工業經營學會誌 第18卷 36輯 1995年 12月 253

정적 파라미터 설계에 있어서 성능척도의 대안들에 대한 비교·분석

- Comparative Analysis for Alternatives of Performance Measures for Static Parameter design -

배 홍 석*
Bae, Hong-Seok
이 만 웅**
Lee, Man-Woong
송 서 일***
Song, Suh-Ill

Abstract

In parameter design, Taguchi's stated objective is to find the setting of product or process design parameters that minimize average quadratic loss-that is, the average squared deviation of the response from its target value. Yet, in practice to choose the settings of design parameters he maximizeds a set of measures called signal-to-noise(*SN*) ratios. In general, Taguchi gave no justification for the use the *SN* ratios and no explanation of why the two-step procedure that he recommened will minimize average loss. The purpose of this study is comparing and analyzing of performance statistics by Leon et al(Per*MIA*), Box(Transformation theory), Vining & Myers(Dual Response Systems) and Taguchi(Signal-to-Noise ratios).

1. 서 론

전통적인 품질관리기법의 분산은 제품을 형성하는 설계변수와는 별개로 생산장비, 생산환경, 자원의 등급, 숙련도등의 함수로 취급하였다. 그러나 다구찌는 설계변수를 첨가함으로써 제품과 공정의 설계단계에서 가능한 한 품질특성의 변동이 주위환경의 변화에 둔감(Robust : 안정, 강건)한 설계변수의 수준을 찾아 생산공정에서의 품질관리 노력을 최소화하고 제품의 수명 및 관리비용을 최소화시킴으로써 비용면에서 효과적인 품질관리를 수행할 것을 제안하였다. 다구찌는 파라미터 설계의 수행시 성능척도로서 S/N 비를 사용하고 있는데 그 타당성여부가 문제가 되어 많은 학자들에 의해서 연구되어져 왔다. 따라서 본 연구에서는 S/N 비와 그 외의 대안들을 비교·분석함으로써 어떤 경우의 성능통계량(성능척도)이 보다 효과적인지를 파악하고자 한다.

* 동아대학교 산업공학과 박사과정
** 동아대학교 산업공학과 박사과정 수료
*** 동아대학교 산업공학과 교수

2. S/N 비(Signal-to-noise(S/N) ratios)

직교배열에 의해 제어인자들과 잡음인자들에 의해서 각각 실험을 설계한 후 제어인자들의 각 실험점마다 잡음인자들의 모든 실험점을 결합하여 측정된 품질변수의 관측치로 부터 잡음인자들의 효과를 측정하는 통계량을 산출하여 분석하는데 이러한 통계량을 S/N비라 한다. 다구찌는 잡음인자의 영향을 평가하는데 있어서 이차손실함수를 이용하여 품질변동의 성격과 기대손실의 통계적 특성에 따라 S/N 비를 제시하였다. Table 1과 2는 품질특성에 대한 목표치가 고정된 정적인 문제와 신호인자에 따라서 품질특성의 목표치가 변화하는 동적인 문제에 대한 S/N비를 나타낸 것이다[1].

<Table 1> S/N ratios for static problems

Problem Type	Range for the Observations	Ideal Value	Adjust-ment	S/N Ratio and Comments
Smaller-the-better type	$0 \le y < \infty$	0	None	$\eta = -10 \log_{10} \left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right]$
Nominal-the-best type	$0 \le y < \infty$	Nonzero, finite	Scaling	$\eta = 10 \log_{10} \frac{\mu^2}{\sigma^2}$ $\mu = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} y_i$ $\sigma^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (y_i - \mu)^2$
Larger-the-better type	$0 \le y < \infty$	∞	None	$\eta = -10 \log_{10} \left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{y_i^2}\right]$
Signed-target	$-\infty < y < \infty$	Finite, usually 0	Leveling	$\eta = -10 \log_{10} \sigma^2$ $\sigma^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (y_i - \mu)^2$
Fraction defective	$0 \le p \le 1$	0	None	$\eta = -10 \log_{10} \left[\frac{p}{1-p}\right]$
Ordered categorical				Use accumulation analysis. See Section 5.5.
Curve or vector response				Divide the problem into several individual problems of the above types. See Chapter 6.

