

非線形 Galerkin-FEM 模型 開發 A Three-Dimensional Nonlinear Galerkin-FEM Model

姜官秀* · 鄭景太* · 鮮于仲皓**

Kwan Soo Kang*, Kyung Tae Jung* and Jung Ho Sonu**

要 旨: 본 논문은姜等(1994)에 의해 개발된 線形 Galerkin-FEM 模型에 移送項을 추가하여 非線形 Galerkin-FEM 數值模型을 개발하는데 목적이 있다. 移送項의 數值計算은 기존 線形모형의 각 절점별 유속결과를 이용하여 계산하였으며 개발된 모형은 기존의 非線形模型(Owen, 1980; Davies, 1980)보다 수치계산시간의 절약을 도모할 수 있어 효율적이다(Lardner and Song, 1992). 非線形項의 效果를 검토하기 위하여 두가지 數值實驗을 수행하였다. 수행한 수치실험은 長方形 領域에서의 吹送流實驗과 一定流速이 개방경계에서 주어지고 모형영역 중간에 導流堤가 있는 경우에 渦流形成에 대한 수치실험을 수행하였다. 數值實驗 결과 吹送流實驗의 경우 移送項에 의한 非線形 效果가 적었으며 渦流形成 實驗인 경우 移送項에 의한 非線形 效果가 크게 나타났고 Stelling(1984)의 研究 結果와 유사하게 재현되었다.

Abstract | This paper as a sequel to Kang *et al.* (1994) describes the development of a three-dimensional nonlinear Galerkin-FEM model. Nonlinear advective terms have been incorporated in a manner used by Lardner and Song (1992), that is, using velocities at given nodes computed with linear Galerkin-FEM model. The proposed model is computationally more efficient than previous nonlinear Galerkin models developed by Owen (1980) and Davies (1980) because the model uses a linear shape function as a basis and, furthermore, the similarity transform technique developed by Kang (1994). Two experiments have been carried out to examine effects of nonlinear terms. One is an experiment of wind-driven current in a rectangular basin (Heaps' basin) and the other is an experiment concerning eddy generation behind a jetty with specified downstream and upstream open boundary conditions. The computed pattern was found to be in good agreement qualitatively with previous model experiments by Stelling (1984).

1. 緒 論

本 論文은 姜等(1994)의 후속 연구로써 移送項을 비롯한 非線形項들을 포함한 3차원 Galerkin-FEM 模型을 개발하고 각 비선형항들의 效果를 검토하는데 목적이 있다. 기존의 Galerkin 模型은 대부분 線形模型으로서 비선형항은 해저마찰력에 국한되었으며 모는 이류항을 포함하는 비선형모형으로의 확장시도는 제한적이다(Davies, 1980; Owen, 1980; Lardner and Song, 1992; 崔, 1994). 일반적으로 Galerkin 模型의 적용시 移送項을 포함하여 수치계산을 수행하는 경우 계산시간의 증가는 심각하여 Galerkin 모형의 가장

큰 단점으로 부각된다(Lardner and Song, 1992). 이 문제를 극복하기 위한 일환으로 시간분할방법을 사용하거나 移送項 계산시에 線形보간함수를 기저함수로 사용하는 FEM기법 도입이 시도된 바 있다(Davies, 1980; Lardner and Song, 1992).

본 연구에서는 姜等(1994)이 개발한 바 있는 類似變換技法 利用 Galerkin-FEM 모형에 비선형항을 추가한 비선형 Galerkin-FEM 모형을 개발한다. 類似變換技法을 사용할 경우 흔히 구조해석 분야에서 모우드 shape로 불리우는 고유벡터 行列의 계수를 결정하는 비연계된 초기 및 경계치문제(initial and boundary value problem)로 간략화되어 물리적 이해

*한국해양연구소 해양공학연구부 (Ocean Engineering Division, Korea Ocean Research and Development Institute, Ansan P.O. Box 29, Seoul 425-600, Korea)

**서울대학교 공과대학 토목공학과 (Department of Civil Eng., Seoul National University, Seoul 151-742, Korea)

및 장애성 세고를 도모할 수 있다. 線形補間函數를 기저함수로 사용할 경우 Galerkin 해는 3중 대각행렬을 포함하는 行列方程式 형태로 주어지며 각 절점의 유속값을 구하기 위해서는 잘 알려진 Thomas algorithm을 이용하거나 여타의 방법을 사용하여 역행렬을 구하고 行列方程式을 푸는 行列計算이 요구된다. 그러나 類似變換技法을 적용할 경우 逆行列 계산이 불필요하고 비연계된 방정식의 해를 해석적으로 구할 수 있다. 또한 주된 모우드 shape만 사용하여도 해에 수렴하여 계산시간이 절약된다. 개발한 非線形 Galerkin-FEM 模型은 移送項을 포함한 비선형항에 類似變換技法 적용이 가능하여 계산시간이 절약된다(姜, 1994). Lardner와 Song(1992), 최(1994)의 연구와의 차이점은 Lardner와 Song(1992), 최(1994)는 기저함수로 고유함수, Legendre 다항식함수를 사용하고 移送項의 수치계산시 FEM 기법이 도입되지만 본 연구에서는 기저함수로 線形補間函數를 사용하고 유사 변환기법을 사용한다는 점이다.

非線形項의 效果를 검토하기 위하여 두가지 數值實驗을 수행하였다. 먼저 기존의 Davies와 Owen(1979), 姜等(1994)의 연구와 동일한 조건(Heaps' basin)에 대해 취송류 수치실험을 수행, 비교하였다. 두번째는 渦流形成에 대한 移送項 效果 검토에 초점을 둔 실험으로 모형영역 중간에 導流提가 있고 開放境界에서 일정 유속과 해수위가 주어질 경우에 대하여 수치실험을 수행하였다. 주어진 수치실험 조건은 Stelling(1984)이 2차원모형을 이용하여 非線形 效果에 대한 수치실험을 수행한 조건과 같으며 실험결과를 비교, 검토하였다.

2. 3次元 流體運動方程式 및 鉛直函數 展開技法에 의한 解

2.1 鉛直變換 座標系下的 基本方程式

靜水壓條件 및 等海水密度를 가정하고 불규칙한 水深 領域에서 適用을 용이하게 하기 위하여 다음의 變換이 도입된다.

$$\sigma = (a-b) \frac{z+\xi}{h+\xi} + b \quad (1)$$

식 (1)의 σ 變換을 도입하여 변환된 基本方程式은 다음과 같다(자세한 유도과정은 姜(1994) 참조).

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{(h+\xi)}{(a-b)} \int_b^a u d\alpha \right\} + \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \frac{(h+\xi)}{(a-b)} \int_b^a v d\sigma \right\} = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w^* \frac{\partial u}{\partial \sigma} - \gamma v = -g \frac{\partial \xi}{\partial x} \left(\frac{a-b}{h+\xi} \right)^2 \frac{\partial}{\partial \sigma} \left(N \frac{\partial u}{\partial \sigma} \right) + A_H \nabla^2 u \quad (3)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w^* \frac{\partial v}{\partial \sigma} + \gamma u = -g \frac{\partial \xi}{\partial x} \left(\frac{a-b}{h+\xi} \right)^2 \frac{\partial}{\partial \sigma} \left(N \frac{\partial v}{\partial \sigma} \right) + A_H \nabla^2 v \quad (4)$$

여기서, x, y : 平面上의 東向, 北向 直交座標系,
 σ : 平均海面下的 垂直座標,
 t : 時間,
 ξ : 平均海面上的 海水位,
 u, v : 水深 z 에서의 x, y 方向 流速 成分,
 r : Coriolis 係數,
 g : 重力加速度

式 (3), (4)에서 $\nabla^2 u, \nabla^2 v$ 는 변환된 x, y 方向 水深 擴散項으로 미분항의 곱을 무시하면 다음과 같다.

$$\nabla^2 u \cong \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (5)$$

$$\nabla^2 v \cong \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right) \quad (6)$$

여기에서, w^* 는 σ 變換 座標系下에서의 鉛直 流速成分으로 다음과 같이 표현되며,

$$w^* = \frac{1}{h+\xi} \left\{ \frac{\partial \xi}{\partial t} (a-\sigma) \right\} + \frac{1}{h+\xi} \frac{\partial}{\partial x}$$

$$\left\{ (h+\xi) \int_b^a u d\sigma \right\} + \frac{1}{h+\xi} \frac{\partial}{\partial y} \left\{ (h+\xi) \int_b^a v d\sigma \right\} \quad (7)$$

海水面과 海底面에서의 境界條件은 다음과 같다.

$$-\left(\frac{a-b}{h+\xi} \right) \left(\rho N \frac{\partial u}{\partial \sigma} \right)_s = F_s; \quad -\left(\frac{a-b}{h+\xi} \right) \left(\rho N \frac{\partial v}{\partial \sigma} \right)_s = G_s \quad (8)$$

$$-\left(\frac{a-b}{h+\xi}\right)\left(\rho N \frac{\partial u}{\partial \sigma}\right)_B = F_B; \quad -\left(\frac{a-b}{h+\xi}\right)\left(\rho N \frac{\partial v}{\partial \sigma}\right)_B = G_B. \quad (9)$$

여기서 아래첨자 S, B 는 해수면과 해저면을 표시하며 ρ 는 해수밀도이다.鉛直變換常數 a, b 는線形補間函數를基底函數로 사용할 때 $a=1, b=0$ 로 정의된다.

