시간에 따라 변하며 추계적 수요를 갖는 다단계 재고시스템의 확률 분포에 관한 연구

- Some Probability Distributions for a Multi-echelon Inventory System with Time-varying, stochastic Demands -

김 지 승*
Kim, Ji-Seung

Abstract

Much of the past work regarding repairable item stockage has concentrated on the development of models and policies for systems in steady state. However, there are important situations in which the transient behavior is most important. A dramatic example of this is the potential dynamic behavior exhibited by demands and service in the deployment of an Air Force squadron at the onset of a conflict. The purpose of this paper is to derive some probability distributions necessary for providing an integrated approach for a multi-echelon inventory system with nonstationary demands and service rates.

1. 서론

고전적 재고 이론의 대부분은 소비성 제품을 대상으로 한다. 즉, 수요를 만족시킨 후 영원히 그 시스템에서 떠나는 제품에 관한 것이다. 그러나, 수리 부속을 포함하고 있는 고가품 등의 경우 고장 발생시 일정 기간의 수리 기간을 거친 후 다시 시스템으로 복귀하여 수요를 충족시키며 이러한 과정은 반복된다. 이러한 예로 비행기, 선박, 통신 네트워크 상의 부품 등을 들 수 있다. 특히 공군,해군 등에서의 수리 가능한 부품에 대한 투자는 전 투자의 50 % 를 상회하고 있다. Sherbrooke[8]에 의하면 미 공군의 투자중 약 52 % 가 이러한 부품에 대한 투자이고, 미 해군의 경우 Schrady가 추정한 것에 의하면 58 %로 추정된다고 한다. 우리 나라 군의 경우도 유사할 것이다. 군 뿐만 아니라, 민간 항공 산업과 같은 고가품 산업에 있어서 수리 가능한 부품에 대한 재고 수준을 결정 하는 것은 매우 중요한 의사 결정이라 하겠다.

수리가능한 부품은 일반적으로 고가 품목이면서 수요가 많이 발생하는 것이 아니기 때문에 기존의 대부분 연구는 (S-1,S) 재고 정책에 촛점이 맞춰져 있다. 또한 이들 연구들은 안정된 상태(steady state)의 시스템에 관한 모형화 방법에 관심을 기울였다. 즉, 기본 수요 과정이 시간에 따라 homogeneous하다는 것이다. 이러한 연구의 대표적인 것으로 Sherbrooke[8] 의 METRIC을 들 수 있다. METRIC류의 연구로는 Sherbrooke[9] , Muckstadt[6,7] , Graves[2,3] , Simon[10] 등의 연구가 있다. 물론 평상시의 의사 결정에 있어서는 안정상태의 모형이 적합하다. 그러나 시간에 따라 수요율이 달라지는 경우 안정된 상태의 모형은 적합치 않으므로, 일시적 행위를 분석할 수 있는 모형이 필요하다. Gross 와 Miller[4] 는 무작위(Randomization) 알고리즘을 이용한 Truncated state space 접근 방법을 사용하여 시스템의

* 경북산업대학교 산업공학과

일시적 행위(transient behavior)를 분석하는 방법을 연구하였다. 예를 들어 공군과 같은 시스템에 있어 , 항공기의 비행시간, 마모율 등에 따라 수리를 요하는 부품의 수는 큰 영향을 받는다. 특히 전시 상황과 같이 수요가 급증하는 경우에 안정된 시스템을 가정하여 한 의사 결정은 실제와 큰 차이가 난다.

Muckstadt[5]는 수요가 시간에 따라 변할 때 안정된 시스템 모형하의 backorder 수준과 시간의 변동을 고려한 모형하의 backorder 수준이 크게 다름을 보여 주었다. 따라서 본 논문의 목적은 수요가 nonstationary poisson distribution을 따를 경우, 비안정상태의 재고시스템 분석에 필요한 각종 변수의 확률 분포를 유도하는 것이다.