<Table 2> S/N ratios for dynamic problems

Problem Type	Input Range	Output Range	Ideal Function	Adjust-ment	S/N Ratio and Comments
Continuous-continuous (C-C)	$-\infty < M < \infty$	$-\infty < y < \infty$; $y = 0$ when $M = 0$	$y = M$	Scaling	$\eta = 10 \log_{10} \frac{\beta^2}{\sigma_e^2}$ $\beta = \frac{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(y_{ij}M_i)}{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(M_i^2)}$ $\sigma_e^2 = \frac{1}{(mn-1)}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(y_{ij}-\beta M_i)^2$
Continuous-digital (C-D)	$-\infty < M < \infty$	Binary: ON, OFF			Divide the problem into two separate problems of C-C or nominal-the-best type for the ON and OFF functions. See Chapter 9.
Digital-continuous (D-C)	Binary: 0, 1	$-\infty < y < \infty$			Divide the problem into two nominal-the-best type problems.
Digital-digital (D-D)	Binary: 0, 1	Binary: 0, 1	$y = M$	Leveling	$\eta = 10 \log_{10} \left\{\frac{(1-2p')^2}{p'(1-p')}\right\}$ $p' = \left[1+\sqrt{\frac{1-p}{p}\cdot\frac{1-q}{q}}\right]^{-1} =$ equalized error probability p = error probability of output being 1 when input is 0 q = error probability of output being 0 input is 1

S/N비는 파라미터 설계시에 가장 핵심이 되는 부분으로 다음과 같은 사용상의 이점이 있다.

(1) 최적은 목적평균함수에 의존하지 않는다. 따라서, 목표치가 다른 경우에도 재사용할 수 있다.

(2) 서브시스템과 부품의 설계는 병렬도 수행할 수 있다. 하위시스템과 부품에 대한 평균함수에 대한 규격은 잡음인자의 민감도에 불리한 영향을 주는 것 없이 나중에 변경시킬 수 있다.

(3) 적합한 S/N 비를 사용하면 인자효과의 가법성이 향상된다. 만약, 사용하지 않은 경우에는 제어인자간의 큰 교호작용이 결과적으로 실험비용의 상승과 잠재적 불합리성의 결과를 야기한다.

(4) 신제품개발에 대한 생산성이 향상된다.

3. 파라미터 설계이론

3.1 Taguchi의 파라미터 설계이론

다구찌의 파라미터 설계이론[2]은 제품설계특성치인 설계변수의 수준을 기대손실이 최소화되도록 결정짓는 과정으로 다음과 같은 방법을 제시하였다. 첫째, 성능척도로서 S/N 비를 사용하고, 목표치가 고정된 경우

$$SN = 10\log_{10}\frac{E^2(y)}{Var(y)}$$ 단, $E(y)$, $V(y)$는 y의 평균과 분산

S/N 비와 y의 평균을 이용하여, 설계변수 $\theta = (\theta_1, \theta_2, \theta_3, \cdot\cdot\cdot\cdot, \theta_n)$을 조정변수

$a=(a_1, a_2, a_3, \cdot\cdot\cdot\cdot, a_s)$, 통제변수 $d=(d_1, d_2, d_3, \cdot\cdot\cdot\cdot, d_p)$로 분류하여 2단계절차를 제안하였다.

둘째, 분류된 설계변수의 성질을 이용하여, 설계변수의 최적수준을 다음의 2단계절차로써 결정한다.

단계 1. S/N 비를 최대화하는 통제변수의 수준 d^*를 결정
단계 2. d를 d^*로 고정시킨 상태에서, 조정인자를 최적수준 a^*로 조정

S/N 비와 기대손실의 관계를 살펴보면 파라미터 설계과정이 원래의 목적인 기대손실을 최소화하는 설계조건을 찾는 것과 어떻게 연관되어 있는지 Table 3에 나타내었다.

<Table 3> Comprision of Expected loss and each characteristics

y	Expected loss(L)
STB	$E[L(y)]=E(ky^2)=k(\sigma^2+\mu^2)$
LTB	$E[L(y)]=E(\frac{k}{y^2}) \fallingdotseq \frac{k}{\mu^2}(\frac{3\sigma^2}{\mu^2}+1)$
NTB	$E[L(y)]=E(k(y-m)^2)=k(\sigma^2+(\mu-m)^2)$

● STB : $SN_i = -10\log(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} y_{ij}^2)$ (1)

LTB : $SN_i = -10\log(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{y_{ij}^2})$ (2)

→ 식 (1)의 $\frac{1}{n}\sum y_{ij}^2$는 i번째 실험점에서 $E(y^2)$의 추정량이라 볼 수 있으며 SN_i 는 설계변수들의 효과의 가법성을 유도하기 위해 log를 변환을 취한 것.

