部分負在庫를 갖는 經濟的 生産量模型의 設計에 관한 研究

-A Study on the Design of Economic Production Quantity Model with Partial Backorders-

이 강 우*
Lee, Kang-Woo
이꾸따세이조**
Ikuta, Seizo

Abstract

This paper deals with an economic production quantity model with partial backorders for the situation in which production lead time is deterministic and demand during lead time follows a continuous distribution. In the model, an objective function is formulated to minimize an average annual inventory cost. And then the procedure of iterative solution method for the model is developed to find both production reorder point and production quantity. Finally, sensitivity analysis for various partial backorder ratios and standard deviations of demand during production lead time are presented.

1. 서론

본 연구는 단일품목 · 단일단계의 생산 · 재고시스템을 대상으로 생산조달기간이 일정하고, 생산조달기간중의 수요가 확률적으로 변동하는 상황하에서의 부재고(backorders)와 유실판매(lost sales)를 동시에 고려하여 경제적인 생산량모형을 구축하고 이를 토대로 경제적 생산량과 생산발주점을 구하고자 한다. 따라서 본연구에서 제시하는 모형은 기존의 부재고모형과 유실판매모형이 통합된 생산 · 재고모형이라 할 수 있다.

여기서 현재까지 연구된 부분부재고를 고려한 연구를 경제적 발주량모형과 경제적 생산량모형으로 구분하여 개관하여 보면 다음과 같다. 먼저 부분부재고를 고려한 경제적 발주량모형으로 확정적인 조달기간과 확정적 수요하에서 부재고와 유실판매를 동시에 고려한 부분부재고모형이 여러 학자들에 의해 연구되어 왔다[2-5]. 이들 연구는 모두 품절기간중 발생하는 부재고비율(backorder ratio)이 부재고기간과는 무관하게 일정하다는 가정하에 모형을 구축하여 경제적인 발주량을 구하고 있다. 최근 金과 春日井[8]은 수요와 조달기간이 확정적 상황하에서 부재고비율을 부재고기간 의존함수로 정의하여 부분부재고를 고려한 경제적 발주량모형과 해법을 제시하였다. 한편 확정적인 조달기간과 확률적인 수요를 전제로 시간가중 부재고와 유실판매를 동시에 고려한 단일단계의 부분부재고모형이 Kim과 Park[1]에 의해 개발되고 반복적 해

---

* 부산수산대학교 경영학과
** 일본 쓰꾸바대학 사회공학계
※ 이 논문은 교육부 지원 한국학술진흥재단의 1994년도 대학교수 국비해외파견연구 지원 학술연구조성비에 의하여 연구되었음.

법이 제시되었다. 그후 姜과 朴[6]은 확정적 수요와 확률적 조달기간을 전제로 품절기간중의 수요가 모두 부재고되는 상황하에서 경제적 발주량을 구하는 해법을 제시하였다. 李와 李[11]는 수요가 확정적이고 조달기간이 확률적인 상황하에서 부재고비율이 일정하다는 전제하에서 시간가중 부재고와 유실판매를 동시에 고려한 부분부재고모형을 개발하고 근사적인 해를 구하기 위한 반복해법 절차를 제안하였다. 그후 金, 李 및 春日井[7]은 이들의 연구를 기초로 동일한 상황하에서 최적해를 구하는 해법을 제시하였다. 한편 李[12]는 金, 李 및 春日井[7]의 연구를 기초로 하여 부재고비율을 부재고기간의 선형함수로 정의하여 선형부재고비율을 갖는 확률적 부분부재고모형을 구축하고 반복적인 수치해법을 제시하기에 이르렀다.