2. 수리 가능한 부품의 다단계 재고 모형 및 가정

수리 가능한 부품은 항공기, 선박 같은 제품을 형성하는 부품 중에서 많은 비율을 차지하고 있다. 또한 수리 가능한 부품은 일반 부품보다 단가가 매우 높고 제품 성능에 중요한 영향을 미친다. 따라서 이러한 부품을 효과적으로 운영하는 것이 경제적인 면에서 필수적이다.

본 모형에서의 수리 가능한 부품은 2단계 재고/수리 시스템에 의해 지원된다. 항공기와 같은 제품들은 기지를 운영하기 위해 여러 기지에 배치되어 있다. 각 기지에는 각 부품에 관한 재고를 저장하는 창고와 부품을 수리할 수 있는 정비소가 있다. 또한 중앙 창고에도 각 기지를 지원해 주기 위한 정비소와 부품 창고가 있다.

수리 가능한 부품이 기지에서 고장나면, 그것은 일단 기지 창고에 보내지고 기지 창고에 그 부품의 재고가 있으면 일단 교환된다. 고장난 부품이 기지 정비소에서 수리되어질 수 있으면 수리되어져 다시 기지 창고로 보내진다. 그러나 고장난 부품의 수리를 위해 매우 정교한 고가의 장비가 요구되거나 특별한 정비 기술이 요구되어 기지 정비소에서 수리되어질 수 없으면, 그 부품은 중앙 창고의 정비소로 보내진다. 이 경우 기지에서는 중앙 창고에 고장난 부품의 교체를 위해 주문을 낸다. 중앙 창고에 재고가 있을 경우에는 즉시 기지로 보내지나, 재고가 없을 경우에는 정비소에서 수리되어질 때까지 시간 지연이 생긴다. 본 모형에서는 외부에서 구입하는 단계는 고려하지 않는다.

수리 가능한 부품의 재고 정책에 사용되는 (S-1,S)재고 정책은 Base Stock 정책 또는 One-for-One 주문 정책으로도 불리며 수요는 적지만 고가의 품목이어서 주문비가 재고 유지비나 고갈비용에 비교하여 상대적으로 무시될 수 있을 때 적용하는 (s,S) 정책에서 s = S-1인 특수한 경우이다. (s,S)정책에서는 주문점 s와 재고 위치 S(Inventory Position)가 결정되고 재고 위치 (현재고 + 주문중 재고 - 고갈 재고) 가 s이하로 떨어지면 재고 위치를 S까지 올리는 주문을 한다. 따라서 (S-1,S) 정책은 수요가 발생할 때마다 즉시 주문을 하여 재고 위치를 항상 S수준으로 유지하는 재고 정책이다.

(S-1,S) 정책에서 S가 특정 부품의 재고 수준으로 결정되고 X가 임의의 시점에서 주문중 재고 갯수라하면 X는 대기 행렬 과정을 따른다. 즉, 수요가 발생할 때마다 순재고(현재고 - 고갈 재고)가 줄어드는 대신에 (S-1,S) 정책에 따라 주문중 재고 X는 증가한다. 또 주문인도기간 후에 주문이 도착함에 따라 X는 감소한다. 본 모형에서의 주문중 재고 갯수는 수리중인 부품의 갯수가 되고 주문인도기간은 수리시간이 된다. 이때 S - X 는 순재고(현재고 - 고갈 재고)를 의미하며 양수일 때는 현재 재고를 보유하고 있음을 나타내며 음일 때는 backorder가 발생함을 의미한다. 따라서 주문중인 부품의 분포를 유도함으로써 순재고의 분포를 바로 유도할 수 있다.

주문중인 부품은 기지에서 수리중일 수도 있고 중앙 창고에서 수리중일 수도 있다. 또한 중앙 창고에서 기지로 이송되고 있는 것도 있다. 본 연구에서는 상기의 각 상태를 보급로(pipeline)라 정의한다. 따라서 주문중인 부품의 합을 구하기 위해서는 각 보급로에 있는 부품

수를 모두 합하면 된다.