→ 식 (2.2)의 $\frac{1}{n}\sum\frac{1}{y_{ij}^2}$은 $E(\frac{1}{y^2})$의 추정량

● NTB (특정한 목표치가 주어진 경우)

→ Taguchi는 통제(제어)변수를 S/N 비를 최대로 하는 수준에 놓고, $\bar{y}$가 목표치 m에 접근하도록 조정변수의 수준을 조정한다는 2단계 최적화과정이 기대손실 $L=k(\sigma^2+(\mu-m)^2)$을 최소화하는 문제와 어떻게 연관되어 있느냐에 대해서는 언급하지 않았다.

3.2 Leon, Shoemaker, Kacker의 파라미터 설계이론

Leon[3]등은 Taguchi의 2단계 최적화과정을 다음과 같은 관계가 성립할 때만 기대손실을 최소화하게 된다는 것을 보였다. S/N 비가 Per*MIA*(Performance Measure Independent of Adjustment : 조절독립적성능척도)의 한 형태로 설계변수를 신호인자와 제어인자로 구분하고 신호인자를 조정인자로 정의하였다.

(1) Taguchi의 파라미터 설계에 대한 최적화 절차의 문제점을 다음과 같이 지적하였다.

① 설계변수의 배치기준이 최적기대손실임에도 불구하고 최적화절차에 기대손실을 고려하지 않았다.

② S/N 비의 사용이 기대손실과 어떤 관련성이 있는가에 관한 설명이 없다

(2) 이와같은 문제점을 해결하기 위해서 다음과 같이 가정하였다.

① 제품설계자는 실험을 행하기 전에 이미 설계변수의 특성을 알고 있다. 즉, 어떤 변수가 통제변수이고 어떤 설계변수가 조정변수의 기능을 하는지 알고 있다.

② 제품의 품질특성치 y와 설계변수간의 함수형태인 전이함수(轉移函數 : transfer function)를 알고 있다. 따라서 기대손실함수를 알고 있다.

이와같은 가정하에서 Leon등은 조정변수에 영향을 주지 않는 성능척도
즉, PerMIA

$$P(d) = \min R(d, a) \qquad \text{단, } R(d, a)\text{는 기대손실함수로 정의}$$

다음과 같은 2단계 최적화절차를 개발하였다.

단계 1. $P(d)$를 최소화하는 최적수준 d^*를 결정한다.
단계 2. $R(d^*, a)$를 최소화하는 a^*를 찾는다.

[증 명]
목표치는 m이고 전수함수의 형태가 곱의 꼴

즉, $$y = \mu_y(d, a)\varepsilon_x(d)$$

단, $\mu_Y(\theta) = E_x[y]$, $Var[\varepsilon_x(d)] = \sigma_\varepsilon^2(d)$, N은 잡음인자

Taguchi의 2차손실함수를 고려하면
기대손실은

$$\begin{aligned} R(d, a) &= E_x[k(y-m)^2] \\ &= k[\sigma_y^2(d, a) + \{\mu_y(d, a) - m\}^2] \qquad (3) \\ &= k[\mu_y^2(d, a)\sigma_\varepsilon^2(d) + \{\mu_y(d, a) - m\}^2] \\ &= k[2\mu_y(d, a)\sigma_\varepsilon^2(d)\frac{\partial\mu_y(d, a)}{\partial a} + 2\{\mu_y(d, a) - m\}\frac{\partial\mu_y(d, a)}{\partial a}] \\ &= \frac{2k\partial\mu_y(d, a)}{\partial a}[\mu_y(d, a)\sigma_\varepsilon^2(d) + \mu_y(d, a) - m] \\ &= [1 + \sigma_\varepsilon^2(d)\mu_y(d, a) - m] \end{aligned}$$