부분부재고를 고려한 경제적 생산량모형에 관한 연구는 부분부재고를 고려한 경제적 발주량모형에 비하여 아직 초보적인 단계에 있으며 이에 관한 문헌도 매우 적다. 최근 남과 김[10]은 수요와 생산조달기간 및 부재고비율이 확정적 상황하에서 경제적 생산량모형을 구축하고 해법을 제안하였다. 한편 金과 春日井[9]은 고객의 구매행동을 반영하기 위하여 부재고비율을 부재고기간의 함수로 정의하고 확정적 상황하에서 부분부재고를 허용하는 경제적 생산량모형을 개발하고 경제적 생산량과 생산발주점을 구하는 반복적 해법을 제안하였다.

본 연구는 생산조달기간과 부재고비율이 일정하고, 생산조달기간중의 수요의 확률분포가 연속적인 확률분포에 따르는 상황하에서 생산준비비용, 재고유지비용, 시간가중 부재고비용 및 단위당 유실판매비용을 고려하여 연간 기대생산재고비용함수를 도출하고 해를 구하기 위한 반복적 해법을 제시하고자 한다.

한편 본 연구에서 제시된 연간 기대생산재고비용함수는 $V \to \infty$ 이면 조달기간중의 수요가 확률적 상황하에서 부분부재고를 고려하여 도출한 Kim 과 Park[1]의 경제적 발주량모형의 연간 기대재고비용함수로 환원된다.

2. 모형의 정식화

2.1 모형의 가정과 기호

가정 :

가) 제품의 생산비용은 생산량에 무관하고 일정하다.
나) 前期의 부재고는 次期에 모두 만족된다.
다) 생산조달기간은 일정하다.
라) 생산율은 일정하고 생산조달기간중의 수요량은 연속적인 확률분포에 따른다.
    단, 생산율은 수요율보다 크다.

기호 정의:

A	:	주기당 생산준비비용(원/주기)
β	:	부재고비율 $(0 \le \beta \le 1)$
D	:	연간 기대수요량(個/年)
$f(x)$	:	생산조달기간중의 수요의 연속확률밀도함수
H	:	단위당 연간 재고유지비용(원/個·年)
I_{max}	:	주기당 최대기대재고수준
I_{min}	:	주기당 최소기대재고수준
$K(R, r)$	:	연간 기대생산재고비용함수(원)
L	:	생산조달기간 $(L = \mu/D)$

P : 단위당 유실판매비용(원/個)
Q : 주기당 생산량(個)
R : 주기당 기대수요량(個)
r : 생산발주점(個)
T : 주기의 기대길이(expected length)(年)
V : 연간 생산율(個/年)
x : 생산조달기간중의 수요량(個)
$y(r)$: 주기당 기대품절수량(個)
μ : 생산조달기간중의 기대수요량(個)
σ : 생산조달기간중의 수요의 표준편차(個)
π : 연간단위당 부재고비용(원/個・年)

2.2 모형의 정식화

그림 1은 생산조달기간이 일정하고 생산조달기간중의 수요가 불확실한 상황하에서의 부분부재고를 고려한 생산・재고시스템을 도식화한 것이다. 여기서 생산조달기간중의 수요의 확률밀도함수를 $f(x)$라 하면 주기당 기대품절수량 $y(r)$은 다음과 같다.

$$y(r) = \int_r^{\infty} (x-r)\, f(x)dx$$

그림 1에서 알 수 있는 바와 같이 생산조달기간중의 수요의 크기에 따라 품절이 있는 주기 $(x > r)$와 품절이 없는 주기 $(0 \le x \le r)$로 구분된다. 먼저 그림 1로부터 품절이 있는 주기와 품절이 없는 주기의 최대재고수준과 최저재고수준을 구하면 다음과 같다.