본 연구에 있어 METRIC류의 연구와 다른 가정은 다음과 같다.

a) 수요는 nonstationary 포아송 분포를 따른다. 또한 각 기지에서의 수요는 독립적으로 발생한다.

b) 수리시간 분포함수는 F(s,t)이다. F(s,t)는 시간 s에 service를 개시하여 시간 t에서 완료될 확율을 의미한다.

상기 가정 a), b) 는 기존의 연구들에서 나타나는 안정 확률 분포의 가정하에 안정상태의 재고 수준을 결정함에 따라, 상황의 시간에 따른 변화를 고려하지 못하는 단점을 극복할 수 있게 하여 준다. 기존의 연구에서 사용된 stationary 포아송 또는 복합 포아송 분포는 수요율을 상수 r로 가정하므로 시간에 따른 수요율의 변화를 고려하지 못한다. 따라서 본 모형에서는 r을 시간의 함수 r(t)로 설정하여 시스템의 동적 상황을 모형화한다. 또한 service 분포에 있어서도 기존의 연구들은 평균 수리 시간을 시간에 무관하게 상수 T로 설정하여 시간에 따라 변화하는 정비 능력을 표현하지 못했다. 따라서 본 모형에서는 수리시간 분포 함수를 F(s,t)로 일반화하여 시간에 따라 발생하는 여러 상황의 변화들을 수용할 수 있게끔 하였다.

3. 시간 종속적인 보급로와 확률 분포

고전적인 안정상태의 재고 모형은 수리-재고 과정의 각 보급로에 있는 부품의 양을 부품 고장율이 시간에 종속적이 아닌 안정 상태의 확률 분포에 의해 표현한다. 널리 알려진 Palm의 정리에 의하면, 수요가 평균율 λ인 포아송 분포를 따르고 서비스 시간이 수요에 독립적이며 평균 T인 분포를 갖는다면 수리 용량이 무한대라는 가정하에 서비스 받고 있는 부품이 k개일 확률은 평균 λT인 포아송 분포를 따른다. 즉,

$$P(k \text{ units in service}) = P_k = e^{-\lambda T}\frac{(\lambda T)^k}{k!}$$

Feeney 와 Sherbrooke은 이러한 결과를 복합 포아송 분포인 경우까지 확장시켰다. 이러한 모든 결과는 수요와 서비스 분포가 안정적(stationary)일 경우에만 적용된다. 따라서 이러한 접근 방법은 수요가 시간에 따라 변하는 상황에 있어서는 정확하게 적용될 수 없다. 또한 안정적 상태 모형에 있어 평균 수리시간이 T로 고정되어 있기 때문에 시간에 따른 정비 능력을 고려하지 못한다. 따라서 본 연구에서는 매일 수요율 r(t)와 service 분포 F(s,t)를 도입함으로써 위의 가정을 완화시킨다. 먼저 수요 과정이 다음 정의1과 같은 nonhomogeneous(nonstationary) Poisson 분포를 따른다고 하자.

[정의 1] counting process { N(t), t ≥ 0 }가 다음 조건을 만족할 때 intensity 함수 r(t)를 가진 nonstationary(nonhomogeneous) Poisson 분포라고 한다.

i) $N(0) = 0$
ii) $\{ N(t), t \geq 0 \}$ has independent increments.
iii) $P\{ N(t+h) - N(t) \geq 2 \} = o(h)$
iv) $P\{ N(t+h) - N(t) = 1 \} = r(t)h + o(h)$

stationary Poisson process와의 차이점은 iv)번 성질에 있다.

여기서 N(t) = t 까지의 수요 갯수

$m(t) = \int_0^t r(t)\,dt$ 라 놓자.

그러면 구간 t 와 t + s 사이에 k 개의 수요가 있을 확률은 아래와 같다.

$$P[\,N(t+s) - N(t)=k] = e^{-(m(t+s)-m(t))}\frac{[m(t+s)-m(t)]^k}{k!}, \quad k \geq 0$$

상기 식에서 m(t)를 평균값 함수(mean value function)라 한다.또한 안정상태의 모형에서는 평균 수리 시간은 상수 T로 고정시켰으므로 동적 상황을 표현할 수 없다.
따라서 service 분포 즉 수리시간 분포함수를 F(s,t)로 다음과 같이 정의하자.