이므로

$\frac{\partial R(d, a)}{\partial a} = 0$ 에 의해

$$\frac{\partial R(d, a)}{\partial a} = [(1 + \sigma_\varepsilon^2(d))\mu_y(d, a) - m]$$

$$\therefore \quad \mu(d, a) = \frac{m}{1 + \sigma_\varepsilon^2(d)} \qquad (4)$$

이다. 여기서 단, $a^*(d)$는 $R(d, a^*(d)) = \min R(d, a)$에 의해 결정된다는 a의 수준이므로 $\mu_y(d, a^*(d))$을 식 (3)에 대입하면

$$\begin{aligned} R(d, a) &= k[\sigma_y^2(d, a) + \{\mu_y(d, a) - m\}^2] \\ &= k[\mu_y^2(d, a)\sigma_\varepsilon^2(d) + \left\{\frac{m}{1 + \sigma_\varepsilon^2(d)} - m\right\}^2] \end{aligned}$$

$$= k[(\frac{m}{1+\sigma_\varepsilon^2(d)})^2\sigma_\varepsilon^2(d) + (\frac{m-m-m\sigma_\varepsilon^2(d)}{1+\sigma_\varepsilon^2(d)})^2]$$

$$= k[\frac{m^2\sigma_\varepsilon^2(d) + m^2(\sigma_\varepsilon^2(d))^2}{(1+\sigma_\varepsilon^2(d))^2}]$$

$$= k[\frac{m^2\sigma_\varepsilon^2(d)\ (1+\sigma_\varepsilon^2(d))}{(1+\sigma_\varepsilon^2(d))^2}]$$

PerMIA는

$$\therefore\ P(d) = k\frac{m^2\sigma_\varepsilon^2(d)}{1+\sigma_\varepsilon^2(d)} \tag{5}$$

이 된다.

따라서, $P(d)$를 최소화하는 d^*를 구한 후, $R(d^*, a)$를 최소화하는 a^*를 구함으로써 설계변수의 수준을 최적화할 수 있는 것이다.
한편, Taguchi의 S/N 비는

$$SN = 10\log_{10}\frac{E^2(y)}{Var(y)}$$

$$= 10\log_{10}\frac{\mu_y^2(\theta)}{\mu_y^2(\theta)\sigma_\varepsilon^2(d)}$$

$$= -10\log_{10}\sigma_\varepsilon^2(d)$$

따라서 식 (5)의 PerMIA는 $\sigma_\varepsilon^2(d)$의 증가함수이고, 다구찌의 SN 비는 $\sigma_\varepsilon^2(d)$의 감소함수이므로 전이함수의 곱의 형태이고, 2차기대손실을 가정할 경우에는 Leon등과 다구찌의 2단계 최적화절차가 일치한다.
그러나, 전이함수의 형태가 합인 경우
즉,

$$y = \mu_y(d, a) + \varepsilon_x(d) \qquad \text{단, } E[\varepsilon_x(d)] = 0$$

와 같을 경우에 2차손실함수를 가정하면 S/N 비가 조정변수에 종속적이므로 Leon등이 제안한 PerMIA를 사용할 없을 뿐만 아니라, 사전에 품질특성치 y에 관한 전이함수를 알지 못하거나 조정변수에 대한 사전지식이 없는 경우는 사용하기가 어렵다.

전이함수가 곱이고, 2차손실함수가 가정된 경우에 대해서는 다구찌의 2단계최적화절차를 이용하여 설계변수의 최적수준을 결정할 수 있으나, 다른 형태의 전이함수나 손실함수에 대해서는 다구찌의 최적화절차가 적합치 못하다.

Leon등은 망목특성치 상황에서 S/N 비의 대안으로 PerMIA란 조절독립적성능척도인 $P(d)$를 사용하여 분산을 최소화한 후에 조정변수로써 공정평균의 목표치를 설정(평균손실을 최소화하는 기대손실함수를 고려)함으로써 설계변수의 최적치를 구하고자 하였다.

실제로 통제변수나 조정변수를 분리하기 어려운 경우가 많으며, 따라서 이러한 경우에는 PerMIA가 부적합하고, 평균과 분산을 별도로 취급하는 쌍대반응법이 더 효율적이다.