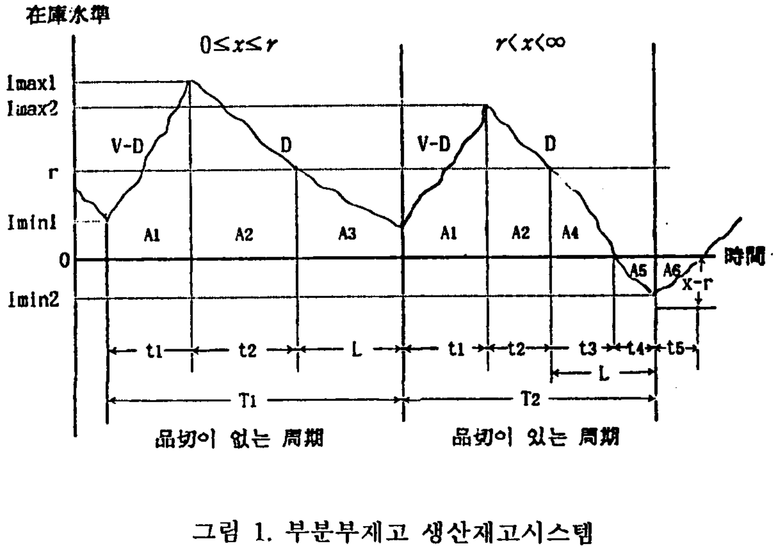

그림 1. 부분부재고 생산재고시스템

$$I_{\max 1}=r-x+b_1 Q \qquad \text{단, } b_1=1-D/V$$
$$I_{\max 2}=b_1 Q-\beta(x-r)$$
$$I_{\min 1}=r-x$$
$$I_{\min 2}=\beta(x-r)$$

따라서 위식을 이용하여 주기당 최대기대재고수준 ($I_{\max}$)과 주기당 최소기대재고수준 ($I_{\min}$) 및 재고수준의 변화에 따른 그림 1의 각 시간을 구하면 다음과 같다.

$$I_{\max}=\int_0^r I_{\max 1} f(x)dx+\int_r^{\infty} I_{\max 2} f(x)dx=b_1 Q+r-\mu+(1-\beta)y(r)$$

$$I_{\min}=\int_0^r I_{\min 1} f(x)dx+\int_r^{\infty} I_{\min 2} f(x)dx=r-\mu+(1-\beta)y(r)$$

$$t_1=Q/V$$
$$t_2=(I_{\max}-r)/D$$
$$L=\mu/D$$
$$t_3=rL/x \quad (\because\ t_3 : L=r : x)$$
$$t_4=L(1-r/x)$$
$$t_5=\beta y(r)/(V-D)$$

한편, 그림 1에서 주기당 기대수요량 (R)과 주기의 기대길이 (T)는 다음과 같다.

$$R=(t_1+t_2+L)D=Q+(1-\beta)y(r) \tag{1}$$
$$T=R/D \tag{2}$$

여기서 연간 생산재고관련비용을 유도하면 다음과 같다.

(1)연간 기대생산준비비용

$$\frac{A}{T}=\frac{AD}{R} \tag{3}$$

(2)연간 기대재고유지비용

먼저 그림 1로부터 주기당 기대재고량을 구하기 위하여 기대면적 A_1과 기대면적 A_2를 구하면 다음과 같다.

$$E(A_1+A_2)=(I_{\max}+I_{\min})t_1/2+(I_{\max}+r)t_2/2$$
$$=\frac{Q-\mu+(1-\beta)y(r)}{2D}\{2r-\mu+(1-\beta)y(r)+b_1Q\}+\frac{Q}{2V}\{\mu-(1-\beta)y(r)\}$$

한편, 그림 1에서 품절이 없는 주기의 기대면적 A_3와 품절이 있는 주기의 기대면적 A_4를 구하면 다음과 같다.

$$
\begin{aligned}
E(A_3+A_4) &= \frac{L}{2}E\left\{r+(r-x)\right\}+\frac{r}{2}E(t_3) \\
&= \frac{L}{2}\left[\int_0^r (2r-x)f(x)dx+\int_r^\infty \frac{r^2}{x}f(x)dx\right] \\
&= \frac{\mu}{2D}\left[2r-\mu+\int_r^\infty \frac{(x-r)^2}{x}f(x)\,dx\right]
\end{aligned}
$$