2.2 線形補間函數를 사용한 Galerkin解(Galerkin-FEM model)

2.2.1. Galerkin 技法의 適用

基底函數로 일부 구간에서만 정의되는線形補間函數를 사용할 경우 수치계산이 간편하며 최종 Galerkin解도 3重對角行列(tri-diagonal matrix)로 구성되는 간단한行列方程式이 구성된다.基底函數로線形補間函數를 사용하였을 경우의 Galerkin 解法은基底函數로 연속함수를 사용한 경우와 유사하며各要素별로 먼저 계산한 다음 조합(assemble)하는 과정이 추가될 뿐더러 최종적으로 나타나는行列方程式의 형태는 어떤 기저함수를 사용하더라도 결과는 같다.따라서 이 절에서는基底函數로線形補間函數를 사용하였을 경우 한 요소에 대하여 정리하고 조합(assemble)하는 과정을 중심으로 기술하고자 한다.

Galerkin기법 적용시 時間과 空間의 函數인 流速 $u(x, y, \sigma, t), v(x, y, \sigma, y)$ 를鉛直座標 σ 의 함수인 $f_j(\sigma)$ 와水平座標 및 時間의 함수인 계수 $u_j(x, y, t), v_j(x, y, t)$ 를 사용하여 다음과 같이 전개한다.

$$u(x, y, \sigma, t) = \sum_{j=1}^m u_j(x, y, t) f_j(\sigma) \quad (10)$$

$$v(x, y, \sigma, t) = \sum_{j=1}^m v_j(x, y, t) f_j(\sigma) \quad (11)$$

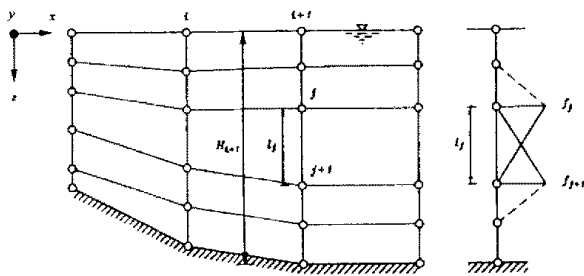


Fig. 1. Depth discretization, linear shape functions.

여기서, m 은節點(node)갯수이고, $f_j(\sigma)$ 은線形補間函數로 다음과 같이 정의되며 Fig.1과 같다.

$$f_1(\sigma) = \begin{cases} \frac{\sigma_2 - \sigma}{\sigma_2 - \sigma_1} & \text{if } \sigma_1 \leq \sigma \leq \sigma_2 \\ 0, & \text{elsewhere,} \end{cases} \quad (12a)$$

$$f_j(\sigma) = \begin{cases} \frac{\sigma - \sigma_{j-1}}{\sigma_j - \sigma_{j-1}} & \text{if } \sigma_{j-1} \leq \sigma \leq \sigma_j \\ \frac{\sigma - \sigma_j}{\sigma_{j+1} - \sigma_j}, & \text{if } \sigma_j \leq \sigma \leq \sigma_{j+1} \\ 0, & \text{elsewhere,} \end{cases} \quad (12b)$$

$$f_m(\sigma) = \begin{cases} \frac{\sigma - \sigma_{m-1}}{\sigma_m - \sigma_{m-1}} & \text{if } \sigma_{m-1} \leq \sigma \leq \sigma_m \\ 0 & \text{elsewhere} \end{cases} \quad (12c)$$

여기서, $\sigma_j(j=1,2,\dots, m)$ 는절점좌표이며 식 (12b)에서 $j=2,3,\dots, m-1$ 이다.

j 번째 要素內, 즉 $\sigma_j \leq \sigma \leq \sigma_{j+1}$ 의 유속 u^e, v^e 는 다음과 같이 나타낼 수 있다. 즉,

$$u^e = f_j u_j + f_{j+1} u_{j+1} \text{ or } \{f\}^T \{u\}, \quad (13a)$$

$$v^e = f_j v_j + f_{j+1} v_{j+1} \text{ or } \{f\}^T \{v\}, \quad (13b)$$

여기서,

$$\{f\}^T = \{f_j, f_{j+1}\}, \quad \{u\} = \begin{Bmatrix} u_j \\ u_{j+1} \end{Bmatrix}, \quad \{v\} = \begin{Bmatrix} v_j \\ v_{j+1} \end{Bmatrix} \text{ 이다.}$$

j 번째 요소에서의 영역을 $\sigma_j \leq \sigma \leq \sigma_{j+1}$ 라 정의하고 Galerkin 技法의 첫 단계과정으로 x 方向 運動方程式 (3)에基底函數로線形補間函數 $f_j(\sigma)$ 을 곱하고 j 번째 요소에서 정리하면 다음 식으로 이루어진다.

$$\int_{l_j} \frac{\partial u^e}{\partial t} \{f\} d\sigma = \int_{l_j} \gamma v^e \{f\} d\sigma - S_x \int_{l_j} \{f\} d\sigma - \frac{1}{H^2} \int_{l_j} \frac{\partial}{\partial \sigma} \left(N \frac{\partial u^e}{\partial \sigma} \right) \{f\} d\sigma - S_{uk} + D_x^* \quad (14)$$

여기서

$$S_x = g \frac{\partial \xi}{\partial x} \quad (15)$$

$$S_{uk} = \int_{l_j} \left(u^c \frac{\partial u^c}{\partial x} + v^c \frac{\partial u^c}{\partial y} + w^* \frac{\partial u^c}{\partial \sigma} \right) \{f\} d\sigma \quad (16)$$

$$D_x^* = \int_{l_j} \left(\frac{\partial^2 u^c}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u^c}{\partial y^2} \right) \{f\} d\sigma \quad (17)$$

式 (14)의 2차 微分項은 다음과 같이 部分積分된다.

$$\begin{aligned} \int_{l_j} \frac{\partial}{\partial \sigma} \left(N \frac{\partial u^c}{\partial \sigma} \right) \{f\} d\sigma &= \left[N \frac{\partial u^c}{\partial \sigma} \cdot \{f\} \right]_{\sigma_j}^{\sigma_{j+1}} \\ &- \int_{l_j} \left(N \frac{\partial u^c}{\partial \sigma} \right) \cdot \{f'\} d\sigma \end{aligned} \quad (18)$$

따라서 式 (14)는 다음과 같이 정리할 수 있다.

$$\begin{aligned} \int_{l_j} \{f\} \{f'\}^T d\sigma \{\dot{u}\} &= -\frac{1}{H^2} \int_{l_j} N \{f'\} \{f'\}^T \\ &d\sigma \{u\} - \{P_x^c\} \end{aligned} \quad (19)$$

여기서,

$$\{\dot{u}\} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_j}{\partial t} \\ \frac{\partial u_{j+1}}{\partial t} \end{Bmatrix} \quad \{f\} = \begin{Bmatrix} f_j \\ f_{j+1} \end{Bmatrix} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} \{P_x^c\} &= \gamma \int_{l_j} \{f\} \{f'\}^T d\sigma \{v\} - S_x \int_{l_j} \{f\} d\sigma \\ &- \frac{1}{H^2} [N \{f'\} \{f'\}^T \{u\}]_{\sigma_j}^{\sigma_{j+1}} - S_{uk} + D_x^* \end{aligned} \quad (21)$$