3.3 Box의 파라미터 설계이론

3.3.1 Box에 의한 수정된 PerMIA[4]

(1) Phadke와 Taguchi[5]의 2단계최적화절차는 전이함수가 합의 형태인 경우에는 S/N 비가 조정변수에 종속적이므로 사용할 수 없을 뿐 아니라 독립적인 경우에도 한정적모형에만 적용가능

(2) Leon등이 제안한 모형도 전이함수를 모르는 경우에는 적용할 수 없으며 조정변수에 대한 사전지식이 필요

이러한 문제점을 해결하고자 Box는 수정된 PerMIA를 제안하였다. 설계변수 θ에 대한 목표치 m이 어떤 품질특성치 y의 평균제곱오차(MSE) 즉, $M = E(y-m)^2$을 최소화한다면 이것은 적합한 2차 손실함수의 기대손실을 최소화하는 것과 같다.

$$\mu = E(y) \text{와} \quad \sigma^2 = E(y-\mu)^2$$

이 변수 θ에 종속적이라면, $M = E[(y-m)^2] = \sigma^2(\theta) + \{\mu(\theta) - m\}^2$, $M(\theta)$을 반응으로 간주하고 최소에 근접한 조건 (d, a)를 구하기 위한 설계된 실험을 실시하며, 이것은 1차반응검사가 끝난 뒤에 반응표면을 평면근사한 최대경사방향의 실험점에서 실험을 실시하는 것이다.

수정된 PerMIA를

$$P(d) = \frac{\sigma^2(\theta)}{\{f[\mu(\theta)]\}^2} \tag{6}$$

로 정의하고, 평균과 분산을 이용하고 a의 함수인 $\mu(\theta)$에 독립적이며, d의 함수인 $P(d)$를 구하였다.

따라서

$$P(d \mid \mu) = P(d) \tag{7}$$

로 나타낼 수 있다.

성능척도가 $P(d)$로 측정된다면 설계인자 θ의 부분집합 d는 산포를 나타내고, a는 산포의 변화없이 조정할 수 있는 조정인자의 벡터이다. 따라서 μ가 고정이라면 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$M(\theta) = \{f[\mu(\theta)]\}^2 \times P(d) + \{\mu(\theta) - m\}^2$$

여기서, $P(d)$ 가 최소이면, d에 대해 $M(\theta)$는 최소가 된다. $d = d^*$**일 때** $P(d)$가 최소라면, a만을 조정하여 $M(\theta)$의 절대최소치를 구할 수 있으며, μ는 최소치 μ_0로서 조정될 수 있다.

(단, $\mu_0 = m - f(\mu_0)f'(\mu_0)P(d)$)

[PerMIA는 다음과 같은 2단계 최적화절차로 제안]
단계 1. $P(d)$ 혹은 $P(d)$의 어떤 단조함수를 최소화하도록 d를 조정
단계 2. $\mu_0 = m - f(\mu_0)f'(\mu_0)P(d)$를 만족하도록 a를 조정

3.3.2 Box의 Log Transformation Theory(로그변환이론)의한 파라미터 설계[6]

Taguchi에 의하면 품질특성치의 분산을 알 수 없거나, 혹은 y가 정규분포를 따른다고 가정할 지라도 설계변수의 수준에 따라 분산이 다르다고 주장한다. 즉, 정규성 혹은 등분산성에 대한 가정이 성립하지 않는다. 이러한 문제를 해결할 수 있는 방법으로 Box의 변환이론을 이용한다.

$Y = h(y)$가 y의 변환함수(transformation function)이고, $\sigma_Y = h'(\mu)\sigma_y$는 변환후의 안정된 분산이라면

$$M(\theta) \fallingdotseq \{h'[\mu(\theta)]\}^{-2}\sigma_Y^2(d) + \{\mu(\theta) - m\}^2 \tag{8}$$

를 최소화하는 것과 같다. 따라서 2단계과정은 d가 최소분산 $\sigma_{Y_0}{}^2$를 산출하는 값 d^*로 배치할 수 있

고, $M(\theta)$를 최소로 하는 μ_0로서 μ를 조정할 수 있다면

$$\mu_0 = m + \{h'(\mu_0)^{-3}\}h'(\mu_0)\sigma_{Y_0}^{\ 2} \tag{9}$$

[증 명]

$h'(\mu_0)$를 테일러 2차급수를 이용하여 전개하면

$$h^{-1}(\mu_{Y_0}) \doteqdot \mu_0 + 1/2\{h'(\mu_0)\}^{-3}h''(\mu_0)\sigma_{Y_0}^{\ 2} \tag{10}$$

이를 식 (9)에 대입하면 원래의 품질특성치 y의 MSE는 다음과 같이 근사시킬 수 있다.