따라서 주기당 기대재고량은 위의 두식을 합하면 되고 여기에 H/T를 곱하여 연간 기대재고비용을 구하면 다음과 같다.

$$
H\left[\frac{R}{2}+r-u-\frac{DQ}{2V}\left\{1-\frac{(1-\beta)y(r)}{R}\right\}+\frac{\mu}{2R}\int_r^\infty \frac{(x-r)^2}{x}f(x)dx\right]
$$

위식의 Q를 식(1)에 의하여 $R-(1-\beta)y(r)$로 변환하면 연간 기대재고비용은 식(4)와 같다.

$$
H\left[\frac{R}{2}+r-u-\frac{D}{2VR}\{R-(1-\beta)y(r)\}^2+\frac{\mu}{2R}\int_r^\infty \frac{(x-r)^2}{x}f(x)\,dx\right] \tag{4}
$$

(3)연간 기대부재고비용

생산조달기간중의 수요 x가 $x\le r$일 경우는 품절이 없으므로 부재고비용은 발생하지 않는다. 그러나 $x>r$일 경우는 품절이 발생하므로 주기당 기대부재고량은 그림 1의 기대면적 A_5와 기대면적 A_6의 합이 된다.

$$
\begin{aligned}
E(A_5+A_6) &= E[\beta(x-r)t_4]/2 + E[\beta^2(x-r)^2/(V-D)]/2 \\
&= \frac{\beta\mu}{2D}\int_r^\infty \frac{(x-r)^2}{x}f(x)dx + \frac{\beta^2}{2(V-D)}\int_r^\infty (x-r)^2 f(x)dx
\end{aligned}
$$

따라서 연간 기대부재고비용은 위의 주기당 기대부재고량에 π/T를 곱하여 구하면 식(5)와 같다.

$$
\frac{\beta\pi}{2R}\left[\mu\int_r^\infty \frac{(x-r)^2}{x}f(x)dx + \frac{\beta D}{V-D}\int_r^\infty (x-r)^2 f(x)dx\right] \tag{5}
$$

(4)연간 기대유실판매비용

주기당 기대유실수요량은 $(1-\beta)y(r)$이므로 여기에 P/T를 곱하여 연간 기대유실판매비용을 구하면 식(6)과 같다.

$$
\frac{(1-\beta)DPy(r)}{R} \tag{6}
$$

(5)연간 기대생산재고비용

이상에서 구한 식(3)에서 식(6)까지의 연간 기대생산재고관련비용을 합하여 연간 기대생산재고비용을 구하면 다음과 같다.

$$
\begin{aligned}
K(R,r) = \frac{AD}{R} &+ H\left(\frac{R}{2}+r-u\right) + \frac{(1-\beta)DPy(r)}{R} + \frac{(H+\beta\pi)u}{2R}\int_r^\infty \frac{(x-r)^2}{x}f(x)dx \\
&+ \frac{D}{2R}\left[\frac{\pi\beta^2}{V-D}\int_r^\infty (x-r)^2 f(x)dx - \frac{H}{V}\{R-(1-\beta)y(r)\}^2\right]
\end{aligned} \tag{7}
$$

3. 기존의 모형과의 관련성

본 연구에서 정식화한 경제적 생산량모형의 연간 기대생산재고비용함수와 기존모형의 비용함수와의 관련성에 대하여 검토하여 보자. 연간 기대생산재고비용함수인 식(7)은 $V \to \infty$이면 다음의 Kim과 Park[1]의 생산조달기간중의 수요가 확률적인 상황하에서의 부분부재고를 고려한 경제적 발주량모형의 비용함수로 환원된다.