[정의 2] 수리시간 분포함수

F(s,t) : 시간 s에 service를 시작하여 시간 t까지 끝날 확률

위와 같이 정의하면 부품 수리의 시간에 따른 여러 상황을 표현하는데 매우 편리하다.

앞으로 유도해야 할 확률 분포는 수리 보급로에 있는 부품 수에 대한 것이므로 $\bar{F}(s,t) = 1 - F(s,t)$, 즉 시간 s에 service가 시작하여 t까지 수리 보급로에 있을 확률을 도입하여 각종 수리시간에 대한 분포를 구해보면 아래와 같다.

i) 수리시간이 상수 T인 경우

$$\bar{F}(s,t) = \begin{cases} 1, & t-s < T \\ 0, & t-s \geq T \end{cases}$$

ii) 수리시간이 평균 T인 지수 분포인 경우

$$\bar{F}(s,t) = e^{-(t-s)/T}$$

iii) 시간 a 까지는 수리 능력이 없다가, a 이후 수리 시간이 평균 T인 지수 분포를 따를 경우

$$\bar{F}(s,t) = \begin{cases} 1, & t < a \\ e^{-(t-a)/T}, & s \leq a \leq t \\ e^{-(t-s)/T}, & a < s \leq t \end{cases}$$

iv) 시간 a 에서 수리 시간이 평균 T_1 인 지수 분포에서 평균 T_2 인 지수 분포로 변하는 경우

$$\bar{F}(s,t) = \begin{cases} e^{-(t-s)/T1}, & t \leq a \\ e^{-(t-a)/T2}\, e^{-(a-s)/T1}, & s < a < t \\ e^{-(t-s)/T2}, & a \leq s < t \end{cases}$$

동적 모형을 수립하기 위해서는 안정상태의 모형과 마찬가지로 시간 t에 수리중인 부품 수의 분포를 구하는 것이 우선 과제이다. 다음 정리를 이용하여 이 분포를 구할 수 있다.

[정리 1] 도착 분포가 intensity 함수 r(t), 평균값 함수 m(t) 를 갖는 nonhomogeneous Poisson 과정을 따를때 X(t)를 시간 t 에 시스템에 있는 customer(부품)의 수를 나타낸다고 하자.

수리 과정이 수요함수에 독립이고 수리 능력이 무한대라고 하면 X(t)는 평균이

$$\int_0^t \bar{F}(s,t)dm(s) = \int_0^t \bar{F}(s,t)r(s)ds$$

를 갖는 Poisson 분포를 따른다.

(증명) 참고문헌 [1] 참조

상기 정리에 의하면 λ(t)를 nonstationary Poisson process의 평균이라 할때 시점 t의 수리 보급로에 k 개의 부품이 있을 확률은 다음과 같다.

$$\text{Prob}(k) = \frac{\lambda(t)^k e^{-\lambda(t)}}{k!}$$

$$\text{where } \lambda(t) = \int_0^t \bar{F}(s,t) \cdot r(s)\, ds$$

r(t): 수요율

각 수리 보급로에 있는 부품 수를 구하는 것이 구하는 것이 중요 문제인데, 각 보급로에 들어오는 부품의 분포가 동일하다면 총 보급로의 양을 구할 때 매우 편하다. 예를 들어 어떤 부품이 고장이 일어났을 때, 기지에서 고쳐질 확률이 p이고 중앙 창고로 보내질 확률이 1-p 인 경우를 생각해 보자.