단계 1. 변환후의 분산 σ_Y을 최소화하는 d을 구한다.
단계 2. μ_Y를 μ_{Y_0}로 조정하도록 a를 배치한다.

예를들어

$Y = y^\lambda(\lambda \neq 0)$ 라고 하면, $\mu_{Y_0} \doteqdot \left\{m[1-\frac{3}{2}\frac{(1-\lambda)}{\lambda^2}\frac{\sigma_{y_0}^{\ 2}}{m^2}]\right\}\lambda$ 이고,

$Y = \ln y(\lambda=0)$인 경우에는, $\mu_{Y_0} \doteqdot \ln m - 3/2\sigma_{Y_0}^{\ 2}$로 나타낼 수 있다.

[Box의 파라미터 설계방법을 요약]
단계 1. 변환된 품질특성치가 정규분포를 따르고 기대치가 설계변수의 1차항으로 표현되는 동시에 평균과 분산의 종속정도를 최소화할 수 있는 영역을 찾는다.
단계 2. 구한 변환영역에서 평균과 분산에 유의한 영향을 미치는 설계변수의 특성을 결정
단계 3. $E_x\{L(y, f(m))\}$를 최소화하도록 설계변수의 수준을 결정

3.4 Vining & Myers의 쌍대반응법[7]

(1) Taguchi는 S/N 비를 근거로 한 파라미터 설계과정을 개발
(2) Box, Leon등은 S/N 비 사용에 따른 통계적인 문제점을 지적

따라서 Vining & Myers는 Myers와 Carter[8]의 쌍대반응법(Dual Response Systems)과 Taguchi의 파라미터 설계이론의 접목을 시도하였다. X를 실험상 통제가능한 독립변수들로 이루어진 k×Vector라 하고, 반경 ρ인 구형 관심영역 R에서 다음과 같은 2가지 반응을 최적화하는 X ∈ R을 찾는 실험을 실시한다고 하자. 여기서 W_p, W_s를 각각 주반응(primary response)과 부반응(secondary response)이라 할 때.

$$W_p = \beta_0 + \sum_{i=1}^{k}\beta_i x_i + \sum_{i=1}^{k}\beta_{ii}x_i^{\ 2} + \sum_{i<}\sum_{j}^{k}\beta_{ij}x_i x_j + \varepsilon_p$$
$$W_s = \gamma_0 + \sum_{i=1}^{k}\gamma_i x_i + \sum_{i=1}^{k}\gamma_{ii}x_i^{\ 2} + \sum_{i<}\sum_{j}^{k}\gamma_{ij}x_i x_j + \varepsilon_s \tag{11}$$

단 , β, γ은 회귀계수이고, ε_p, ε_s는 랜덤오차

와 같은 2차 반응모형을 가정하면
W_p, W_s의 추정치 $\hat{W}_p$, $\hat{W}_s$는 다음과 같다.

$$\hat{W}_p = b_0 + X'b + X'BX$$
$$\hat{W}_s = c_0 + X'c + X'CX \tag{12}$$

단, $b_0 = \hat{\beta}_0,\ c_0 = \hat{\gamma}_0,\ b = (\hat{\beta}_1, \cdots, \hat{\beta}_k)',\ c = (\hat{\gamma}_1, \cdots, \hat{\gamma}_k)$

$$B = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2\hat{\beta}_{11} & \hat{\beta}_{12} & \cdots & \hat{\beta}_{1k} \\ \hat{\beta}_{12} & \hat{\beta}_{22} & \cdots & \hat{\beta}_{2k} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \hat{\beta}_{1k} & \hat{\beta}_{2k} & \cdots & 2\hat{\beta}_{kk} \end{bmatrix} \qquad C = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2\hat{\gamma}_{11} & \hat{\gamma}_{12} & \cdots & \hat{\gamma}_{1k} \\ \hat{\gamma}_{12} & \hat{\gamma}_{22} & \cdots & \hat{\gamma}_{2k} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \hat{\gamma}_{1k} & \hat{\gamma}_{2k} & \cdots & 2\hat{\gamma}_{kk} \end{bmatrix}$$