$$K(R,r)=\frac{AD}{R}+H\left(\frac{R}{2}+r-u\right)+\frac{DP(1-\beta)y(r)}{R}+\frac{(H+\beta\pi)u}{2R}\int_r^\infty \frac{(x-r)^2}{x}f(x)\,dx \quad (8)$$

그리고 식(8)에서 $y(r) \to S$(S는 주기당 품절수량), $\mu \to r+S$ 및 $x \to r+S$로 변환하면 식(9)를 얻는다.

$$K(R,r)=\frac{1}{2R}\left[2AD+H(R-S)^2+\beta\pi S^2+2(1-\beta)DPS\right] \quad (9)$$

위식은 수요가 확정적인 상황하에서 부분부재고를 고려한 Park[3]의 경제적 발주량모형의 비용함수와 일치한다.

4. 반복해법 절차

이제 식(7)의 연간 기대생산재고비용함수를 최소로 하는 R과 r을 구해보자. 본 연구에서 유도된 연간 기대생산재고비용함수는 $\beta=1$일 때는 볼록함수가 된다.(부록 참조)
여기서 R과 r이 최적이 될 필요조건(necessary condition)을 구하기 위하여 연간 기대생산재고비용함수인 식(7)을 R과 r로 편미분하여 정리하면 다음과 같다.

$$\frac{\partial K}{\partial R}=-\frac{1}{2R^2}\left[2AD+2(1-\beta)DPy(r)+(H+\beta\pi)u\int_r^\infty\frac{(x-r)^2}{x}f(x)dx\right.$$
$$\left.+\frac{\beta^2\pi D}{V-D}\int_r^\infty(x-r)^2f(x)dx-\frac{(1-\beta)^2DHy(r)^2}{V}\right]+\frac{b_1H}{2}$$

$$\frac{\partial K}{\partial r}=H-\frac{D}{R}\left[P(1-\beta)\overline{F}(r)+\frac{(H+\beta\pi)\mu}{D}\int_r^\infty\left(1-\frac{r}{x}\right)f(x)dx\right.$$
$$\left.+\frac{\beta^2\pi y(r)}{V-D}+\frac{H(1-\beta)\overline{F}(r)}{V}\{R-(1-\beta)y(r)\}\right]$$

위 식에서 $\overline{F}(r)$은 생산조달기간중의 수요의 확률밀도함수 $f(x)$의 누적여함수로서 다음과 같다.

$$\overline{F}(r)=\int_r^\infty f(x)dx$$

위의 R과 r로 편미분한 두식을 0으로 놓고 정리하면 식(10)과 식(11)을 얻는다.

$$R^2=\frac{1}{b_1H}\left[2AD+2(1-\beta)DPy(r)+(H+\beta\pi)u\int_r^\infty\frac{(x-r)^2}{x}f(x)\,dx\right.$$
$$\left.+\frac{\beta^2\pi D}{V-D}\int_r^\infty(x-r)^2f(x)dx-\frac{(1-\beta)^2DH}{V}y(r)^2\right] \quad (10)$$

$$R=\frac{1}{H\left\{(1-\frac{(1-\beta)D}{V}\overline{F}(r)\right\}}\left[(1-\beta)DP\overline{F}(r)+(H+\beta\pi)u\int_r^{\infty}(1-\frac{r}{x})f(x)dx\right.$$

$$\left.+Dy(r)\left\{\frac{\beta^2\pi}{V-D}-\frac{(1-\beta)^2H}{V}\overline{F}(r)\right\}\right] \quad (11)$$

식(10)과 식(11)의 연립방정식에서 R과 r이 구해지면 주기당 생산량(Q)은 식(1)에 의해 다음과 같이 구할 수 있다.

$$Q=R-(1-\beta)y(r) \quad (12)$$

이상의 결과와 $\beta=1$일 때 식(7)의 연간 기대생산재고비용함수인 $K(R,r)$가 볼록함수가 된다는 사실을 이용하여 $K(R,r)$을 최소화하는 R과 r을 구하는 반복적인 해법절차를 제시하면 다음과 같다.

