cdot (k_i - k_j) + k_k |k_{ij}^-|\} \\ - (k_i \cdot k_j + k_i k_j) \{k_k \cdot (k_i - k_j) + k_k (k_i + k_j)\} \\ + 2(k_i \cdot k_j + k_i k_j)(k_k / \sigma_k) \{2(k_i + k_j)\sigma_i \\ - (\sigma_i - \sigma_j) |k_{ij}^+|\}],$$

$$D_{i,j,k}^1 = C_{i,j,k}^{10} \frac{\sigma_i + \sigma_j + \sigma_k}{g} + \frac{1}{8} \frac{a_i a_j a_k}{\sqrt{k_i k_j}} \\ [2B_{ij}^+ \{|k_{ij}^+|(\sigma_i + \sigma_j + \sigma_k) \\ - \frac{\sigma_k}{k_k} k_k \cdot (k_i + k_j)\} + 2B_{ij}^+ k_k (\sigma_i + \sigma_j) \\ - (k_i \cdot k_j - k_i k_j)(2k_i + k_k) + k_k \sqrt{k_i k_j} \\ (k_i + k_j + k_k)],$$

$$D_{i,j,k}^2 = C_{i,j,k}^{20} \frac{\sigma_i + \sigma_j - \sigma_k}{g} + \frac{1}{8} \frac{a_i a_j a_k}{\sqrt{k_i k_j}} \\ [2B_{ij}^+ \{|k_{ij}^+|(\sigma_i + \sigma_j - \sigma_k) \\ - \frac{\sigma_k}{k_k} k_k \cdot (k_i + k_j)\} + 2B_{ij}^+ k_k (\sigma_i + \sigma_j) \\ - (k_i \cdot k_j - k_i k_j)(2k_i + k_k) + k_k \sqrt{k_i k_j} \\ (k_i + k_j + k_k)],$$

$$D_{i,j,k}^3 = C_{i,j,k}^{30} \frac{\sigma_i - \sigma_j + \sigma_k}{g} + \frac{1}{8} \frac{a_i a_j a_k}{\sqrt{k_i k_j}} \\ [2B_{ij}^- \{|k_{ij}^-|(\sigma_i - \sigma_j + \sigma_k) \\ - \frac{\sigma_k}{k_k} k_k \cdot (k_i - k_j)\} + 2B_{ij}^- k_k (\sigma_i - \sigma_j) \\ - (k_i \cdot k_j + k_i k_j)(2k_i + k_k) + k_k \sqrt{k_i k_j} \\ (k_i + k_j + k_k)],$$

$$D_{i,j,k}^4 = C_{i,j,k}^{40} \frac{\sigma_i - \sigma_j - \sigma_k}{g} + \frac{1}{8} \frac{a_i a_j a_k}{\sqrt{k_i k_j}} \\ [2B_{ij}^- \{|k_{ij}^-|(\sigma_i - \sigma_j - \sigma_k) \\ - \frac{\sigma_k}{k_k} k_k \cdot (k_i - k_j)\} + 2B_{ij}^- k_k (\sigma_i - \sigma_j) \\ - (k_i \cdot k_j + k_i k_j)(2k_i + k_k) + k_k \sqrt{k_i k_j} \\ (k_i + k_j + k_k)].$$