여기서,

$$\begin{aligned} S_{uk} &= \int_{l_j} (\{f\} \{u\}^T \{f'\}^T \left\{ \frac{\partial u}{\partial x} \right\}) \{f\} + \{f\} \{v\}^T \\ &\{f'\}^T \left\{ \frac{\partial u}{\partial y} \right\} \{f\} + W_{uk} d\sigma \end{aligned} \quad (22)$$

$$W_{uk} = w^* \frac{\partial u^c}{\partial \sigma} \{f\} \quad (23)$$

그리고,

$$\begin{aligned} w^* &= \frac{1}{H} \left\{ \frac{\partial \xi}{\partial t} (1-\sigma) \right\} + \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \int_{\sigma_j}^1 u d\sigma \right\} + \frac{\partial}{\partial y} \\ &\left\{ \int_{\sigma_j}^1 v d\sigma \right\} \end{aligned} \quad (24)$$

이상과 같이 정리하면 j 번째 요소에서 다음과 같은 方程式 형태로 표시할 수 있다.

$$\begin{aligned} \int_{l_j} \{f\} \{f'\}^T d\sigma \{\dot{u}\} &= -\frac{1}{H^2} \int_{l_j} N \{f\} \{f'\}^T \\ &d\sigma \{u\} + \{P_x^c\} \end{aligned} \quad (25)$$

鉛直 運動量擴散係數 N 은 두 節點사이에서 선형적으로 변한다는 가정하에 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$N_c = \{f\} \{\phi\}^T \quad (26)$$

여기서 $\{\phi\}^T = \{\phi_j, \phi_{j+1}\}$ 로서 ϕ_j, ϕ_{j+1} 는 연직 운동량 확산계수의 연직방향 분포로서 결정되며 節點에서 常數값으로 주어진다.

式 (25)는 다음과 같이 표현 가능하다.

$$[K^e] \{\dot{u}\} = -\frac{1}{H^2} [D^e] \{u\} + \{P_x^e\} \quad (27)$$

여기서, 행렬 K^e, D^e 는 다음과 같이 표현되는 2×2 행렬이다.

$$[K^e] = \begin{pmatrix} \int_{l_j} f f_j d\sigma & \int_{l_j} f f_{j+1} d\sigma \\ \int_{l_j} f_{j+1} f d\sigma & \int_{l_j} f_{j+1} f_{j+1} d\sigma \end{pmatrix} \quad (28)$$

$$[D^e] = \begin{pmatrix} \phi_j \int_{l_j} f f_j' f_j' d\sigma & \phi_j \int_{l_j} f f_j' f_{j+1}' d\sigma \\ \xi_{j+1} \int_{l_j} f_{j+1}' f_{j+1}' d\sigma & \phi_{j+1} \int_{l_j} f_{j+1}' f_{j+1}' d\sigma \end{pmatrix} \quad (29)$$

각 요소들을 組合(assembly)하여 정리하면 全體(global)行列은 다음과 같이 구성된다.

$$[K] \{\dot{u}\} = -\frac{1}{H^2} [D] \{u\} + \{P_x\} \quad (30)$$

여기서 $[K], [D]$ 는 $(m \times m)$ 3중 對角行列이 되고 $\{P_x\}$ 는 m 개의 요소를 갖는 행벡터이다.

$\{P_x\}$ 는 다음과 같이 偏向力項, 海面 傾斜項, 鉛直 運動量擴散係數와 관련된 항, 移送項과 水平 擴散項들의 합으로 나타낼 수 있으며,

$$\{P_x\} = \{P_{xy}\} + \{P_{xs}\} + \{P_{xb}\} + \{P_{xa}\} \quad (31)$$

이들 각 벡터는 각 요소벡터의 합으로 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} \{P_{xy}\} &= \sum_e \{P_{xy}^e\} \\ &= \sum_e \gamma \int_{ij} \{f\} \{f\}^T d\sigma \{v\} \end{aligned} \quad (32)$$

$$\begin{aligned} \{P_{xs}\} &= \sum_e \{P_{xs}^e\} \\ &= \sum_e S_x \int_{ij} \{f\} d\sigma \end{aligned} \quad (33)$$

$$\begin{aligned} \{T_{xb}\} &= \sum_e \{P_{xb}^e\} \\ &= \frac{1}{H^2} \sum_e [-N \{f\} \{f\}^T \{u\} |_{\sigma_j}^{\sigma_j+1}] \end{aligned} \quad (34)$$

$$\begin{aligned} \{P_{xa}\} &= \sum_e \{P_{xa}^e\} \\ &= \sum_e \{S_{uk} + D_x^*\} \end{aligned} \quad (35)$$

여기서, $\{P_{xb}\}$ 는 境界條件에 의해 결정되는 항이며 첫번째 절점에서 海水面 境界條件으로 마지막 절점에서 海底面 境界條件으로 다음과 같이 주어진다.
海水面 境界條件:

$$\frac{1}{H} f'(\sigma_1) f(\sigma_1) u(\sigma_1) = \frac{F_S}{\rho} \quad (36)$$

海底面 境界條件:

$$\frac{1}{H} f'(\sigma_m) f(\sigma_m) u(\sigma_m) = \frac{F_B}{\rho} \quad (37)$$

y方向 運動方程式은 비슷한 형태로 다음과 같은 行列方程式이 구성된다.

$$[K] \{\dot{v}\} = -\frac{1}{H^2} [D] \{v\} + \{P_y\} \quad (38)$$

$\{P_y\}$ 는 式 (31)과 유사하게 주어지며 다음과 같다.

$$\{P_y\} = \{P_{xy}\} + \{P_{ys}\} + \{P_{yb}\} + \{P_{ya}\} \quad (39)$$

이들 각 벡터는 요소벡터의 합으로 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} \{P_{xy}\} &= \sum_e \{P_{xy}^e\} \\ &= \sum_e \gamma \int_{ij} \{f\} \{f\}^T d\sigma \{u\} \end{aligned} \quad (40)$$

$$\begin{aligned} \{P_{ys}\} &= \sum_e \{P_{ys}^e\} \\ &= \sum_e S_y \int_{ij} \{f\} d\sigma \end{aligned} \quad (41)$$

$$\begin{aligned} \{T_{xb}\} &= \sum_e \{P_{yb}^e\} \\ &= \frac{1}{H^2} \sum_e [-N \{f\} \{f\}^T \{v\} |_{\sigma_j}^{\sigma_j+1}] \end{aligned} \quad (42)$$

$$\begin{aligned} \{P_{ya}\} &= \sum_e \{P_{ya}^e\} \\ &= \sum_e \{S_{uk} + D_y^*\} \end{aligned} \quad (43)$$

2.2.2 類似變換 技法을 利用한 各 절점별 유속의 計算

x方向 Galerkin解인 式 (30)에 類似變換技法을 적용한다. 편의상 式 (30)를 다시 쓰면 다음과 같다.

$$[K] \{\dot{u}\} = -\frac{1}{H^2} [D] \{u\} + \{P_x\} \quad (30)$$

$[K]^{-1}[D]$ 의 고유벡터 $\{\gamma\}$ 와 固有值 λ 는 다음 식으로부터 결정된다.

$$(\lambda[K] - [D])\{\gamma\} = \{0\} \quad (44)$$

m개의 절점을 사용할 경우 式 (44)로부터 m개의 固有值, $\lambda_n, n=1, \dots, m$ 과 고유벡터, $[\{\gamma_n\}], n=1, \dots, m$ 를 구할 수 있다. 실제 수치계산에서는 SSP 패키지를 사용하였다(IBM SSP programmer's manual, 1970).

式 (30)에 類似變換 技法을 적용하기 위하여 $\{u\}$ 를 고유벡터행렬 $[\Gamma]$ 를 이용하여 다음 식과 같이 變換한다.

$$\{u\} = [\Gamma] \{\psi\} \quad (45)$$

여기서, $\{\psi\}$ 는 變換된 좌표계이다.

여기에서 類似變換技法을 적용하면 式 (30)은 다음 식과 같이 표현된다.

$$\{\dot{\psi}\} = -\frac{1}{H^2} \left[\lambda_n \right] \{\psi\} + [\Gamma]^{-T} \{P_x\} \quad (46)$$

式 (46)은 다음 식과 같은 비연계된 微分方程式 형태로 표시된다.

$$\dot{\psi}_n = \frac{1}{H^2} \lambda_n \psi_n + P'_{xn} \quad (n=1, \dots, m) \quad (47)$$

여기서, P'_{xn} 는 $[\Gamma]^{-1} [P_x]$ 벡터의 n 번째 요소를 의미하며 λ_n 은 고유치이다. 그런데 式 (44)는 固有值 즉 λ_n 가 特定常數 값을 가질 경우 解析解를 구할 수 있다.