쌍대반응문제는 부반응 $\hat{W}_s = \theta$의 제약조건하에서 주반응 $\hat{W}_p$를 최소화하는 $X^* \in R$을 찾는 것이며, 여기서 θ는 채택가능한 한 반응치이다. 따라서 이 문제는 비선형모델(NLP Model)로 정식화하면,

$$\begin{aligned} &\text{Max(or Min)} && L = \hat{W}_P \\ &\text{Subjet to} && \hat{W}_s = \theta \\ &&& X'X = \rho^2 \end{aligned}$$

와 같고, 이 문제를 풀기 위해 라그랑즈 상수(lagrangian multiplier) λ_θ, λ_ρ를 도입하면, 목적함수는

$$L = \hat{W}_p - \lambda_\theta(\hat{W}_s - \theta) - \lambda_\rho(X'X - \rho^2) \tag{13}$$

로 된다. 그러므로

$$\partial L / \partial X = 0 \tag{14}$$

에 의해서 정점(stationary point) X_L은 다음 조건을 만족해야 한다.

$$(B - \lambda_\theta C - \lambda_\rho I)X_L = \frac{\lambda_\theta C - b}{2} \tag{15}$$

이 문제를 풀기 위하여 Myers와 Carter는 $-\pi \le \lambda_0 \le \pi$의 구간에서의 λ_0값을 $B - \lambda_\theta C$의 최대고유치보다 크거나 최소고유치보다 작은 λ_p값을 선택하는 과정을 반복하였다.

어떤 품질특성치의 평균을 μ, 분산을 σ^2이라 하고 n개의 실험점에서 m회(m≥2) 반복하는 실험을 고려하자. 여기서 y_{uj}를 u번째 실험점에서의 j번째 반응치라고 하면 u번째 실험점의 u와 σ^2의 점추정치는 각각 다음과 같다.

$$\bar{y}_u = \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} y_{uj}, \qquad s_u^2 = \frac{1}{m-1}\sum_{j=1}^{m}(y_{uj} - \bar{y}_u)^2$$

Vining과 Myers는 상기의 $\bar{y}_u$와 s_u^2을 쌍대반응법의 2가지 반응에 대응시킴으로써 다구찌의 3가지 품질특성의 상황에 관하여 다음과 같은 파라미터 설계절차를 제시

(1) 망목특성치 : μ를 부반응으로 하여 $\mu=\mu_0$의 제약조건하에서 주반응 σ^2을 최소화
(2) 망소 및 망대특성치
: σ^2을 부반응으로 하여 가능한 분산값 몇개를 설정하고 각 분산값을 제약조건으로 하는 최적의 주반응 μ값을 구하고 그 중에서 최선의 조합을 선택

4. 비교 및 분석

(1) Taguchi의 기대손실의 최소화가 바로 S/N 비의 최대화이므로 Omega 변환을 이용을 추천하고 논란이 되고 있는 S/N 비 문제는 조정후의 손실과 관련하고, 조정이라는 엔지니어링적인 개념의 이해부족으로 발생하고 있다. 즉, 어떤 조정을 하느냐에 따라 S/N 비의 형태가 달라질 수 있다는 것이다.

(2) Leon et al (조정후의 개념이 아닌 기대손실의 직접최소화 : 특정경우에만 가능)의 경우

① 망목특성치 상황에서 S/N 비의 대안으로 Per*MIA*란 조절독립적성능척도인 $P(d)$를 사용하여 분산을 최소화한 후에 조정변수로써 공정평균의 목표치를 설정(평균손실을 최소화하는 기대손실함수를 고려)함으로써 설계변수의 최적치를 구하고자 하였다.

② 조정변수에 대한 사전에 충분한 지식이 없을때에는 사용하기 어렵다는 단점

실제로 통제변수나 조정변수를 분리하기 어려운 경우가 많으며, 따라서 이러한 경우에는 Per*MIA*가 부적합하고, 평균과 분산을 별도로 취급하는 쌍대반응법이 더 효율적이다.

(3) Box의 경우

① Phadke와 Taguchi의 2단계최적화절차, Leon등이 제안한 모형의 문제점들을 해결하고자 수정된 Per*MIA*를 제안

② 특성치 y의 변환에 근거를 둔 2단계방법을 제시하였다. 그리하여 다구찌의 S/N 비는 결국 y를 로그변환한 새로운 특성치 Y의 분산과 대등하다는 것을 보였다.