기지에서의 수리시간 분포함수가 $F_1(s,t)$, 중앙 창고에서의 수리시간 분포함수가 $F_2(s,t)$라 하면, $F_2(s,t)$가 수송시간을 고려한 경우 총 보급로에 있는 평균량은 다음과 같이 된다.

$$\lambda(t) = \int_0^t r(s)[\, p\bar{F}_1(s,t) + (1-p)\bar{F}_2(s,t)\,]ds$$

또는

$$\lambda_1(t) = \int_0^t r(s) \cdot p\bar{F}_1(s,t)\, ds$$

$$\lambda_2(t) = \int_0^t r(s) \cdot (1-p)\bar{F}_2(s,t)\, ds$$

$$\lambda(t) = \lambda_1(t) + \lambda_2(t)$$

위와 같이 각 보급로에 있는 평균량을 분리 또는 결합시킬 수 있는 것은 안정 상태의 모형과 마찬가지로 포아송 분포의 성질에 의하여 가능하다. λ(t)의 의미를 해석해 보면 t시점 까지 고장난 것중 t시점에서 수리가 끝나지 않은 평균 부품 수이다.

예제) 기지의 수요율이 다음과 같은 경우를 생각해 보자.

$$r(t) = \begin{cases} m_1 & , t < a \\ m_2 & , t \geq a \end{cases}$$

a 시점은 수요율이 변하는 시점이다. 예를 들어 비행기의 경우, 비행 대수의 변화 또는 비행시간의 변화로 인해 수요율이 달라지는 시점이라고 볼 수 있다. 기지에서 부품이 고처질 확률이 p 이고 , 중앙 창고로 보내져 수리될 확률이 1-p 라고 하자. 또한 수리시간 분포함수 (F(s,t))는 기지에서는 u_B, 중앙 창고에서는 u_c를 평균 수리율로 갖는 지수 분포를 따른다고 하자. 마지막으로 처음 b시간 동안(b<a)은 중앙 창고로 부품이 보내질 수 없다고 가정하면 수리 분포는 다음과 같다.

기지에서의 수리 분포 $\bar{F}_B(s,t) = e^{-u_B(t-s)}$

중앙 창고에서의 수리 분포 $\bar{F}_C(s,t) = \begin{cases} 1 & , s\leq t < b \\ e^{-u_C(t-b)} & , s< b \leq t \\ e^{-u_C(t-s)} & , b\leq s < t \end{cases}$

기지 수리 보급로에 있는 평균 부품 수 $\lambda_B(t)$는 다음과 같이 구해진다.

$$\lambda_B(t)=\int_0^t p\, \bar{F}_B(s,t) r(s)\, ds$$

$$\lambda_B(t)=\int_0^t m_1 \cdot p\, e^{-u_B(t-s)} ds = p \frac{m_1}{u_B}(1 - e^{-u_B t}) \ , \ t < a$$

$$\lambda_B(t)=\int_0^a m_1 \cdot p\, e^{-u_B(t-s)} ds \ +$$

$$\int_a^t m_2 \cdot p\, e^{-u_B(t-s)} ds \ , \ t \geq a$$

$$= p \frac{m_1}{u_B}(1 - e^{-u_B a})\, e^{-u_B(t-a)} + p\frac{m_2}{u_B}(1 - e^{-u_B(t-a)})$$

또한, 중앙 창고 수리 보급로에 있을 평균 부품 수 $\lambda_c(t)$는 아래와 같다.

$$\lambda_C(t)=\int_0^t (1-p)\, \bar{F}_c(s,t) r(s)\, ds$$

$$\lambda_C(t)=\int_0^t 1 \cdot (1-p)\, m_1\, ds = (1-p) m_1 t, \ \ t < b$$

$$\lambda_C(t)=\int_0^b m_1'(1-p)\, e^{-u_C(t-b)}\, ds \;+$$

$$\int_b^t e^{-u_C(t-s)}\, m_1(1-p)ds$$

$$= (1-p)m_1 b\, e^{-u_c(t-b)} + (1-p)\frac{m_1}{u_C}(1 - e^{-u_C(t-b)}),\ b \le t < a$$

$$\lambda_C(t)=\int_0^b m_1'(1-p)\, e^{-u_C(t-b)}\, ds \;+$$

$$\int_b^a e^{-u_C(t-s)}\, m_1(1-p)ds \;+$$

$$\int_a^t e^{-u_C(t-s)}\, m_2(1-p)ds$$

$$= (1-p)m_1 b\, e^{-u_C(t-b)} + (1-p)\frac{m_1}{u_C}(1 - e^{-u_C(a-b)})\, e^{-u_c(t-a)}$$

$$+(1-p)\frac{m_2}{u_C}(1 - e^{-u_C(t-a)}),\quad a \le t$$

그러므로 총 보급로에 있는 평균 부품 수

$$\lambda_T(t) = \lambda_B(t) + \lambda_C(t)$$

와 같이 된다.