(1) R과 r의 허용오차 ε을 설정한 후($\varepsilon>0$), 확정적 상황하에서 경제적 생산량을 구하는 공식인 $Q=\sqrt{2AD/[H(1-D/V)]}\sqrt{(\pi+H)/\pi}$ 를 이용하여 R의 초기추정값을 구하고, 이 값을 R_1이라 한다.

(2) 부재고비율 β의 초기치를 1로 설정한다.

(3) 식(11)의 R에 R_1을 대입하여 二分法(bisection method)을 이용해서 발주점 r을 구하고 이 값을 r_1이라 한다.

(4) 절차(3)에서 구한 r_1을 식(10)에 대입하여 R을 구하고 이값을 R_2라 한다.

(5) 절차(3)과 (4)를 반복한다. 만일 반복과정 i번째에서 $|R_i-R_{i-1}|<\varepsilon$ 과 $|r_i-r_{i-1}|<\varepsilon$ 이 되면 종료하고 R_i와 r_i를 각각 해로 간주하고 식(12)에 의해 Q를 구한 다음 절차(6)으로 간다

(6) 부재고비율 β의 값을 감소시킨 다음에 절차(5)에서 구한 R_i를 R의 초기치 R_1로 설정하여 절차(3)으로 간다. 만일 절차(6)에서 부재고비율이 음수가 되면 이상의 모든 절차를 종료한다.

5. 수치예 및 감도분석

어느 회사에서 한 품목의 생산조달기간중의 수요가 평균이 50개이고 표준편차가 10개인 정규분포에 따르고 나머지 자료들이 다음과 같이 주어져 있다.

D = 200 단위/年	H = 단위당 1 만원/年
V = 300 단위/年	π = 부재고당 4 만원/年
P = 3 만원/단위	A = 50 만원/생산주기

위의 자료를 이용하여 본 연구의 반복해법 절차에 의하여 부재고비율 β의 여러값에 대한 R과 r 및 연간 기대생산재고비용 $K(R,r)$을 구하면 표 1과 같다. 여기서 본 연구의 해법절차의 검증을 위하여 格子法(grid search method)에 의해 해를 구한 결과 동일한 해를 구할 수 있었다. 표 1은 부재고비율의 여러값에 대한 생산발주점과 주기당 생산량의 변화과정을 보여주

고 있다. 표 1로부터 부재고비율의 값이 증가함에 따라 생산발주점은 감소하나 주기당 생산량과 연간 기대생산재고비용이 감소함을 알 수 있다.

표 1. 부재고비율의 감도분석

단위 : 개,만원

부재고비율 (β)	0.0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
주기당 기대수요량(R)	260.8	262.3	264.9	270.2	279.7	282.9
주기당 생산량(Q)	258.9	259.9	262.2	267.0	276.6	282.9
생산 발주점(r)	54.3	52.1	49.0	43.7	34.9	27.6
연간 기대생산제고비용	92.7	91.2	89.1	85.8	80.2	72.0

여기서 수요와 생산조달기간이 확정적인 경우의 경제적 생산량 Q_d 및 연간 총생산재고비용 K_d를 구하면 다음과 같다.

$$Q_d=\sqrt{\frac{2AD}{H(1-D/V)}}=245.0\text{ 개}$$

$$K_d=\frac{AD}{Q_d}+\frac{HQ_d}{2}\left(1-\frac{D}{Q_d}\right)=81.6\text{ 만원}$$

표 2는 $\beta=0.5$으로 고정시킨 후 σ의 여러 값에 대한 주기당 기대수요량, 생산발주점, 주기당 생산량, 연간 기대생산재고비용 및 불확실성의 연간비용을 산출한 것이다. 표 2에서 알 수 있는 바와 같이 σ의 값이 증가함에 따라 연간 기대생산제고비용 및 불확실성의 연간 기대생산재고비용이 모두 증가함을 알 수 있다.