③ Box의 변환이론 $f(.)$을 근거로 한 설계변수의 최적화절차 또한 문제점이 내포하고 있다.

(a) 변환영역에서 분산과 평균에 영향을 미치는 설계변수가 변환되지 않은 원래의 영역에서 어떻게 해석되는가 ?

(b) 설계변수의 수준을 결정하는 기준인 $E_x\{L(y,(m))\}$와 Box가 사용한 결정기준인

$E_x\{L(y,f(m))\}$와 같은 기준인가 ?

만약 다구찌의 2단계과정으로 부터 최적조건이 확인시행으로 재현되지 않으면 실험자는 첫번째 단계에서 S/N 비를 최적화하는 것보다는 $\sigma_y{}^2$(또는 MSD)를 최소화하는 방법으로 통제인자의 수준을 선택하여야 하며 두번째 단계에서 Box에 의하면 평균은 μ_0로 조정되어야 한다.

(4) Vining과 Mayers의 쌍대반응법의 경우

: Box가 지적한 Taguchi의 문제점을 다음과 같이 보완

① 순차적 연구가 가능하게 되었다.

② 교호작용의 영향을 반영할 수 있는 대규모의 배열의 사용이 가능하게 되었다

③ 효율적이고도 정확한 통계적 방법을 이용하였다.

④ S/N 비 대신에 평균과 분산을 이용하였다.

더우기 관심있는 품질특성치의 평균과 분산을 이용한 모형을 이용함으로써 어떤 요인들이 평균 및 분산에 주로 영향을 주는지 직접 판별할 수 있다.

5. 결 론

(1) 품질향상을 위한 다구찌의 기본철학에 대해서는 이론이 없는 것으로 보이나 직교배열을 이용한 실험계획과 S/N 비를 이용한 분석방법은 많은 논란의 대상

(2) 그러나, 다구찌 방법이 비록 이론적으로 완벽하지는 않다고 하더라도 그동안 실제 문제의 해결을 통해 품질향상을 위한 하나의 유용한 방법으로 인정받고 있다

. 본 연구에서는

① Taguchi S/N 비, Leon등의 Per*MIA*, Box의 변환이론 및 수정된 Per*MIA*, Vining과 Myers의 쌍대반응법에 의한 파라미터 설계방법을 비교하였다.

② 그러나 어떤 경우에 어떤 방법이 좀 더 효과적인가를 파악하기 위해 다구찌가 제안하고 있는 성능통계량인 S/N 비와 그 대안들에 대한 이론적, 실제적 많은 연구가 수행되어야 하리라 본다.

③ 그리고 한 제품에서 성능특성치가 다특성일때의 최적설계에 관한 연구등이 수행되어야 하리라고 여겨진다.

參考文獻

[1] Phadke, M. S., "Quality Engineering Using Robust Design", Prentice-Hall, pp.131-132, 1989.

[2] Taguchi, G. and Phadke, M. S., "Quality Engineering through Design Optimization". ***Conference Record, GLOBECOM 84 Meeting, IEEE Communication Society***. Atlanta, Ga, pp.1106-1113, November 1984.

[3] Leon, L. V., Shoemaker, A. C., and Kacker, R. N., "Performance Measures Independent of Adjustment : An Example and Extension of Taguchi's Signal-to-Noise Ratios", Technometrics, Vol. 29, pp.252-285, 1987.

[4] Box, G., "Signal-to-Noise Ratios, Performance Criteria, and Transformations", Technometrics, Vol. 30, pp.1-17, 1988.

[5] Phadke, M. S., "Quality Engineering Using Design of Experiments" Proceedings of the Selection on Statistical Education, American Statistical Association, pp.11-20, 1982.

[6] Nair, V. N. and Pregibon. D., "A Data Analysis Strategy for Quality Engineering Experiments", AT&T Technical Journal, 65, pp.73-84, 1986.

[7] Vining, G. G. and Myers, R. H., "Combining Taguchi and Response Surface Philosophies", JQT, Vol. 22, pp.38-45, 1990.

[8] Mayers, R. H. and Carter, W. H., JR., "Response Surface Techniques for Dual Response Systems", Technometrics, Vol. 15, pp.301-317, 1973.