따라서 시점 t에 총 수리 보급로 에 k개의 부품이 있을 확률은 아래와 같다.

$$P\{ X_B(t) + X_C(t) = k \} = \frac{\lambda_T(t)^k\ e^{-\lambda_T(t)}}{k!}$$

t가 커질수록 $\lambda_T(t)$는 안정 상태의 결과에 수렴하는 것을 알 수 있다. 즉,

$$\lambda_T(\infty)= p\,\frac{m_2}{u_B} + (1-p)\,\frac{m_2}{u_C}$$

이와 같이 동적 결과는 transient behavior 동안의 수리 받고 있는 부품의 분포에 관한 많은 정보를 주고 있다. 따라서 이 결과를 우리는 동적 상황에서의 부품 재고 고갈 확률을 얻는데 사용할 수 있다.

4. 결론

본 논문의 목적은 기존의 연구들에서 나타나는 안정 확률 분포의 가정하에 안정상태의 재고 수준을 결정함에 따라, 상황의 시간에 따른 변화를 고려하지 못하는 단점을 보완하는 것이다. 기존의 연구에서 사용된 stationary 포아송 또는 복합 포아송 분포는 수요율을 상수 r로 가정하므로 시간에 따른 수요율의 변화를 고려하지 못한다. 따라서 본 모형에서는 r을 시간의 함수 r(t)로 설정하여 시스템의 동적 상황을 모형화했다. 또한 service 분포에 있어서도 기존의 연구들은 평균 수리 시간을 시간에 무관하게 상수 T로 설정하여 시간에 따라 변화하는 정비 능력을 표현하지 못했다. 따라서 본 연구에서는 수리시간 분포 함수를 F(s,t)로 일반화하여 시간에 따라 발생하는 여러 상황의 변화들을 수용할 수 있게끔 하였다.

참 고 문 헌

1. 김지승, "수리 가능한 부품의 동적 다단계 재고 시스템", 경영과학연구,제1집,1992
2. Graves,S.C. and De Bodt,A.M.," Continuous-Review Policies for a Multi-Echelon Inventory Problem with Stochastic Demand", Mgt. Sci.,Vol 31,No 10,Oct.,1985
3. Graves,S.C.," A Multi-Echelon Inventory Model for a Reparable Item with One-for-One Replenishment", Mgt. Sci.,Vol 31, No 10, Oct. , 1985
4. Gross,D.,Kioussis.C.L. and Miller,R.D., " Transient Behavior of Large Markovian Multiechelon Repairable Item Inventory Systems Using a Truncated State Space Approach ", Naval Res. Logis., vol 34, 1987
5. Muckstadt, J.A., Comparative Adequacyof Steady-State Versus Dynamic Models for Calculating Stockage Requirements, The Rand Corporation, R-2636-AF,1980
6. Muckstadt,J.A., " A Model for a Multi-Item , Multi-Echelon, Multi-Indenture Inventory System ", Mgt. Sci., vol 20, No 4, Dec., 1973
7. Muckstadt,J.A.," Three-Echelon, Multi-Item Model for Recoverable Items", Naval Res. Logis. Quad., vol 26, 1979
8. Scherbrooke,C.C., " METRIC : A Multi-Echelon Technique for Recoverable Item Control " Oper. Res., vol 16, 1968
9. Scherbrooke,C.C., " VARI-METRIC : Improved Approximation for Multi-Indenture, Multi-Echelon Availability Models", Oper. Res., vol 34, No 2, 1986
10. Simon,R.M.," Stationary Properties of a Two Echelon Inventory Model for Low Demand Items", Oper. Res., Vol 19,No 3,1971