표2. 생산조달기간중의 수요의 표준편차(σ)에 대한 감도분석($\beta=0.5$)

단위 : 개, 10,000원

표준편차(σ)	0.0	5.0	10.0	15.0	20.0
주기당 기대수요량(R)	245.0	256.0	267.0	278.2	289.5
생산발주점(r)	50.0	48.3	46.7	45.1	43.4
주기당 생산량(Q)	245.0	254.5	264.1	273.8	283.6
연간 기대생산제고비용(K(R,r))	81.6	84.6	87.7	90.7	93.8
불확실성의 연간비용	0.0	3.0	6.1	9.1	12.2

표 2로부터 β=5.0 이고 σ=10일 때의 연간 기대생산재고비용은 $K(264.1, 46.7)$87.7만원이 된다. 여기서 생산조달기간중의 수요가 불확실한 경우의 연간 기대생산재고비용과 수요와 생산조달기간이 확정적인 경우의 연간 총재고비용과의 차이를 불확실성의 연간비용이라 정의하면 $\sigma=10.0$일 때의 불확실성의 연간비용은 다음과 같다.

$K(267.1, 46.7) - K_d$ = 87.7 - 81.6 = 6.1 만원

위에서 산출된 불확실성의 연간비용은 생산조달기간에 대한 확정적인 정보를 얻기 위하여 최대로 투자할 수 있는 비용이라 할 수 있다.

6. 결론

본 연구는 품절기간중 긴급을 요하지 않거나 인내심 있는 고객은 수요가 충족될 때까지 기다리는데 반하여 긴급을 요하는 고객은 다른 생산부처에서 제품을 구매하게 될 것이라 가정하고 부재고와 유실판매를 동시에 고려하여 부분부재고를 갖는 생산 · 재고모형을 구축하였다. 이 모형에서는 생산조달기간중의 수요를 확률변수로 인식하고, 재고주기를 연속적인 두개의 생산개시 시점간의 기간으로 파악하여 주기당 생산재고관련비용을 유도하여 연간 기대생산재고비용함수를 도출한 후 기존의 부분부재고모형과의 관련성에 대하여 검토하였다. 그리고 연간 기대생산재고비용함수를 최소로하는 주기당 생산량과 생산발주점을 구하기 위한 반복적인 해법을 제시하고, 격자법에 의해 반복적 해법에 대한 검증을 하였다. 한편 수치예의 자료를 이용하여 부재고비율과 생산조달기간의 표준편차에 대한 감도분석을 통하여 부재고비율의 변화에 따른 주기당 생산량과 생산발주점 및 연간 기대생산재고비용의 민감도를 분석하였다.

부 록

식(7)의 연간 기대생산재고비용함수 $K(R, r)$은 $\beta=1$일 때 식(13)으로 변환되며 볼록함수(convex function)가 된다.

$$K(R, r) = \frac{AD}{R} + H\left(\frac{R}{2} + r - u - \frac{DR}{2V}\right) + \frac{(H+\pi)u}{2R}\int_r^\infty \frac{(x-r)^2}{x} f(x)\,dx + \frac{\pi D}{2(V-D)R}\int_r^\infty (x-r)^2 f(x)\,dx \quad (13)$$

[증명]

식(13)의 $K(R, r)$의 볼록성을 다음과 같이 3부분으로 나누어 증명하자.

$$K_1 = \frac{AD}{R} + H\left(\frac{R}{2} + r - u - \frac{DR}{2V}\right)$$

$$K_2 = \frac{(H+\pi)u}{2R}\int_r^\infty \frac{(x-r)^2}{x} f(x)\,dx$$

$$K_3 = \frac{\pi D}{2(V-D)R}\int_r^\infty (x-r)^2 f(x)\,dx$$

1) K_1은 명확하게 볼록함수이다.