따라서 式 (47)은 初期值를 알 수 있을 경우 解釋解를 구할 수 있다. 初期值 $t=0$ 일 때 $\psi_n = \psi_n^0$ 이라고 하면 解釋解는 다음과 같다.

i) λ_n 가 0이 아닐 경우,

$$\psi_n' = (\psi_n^0 - \Lambda_n) e^{A_n t} + \Lambda_n \quad (n=1, \dots, m) \quad (48)$$

여기에서, $A_n = -\frac{1}{H^2} \lambda_n$, $\Lambda_n = \frac{P'_{xn}}{A_n}$ 이며,

ii) λ_n 가 0일 경우,

$$\psi_n' = \psi_n^0 + P'_{xn} t \quad (n=1, \dots, m) \quad (49)$$

式 (48), (49)을 이용하여 일정 시간에서의 ψ_n' 를 구하면 式 (45)를 이용 각 절점의 유속을 구할 수 있다.

y 方向 運動方程式의 解는 式 (38)에 類似變換技法을 적용하여 유사하게 구할 수 있다.

3. 數值實驗 및 結果

3.1 吹送流實驗(長方形 領域(Heaps' Basin)에서의 實驗)

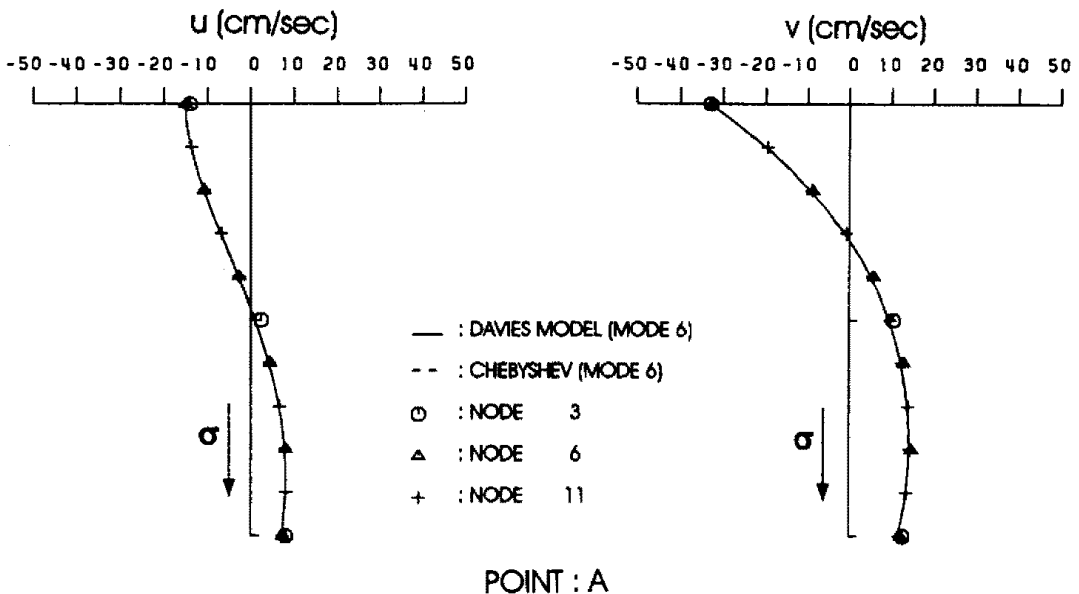


Fig. 3. Velocity profiles at the central point A computed using the nonlinear model of Davies', nonlinear Galerkin-Spectral (with six Chebyshev polynomials) and nonlinear Galerkin-FEM models for various node numbers.

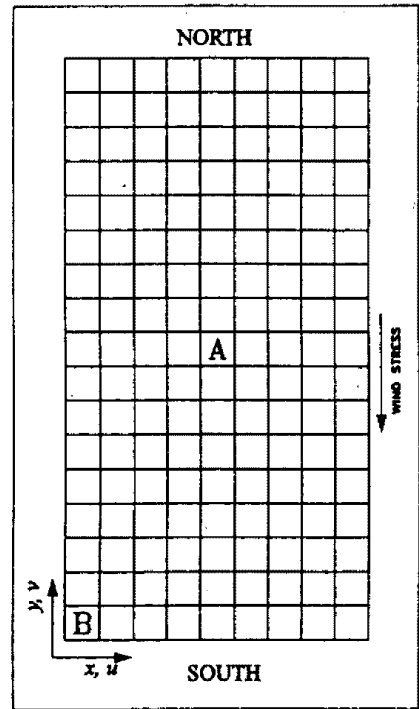


Fig. 2. Closed rectangular sea basin with dimensions representative of the North Sea (Heaps' Basin).

0.005) Davies' 모델과 姜(1994)에 의해 개발된 바 있는 Galerkin-Spectral 모델, Galerkin-FEM 모델의 절점 수에 따른 모델의 反應을 實驗하였다.

數值實驗에서 계산시간 간격은 Galerkin-FEM 모델과 Galerkin-Spectral 모델의 경우 360초로 하였고 Davies 모델의 경우는 기저함수로 Chebyshev 다항

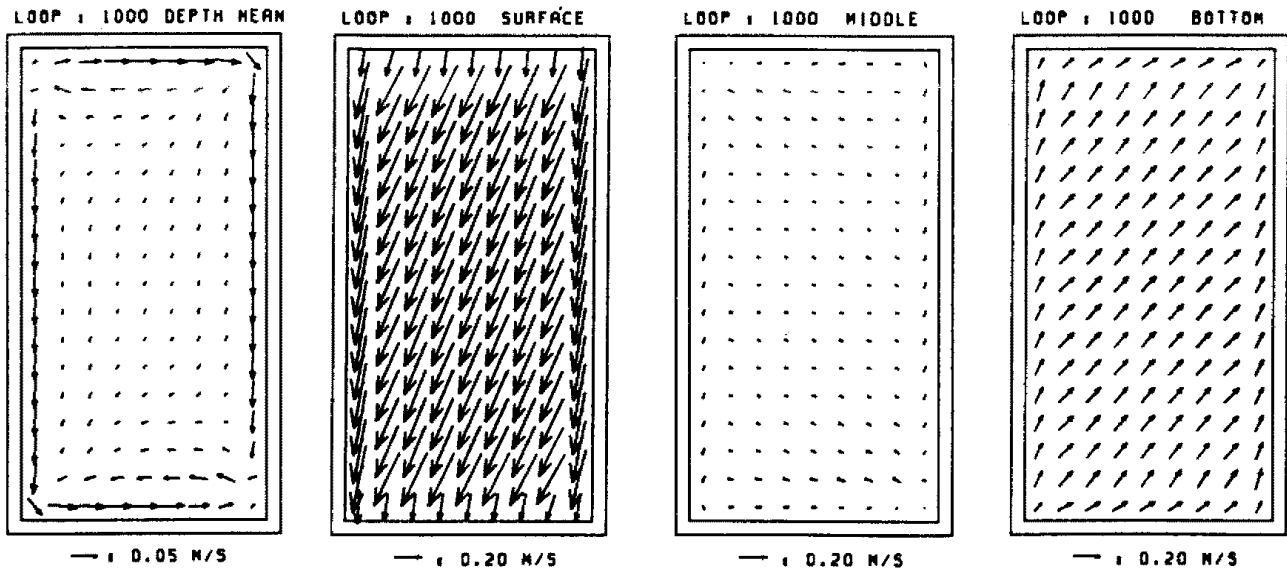


Fig. 4. Depth-mean and surface, mid-depth and bottom current field computed using a nonlinear model.

기존연구(Davies and Owen, 1979; 姜 等, 1994)와 동일한 조건하에서 數值實驗을 수행하였고 非線形項의 효과를 검토하기 위하여 일정 외력이 주어진 경우에 대하여 線形項만 고려한 경우, 非線形 모두를 고려한 경우, 移送項, 海面 非線形項만 고려할 경우에 대하여 수치실험을 수행하여 결과를 비교하였다.

計算 領域 400 km × 800 km에 9 × 17개의 格子網을 구성하였으며 편향력상수는 0.44 h⁻¹로 주었다. 陸地境界條件은 閉境界條件을 사용하였다. 계산에 사용된 격자체계는 staggered 격자체계(grid system)인 Arakawa-C 형태의 격자체계를 사용하였으며 격자망은 기존연구(姜 等, 1994)와 동일하며 Fig. 2와 같다. 水深은 일정 수심을 준 경우에 대한 數值實驗의 결과를 분석하였다. 북풍에 의한 吹送流實驗時 바람응력 -1.5 N/m²를 전 영역에 일정하게 주었다.

1) 實驗 1

鉛直 運動量擴散係數의 鉛直分布를 常數 N=0.065 m²/s로 일정하게 가정하고 海底面 摩擦應力의 계산시 非線形 摩擦關係式을 사용하여(海底面 摩擦係數는 식함수 6개를 사용하고 계산시간 간격은 100초로 주었다. 30시간 후의 영역 중앙점(Fig. 2의 A점)의 연직 유속분포와 수평 流速分布, 海面 狀態의 결과를 제시한다.

鉛直 流速分布:

非線形 效果를 모두 고려한 流速의 鉛直分布는 Fig. 3과 같다. Davies 模型의 결과와 Galerkin-Spectral

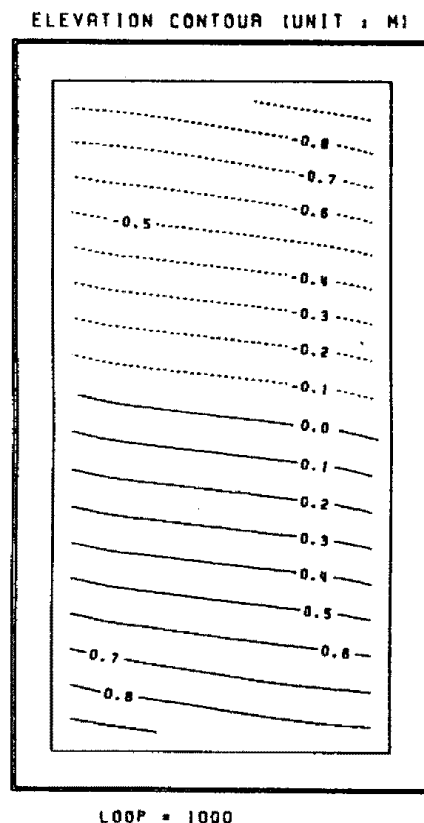


Fig. 5. Elevation contours at (t=100 hours) computed using a nonlinear model.

模型의 결과는 똑 같으며 Galerkin-FEM 模型의 경우 절점을 3개 사용한 경우 값이 약간 차이나고 6개, 11개를 사용하였을 경우에 거의 유사하게 재현하였다. 水平 流速分布, 海面 狀態:

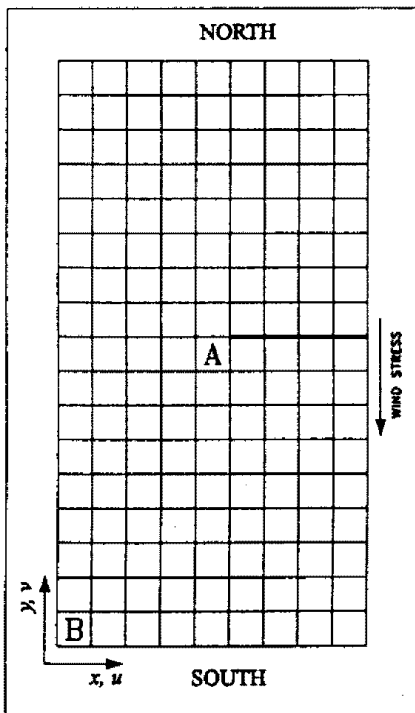


Fig. 6. Closed rectangular sea basin with dimensions representative of the North Sea with jetty (Heaps' Basin).

Fig. 4는 100시간 경과후의流速의 水平分布이고 Fig. 5는 海水面 狀態를 나타낸 그림이다. 鉛直 流速 分布와 水平分布, 海水面 狀態가 線形項만 고려한 경우와 거의 일치했다. 이 결과로 볼 때 一定 水深 65m를 고려할 경우는 非線形 效果는 무시할 수 있을

만큼 작은 것으로 사료된다.

2) 實驗 2

非線形效果를 검토하기 위하여 아주 얇은 수심(10 m)을 고려하고 약간의 地形變化도 고려하여 數値實驗을 수행하였다. 地形變化는 Fig. 6과 같이 실험 영역 중간에 導流堤가 있다고 가정하였다. 非線形 效果를 검토하기 위하여 수행한 실험은 다음과 같다. 數値實驗은 非線形 摩擦式을 사용하였으며 非線形摩擦係數는 0.005로 주었고 鉛直 運動量擴散係數의 鉛直 分布를 常數 $N=0.065 \text{ m}^2/\text{s}$ 로 주고 非線形 效果를 檢討하였다. 계산간격 및 결과 제시요령은 실험 1과 동일하다.

1) 實驗 2-1: 海底面 摩擦項을 제외한 모든 항은 線形으로 처리.

2) 實驗 2-2: 海底面 摩擦項과 海水面과 관련된 항을 非線形으로 처리하여 海水面變化에 의한 非線形 效果 검토.

3) 實驗 2-3: 海水面과 관련된 항은 線形으로 처리하여 海水面 變化를 고려하지 않았으며 移送項을 포함하여 移送項에 의한 非線形 效果 검토.

4) 實驗 2-4: 非線形方程式의 모든 항을 非線形으로 처리.

Fig. 7은 100시간 후의 實驗 領域 중앙점에서 鉛直 流速 分布를 비교한 그림이다. v 流速은 똑 같았으며 u 流速의 경우 實驗 2-1과 2-3의 결과가 같고 실험

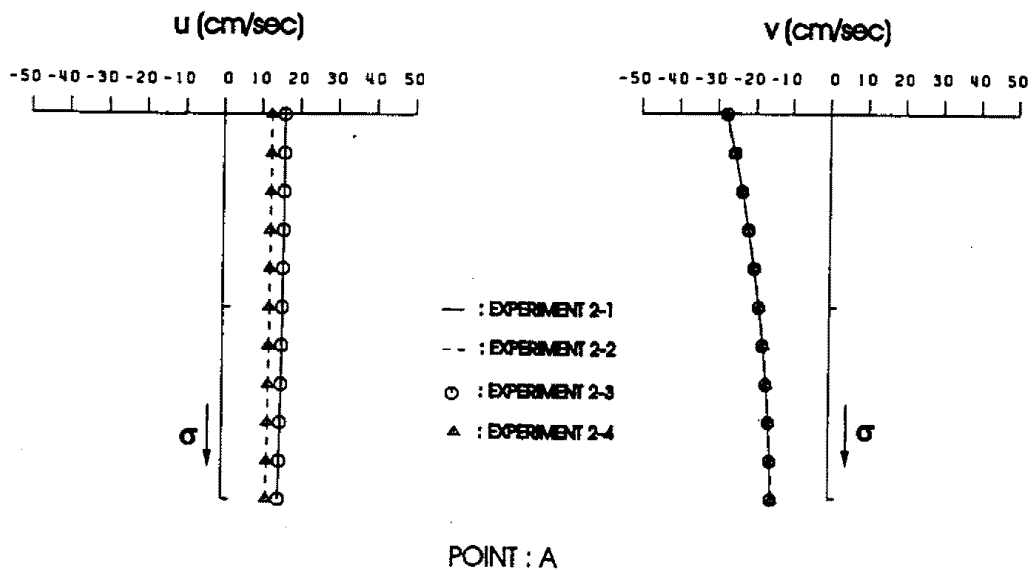


Fig. 7. Velocity profiles at the central point A obtained in Experiment 2 with inclusion of various nonlinear terms.

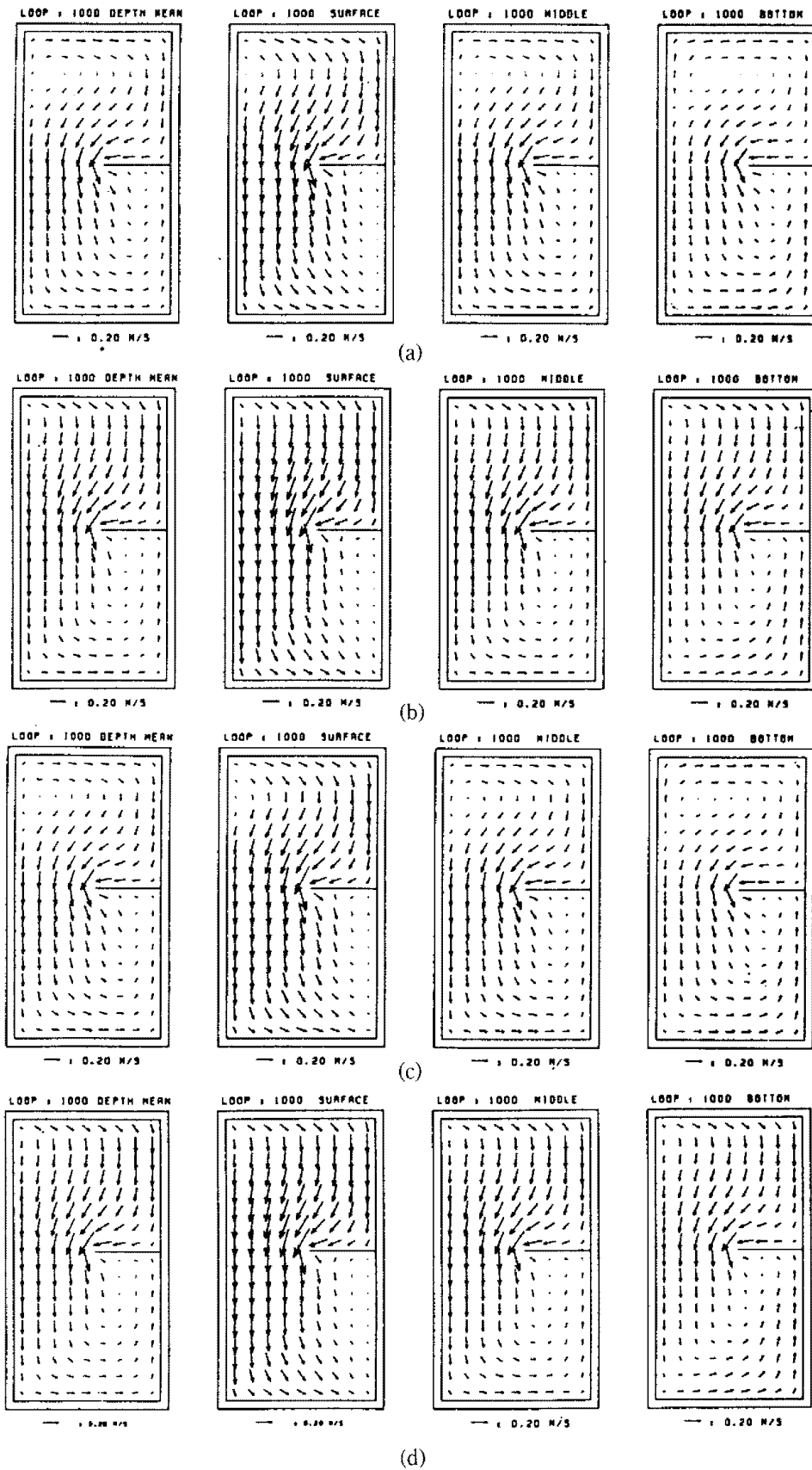


Fig. 8. Depth-mean and surface, mid-depth and bottom current field computed using (a) a linear model, (b) a nonlinear model with shallow water terms, (c) a nonlinear model with advective terms and (d) a fully nonlinear model.

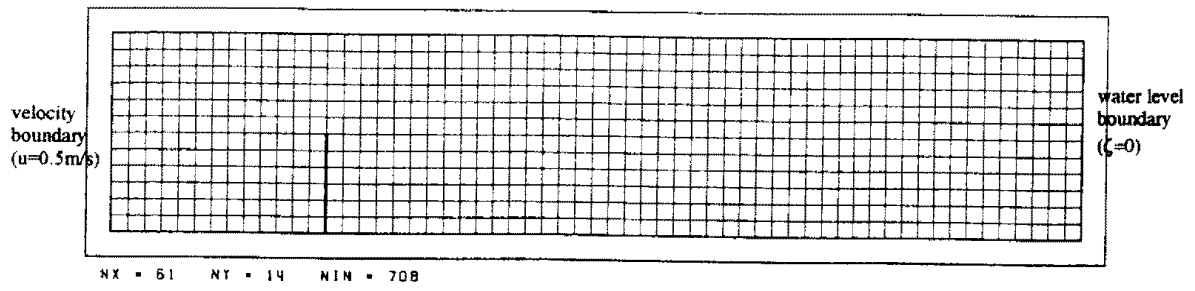


Fig. 9. Model domain and open boundary conditions of flow past a jetty.

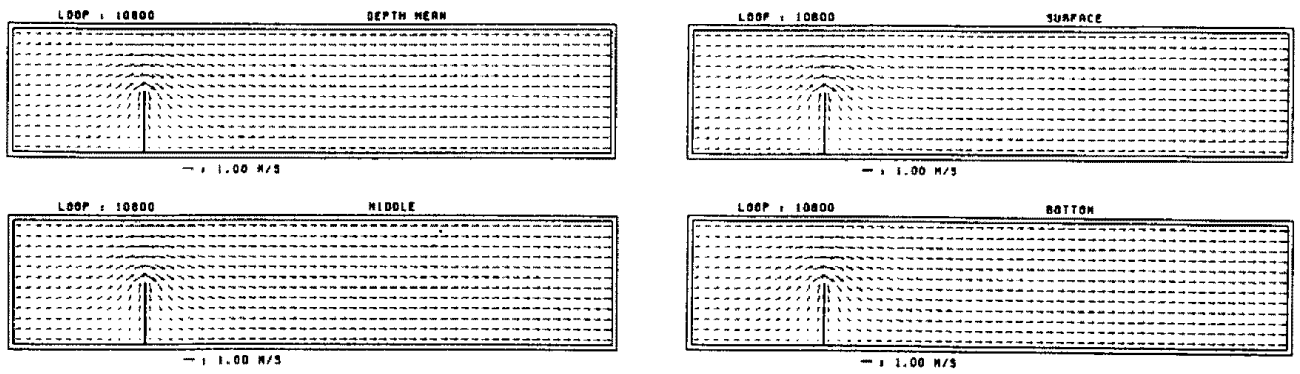
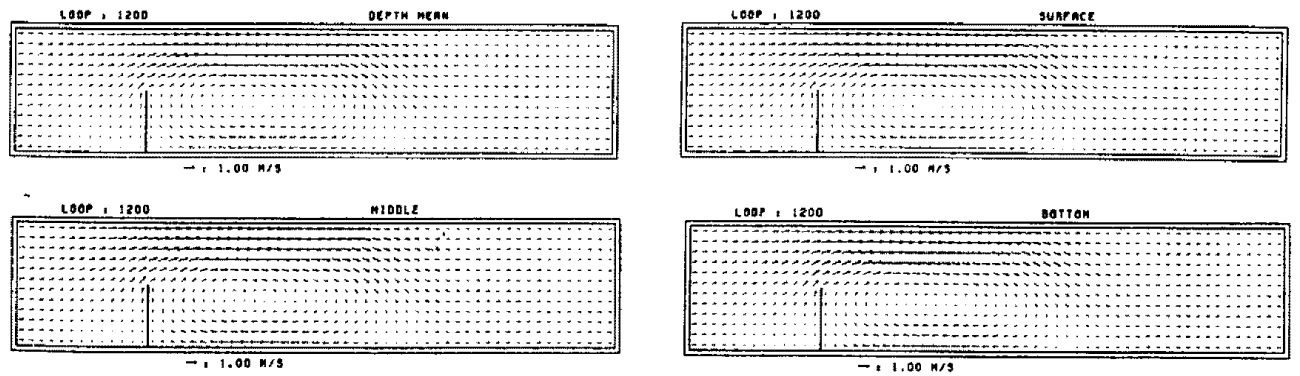
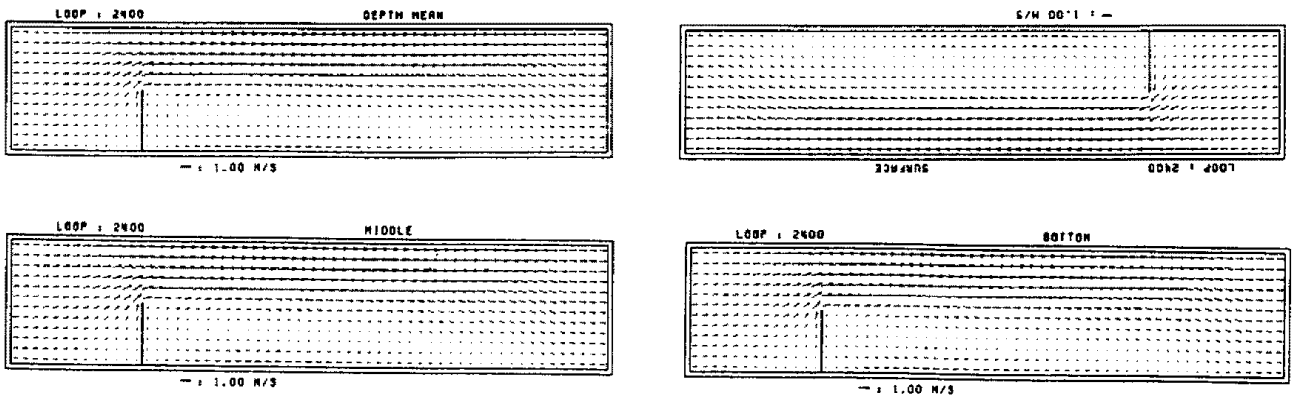


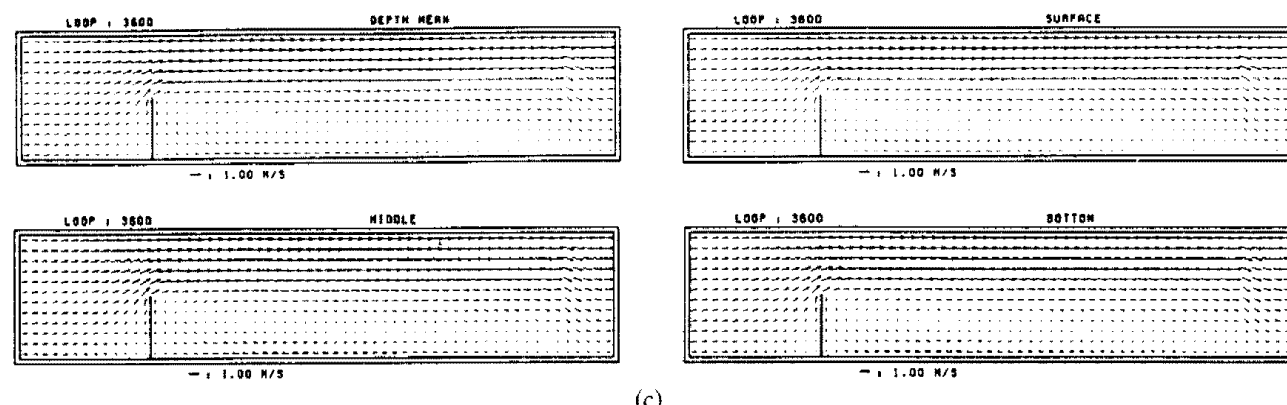
Fig. 10. Flow past a jetty without nonlinear terms.



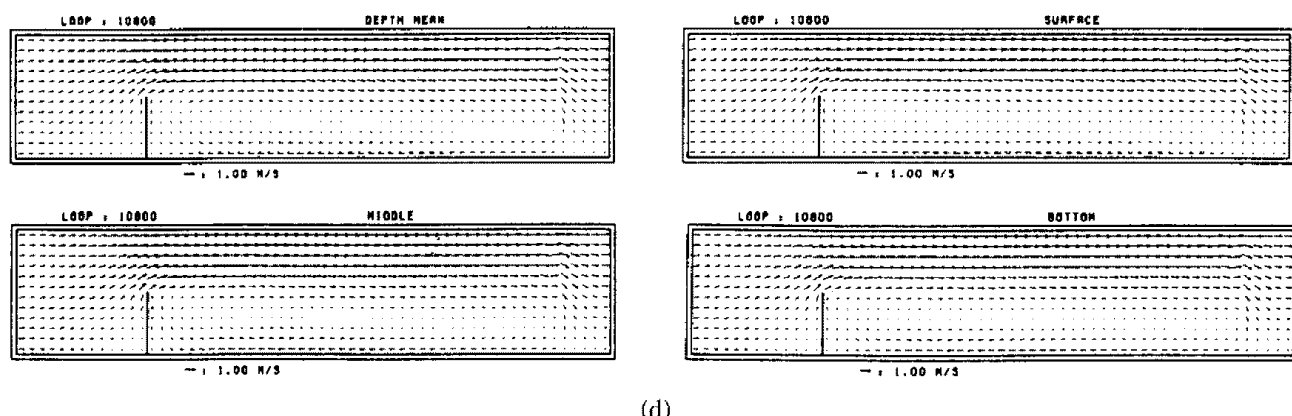
(a)



(b)

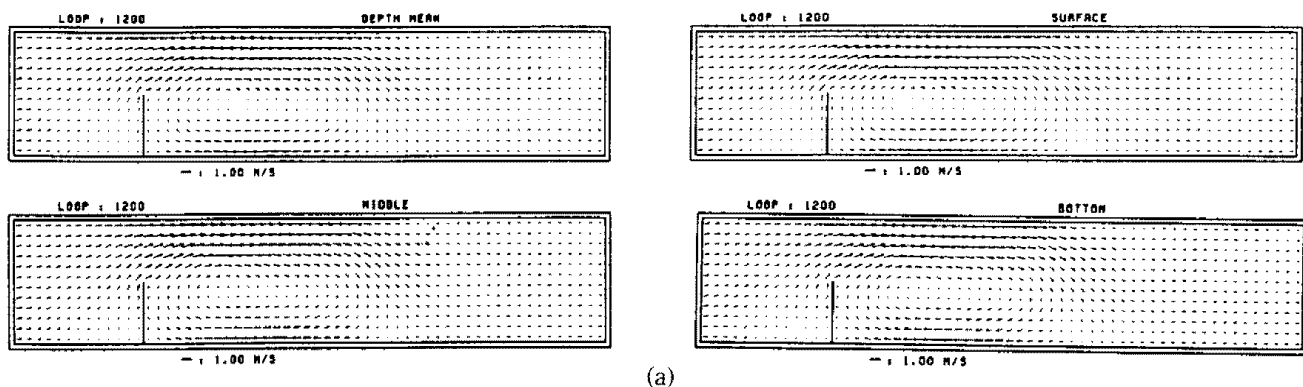


(c)

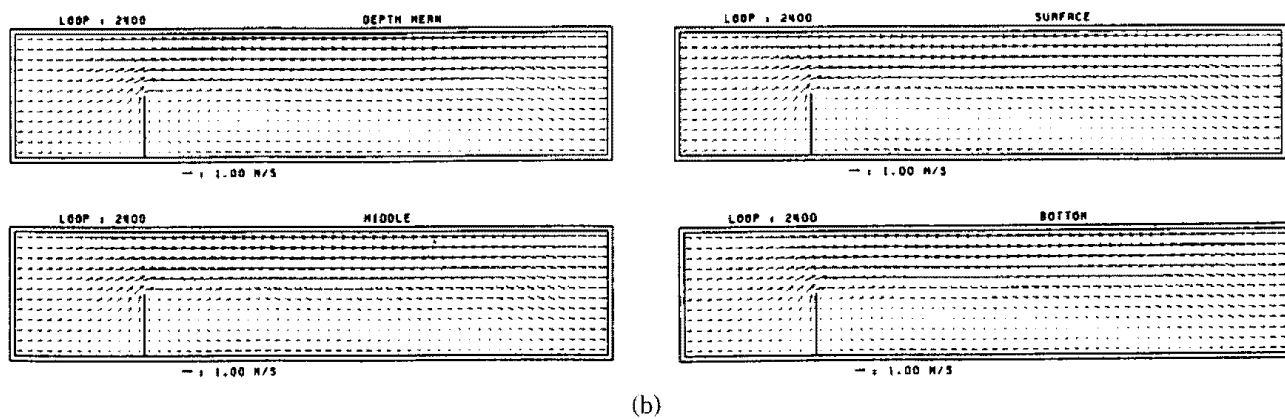


(d)

Fig. 11. Development of eddy behind jetty with only advective terms, at $t=(a)$ 20 min., (b) 40 min., (c) 60 min., (d) 180 min.



(a)



(b)

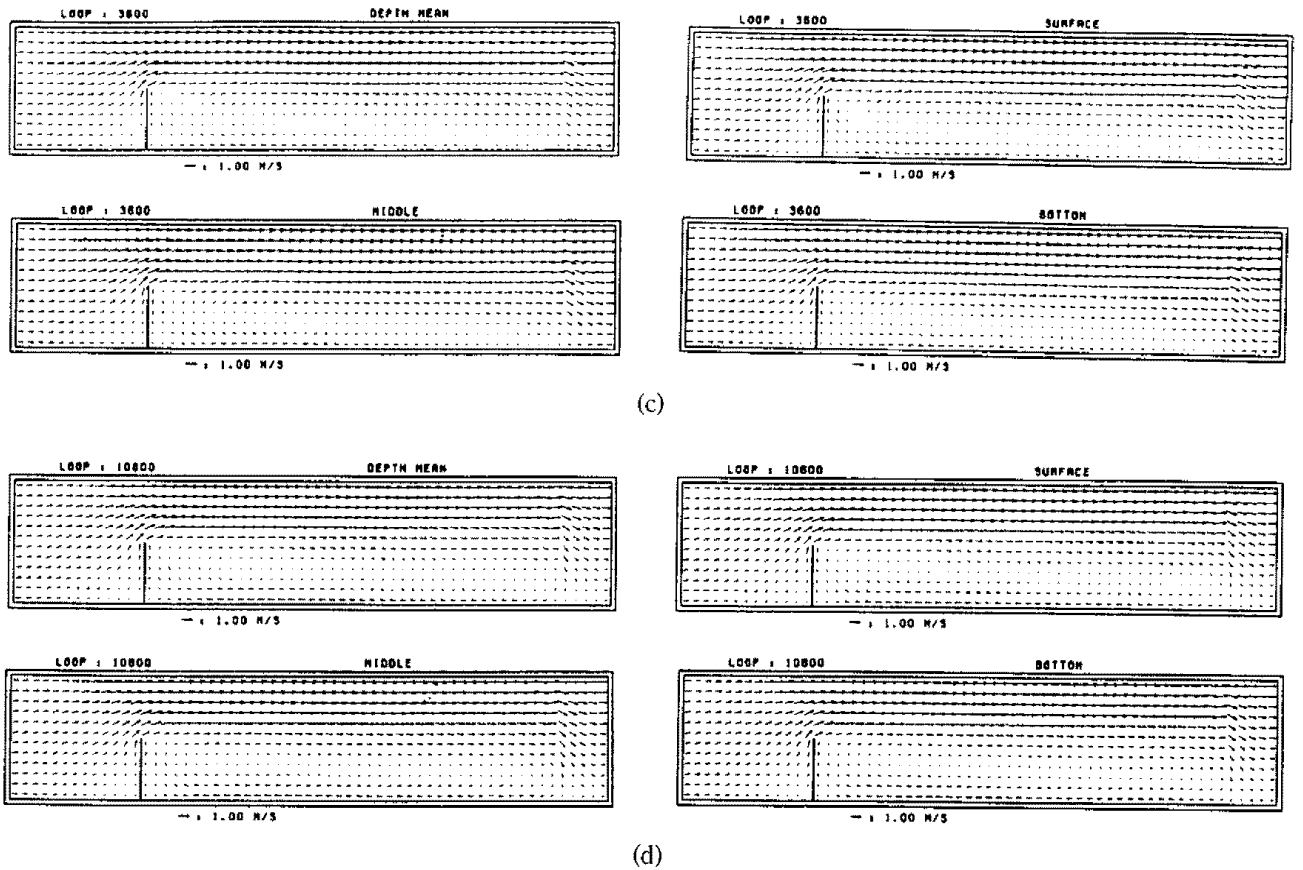


Fig. 12. Development of eddy behind jetty with fully nonlinear terms, $t=(a)$ 20 min., (b) 40 min., (c) 60 min., (d) 180 min.

2-2와 2-4의 결과가 일치했다. Fig. 8(a), (b), (c), (d)는 각각 實驗 2-1, 2, 3, 4의 평균유속과 각 층별流速의 水平分布이다. 線形만 고려한 경우(實驗 2-1)와 모든 항을 非線形으로 처리한 경우(實驗 2-4)의 유속의 양상이 많이 다르고 實驗 2-2의 결과와 모든 항을 非線形으로 처리한 경우(實驗 2-4)가 가장 유사하게 재현되었다. 각 결과를 정리하면 수심이 일정한 경우는 移送項에 의한 非線形 效果가 적게 나타나고 海水面變化에 의한 非線形 效果가 가장 크게 나타나는 것으로 요약된다.

3.2 導流堤가 있는 2次元 水路에서의 數值實驗

본 실험에서 적용한 模型 格子網圖와 開放境界 條件이 Fig. 9에 나타나 있다. 수행한 數值實驗은 海底面 摩擦條件을 제외한 모든 항을 線形으로 처리한 경우와 모든 항을 非線形으로 처리한 경우, 海水面項은 線形으로 처리하고 移送項을 추가한 경우에 대하여 수치실험하였다. 해저면 비선형 마찰계수는 0.005로 하였고 鉛直運動量擴散係數는 $1 \text{ m}^2/\text{sec}$, Δt 는 1초로 하

였다. Fig. 10은 선형항만 고려한 경우의 180분 경과시의 결과이고, Fig. 11은 移送項만 추가하였을 경우의 20, 40, 60분과 180분 경과후의 결과이며 Fig. 12는 모든 항을 비선형으로 처리하였을 경우의 20, 40, 60분과 180분 경과후의 결과이다. 결과는 평균, 해수면, 중층, 해저면 수평 유속분포를 제시하였다. 결과에서 보듯이 移送項에 의한 비선형 效果가 상당히 크게 나타남을 알 수 있고 導流堤 後面에서의 渦流가 시간이 경과함에 따라 점차 개방경계 쪽으로 전파하는 양상을 보여준다. 다만, 오른쪽 開放境界에서 해수위를 고정시킴으로써 개방경계 근처까지 와류가 진행될 경우에 흐름이 약간 불안정해짐을 알 수 있다.

4. 結論 및 討議

本 研究에서는 비선형 3차원 Galerkin-FEM 모형을 이용하여 非線形項의 效果에 대하여 분석하였다. 數值實驗은 기존의 연구자들이 적용한 一定水深 長方形 領域에 適用하여 그 結果를 기존의 연구 결과와 比較,

檢討하였다. 검토 결과 개발된 모형은 기존의 연구 결과와 상당히 유사하여 실제 지형에 적용 가능하리라 판단된다. 그러나, 본 모형을 실제 지형에 적용함에 있어서는 不規則 水深, 實際의 岸線, 조간대 및 外海 境界를 처리할 수 있게 확장해야 하며 現在 이에 대한 研究가 進行中에 있다.

參考文獻

- 姜官秀, 1994. 類似變換技法을 이용한 3次元 수치모형, 서울대학교 박사학위 논문.
- 姜官秀, 蘇在貴, 鄭景太, 1994. 類似變換技法을 이용한 Galerkin-FEM 모델, 韓國海岸·海洋工學會誌, 6(2), pp. 174-185.
- 崔顯龍, 1994. Legendre 다항식을 기저함수로한 비선형 3차원 스펙트럴모델 개발, 서울대학교 박사학위 논문.
- Davies, A.M., 1980. Application of the Galerkin method to the formulation of a three-dimensional nonlinear hydrodynamic numerical sea model, *Appl. Math. Modelling*, 4(August), pp. 245-256.
- Davies, A.M. and Owen, A., 1979. Three dimensional numerical sea model using the Galerkin method with a polynomial basis set, *Appl. Math. Modelling*, 3(December), pp. 421-428.
- Lardner, R.W. and Song, Y., 1992. A hybrid spectral method for the three dimensional numerical modelling of nonlinear flows in shallow seas, *J. Comp. Phys.*, 100, pp. 322-334.
- Owen, A., 1980. A three-dimensional model of the Bristol Channel, *J. of Physical Oceanography*, 10, pp. 1290-1302.
- Stelling, G.S., 1984. On the construction of computational methods for shallow water flow problems, *Rijkswaterstaat communications*, The Hague, 226p.
- IBM application program, System/360 Scientific Subroutine Package(SSP), Version III, Programmer's Manual, 1970. International Business Machines Corporation.