2) K_2 의 볼록성 증명

$$\frac{\partial^2 K_2}{\partial R^2} = \frac{(H+\pi)\mu}{R^3}\int_r^\infty \frac{(x-r)^2}{x} f(x)\,dx > 0$$

$$\frac{\partial^2 K_2}{\partial r^2} = \frac{(H+\pi)\mu}{R}\int_r^\infty \frac{f(x)}{x}\,dx > 0$$

$$\frac{\partial^2 K_2}{\partial r \partial R} = \frac{(H+\pi)\mu}{R^2} \int_r^{\infty} \frac{x-r}{x} f(x)\,dx > 0$$

위의 편미분 결과를 이용하여 헤시안 매트릭스(Hessian matrix)의 행렬식 $|H|_2$를 구하면 다음과 같다.

$$|H|_2 = \frac{\partial^2 K_2}{\partial R^2}\frac{\partial^2 K_2}{\partial r^2} - \left(\frac{\partial^2 K_2}{\partial r \partial R}\right)^2$$
$$= \left\{\frac{(H+\pi)\mu}{R^2}\right\}^2 \left[\int_r^{\infty}\frac{(x-r)^2}{x} f(x)\,dx \int_r^{\infty}\frac{f(x)}{x}\,dx - \left\{\int_r^{\infty}\frac{x-r}{x} f(x)\,dx\right\}^2\right]$$

여기서, $f=\sqrt{(x-r)^2 f(x)/x}$, $g=\sqrt{f(x)/x}$ 라 정의하면

$$\int_r^{\infty}\frac{(x-r)^2}{x} f(x)\,dx \int_r^{\infty}\frac{f(x)}{x}\,dx - \left\{\int_r^{\infty}\frac{x-r}{x} f(x)\,dx\right\}^2 = \int_r^{\infty} f^2 dx \int_r^{\infty} g^2 dx - \left(\int_r^{\infty} f\cdot g\,dx\right)^2$$

이 된다. 한편 Schwarz의 부등식에 의하면 다음 식이 성립한다.

$$\int_r^{\infty} f^2 dx \int_r^{\infty} g^2 dx \geq \left(\int_r^{\infty} f\cdot g\,dx\right)^2$$

따라서 $|H|_2 \geq 0$ 이 성립하므로 K_2는 볼록함수가 된다.

3) K_3의 볼록성 증명

$$\frac{\partial^2 K_3}{\partial R^2} = \frac{\pi D}{(V-D)R^3}\int_r^{\infty}(x-r)^2 f(x)\,dx > 0$$

$$\frac{\partial^2 K_3}{\partial r^2} = \frac{\pi D}{(V-D)R}\int_r^{\infty} f(x)\,dx > 0$$

$$\frac{\partial^2 K_3}{\partial r \partial R} = \frac{\pi D y(r)}{(V-D)R^2} > 0$$

$$|H|_3 = \frac{\partial^2 K_2}{\partial R^2}\frac{\partial^2 K_2}{\partial r^2} - \left(\frac{\partial^2 K_2}{\partial r \partial R}\right)^2$$
$$= \left\{\frac{\pi D}{(V-D)R^2}\right\}^2 \left[\int_r^{\infty}(x-r)^2 f(x)\,dx \int_r^{\infty} f(x)\,dx - \left\{\int_r^{\infty}(x-r) f(x)\,dx\right\}^2\right]$$

여기서, $f=(x-r)\sqrt{f(x)}$, $g=\sqrt{f(x)}$ 라 정의하면

$$\left\{\frac{\pi D}{(V-D)R^2}\right\}^2 \left[\int_r^{\infty}(x-r)^2 f(x)\,dx \int_r^{\infty} f(x)\,dx - \left\{\int_r^{\infty}(x-r) f(x)\,dx\right\}^2\right]$$
$$= \left\{\frac{\pi D}{(V-D)R^2}\right\}^2 \left[\int_r^{\infty} f^2 dx \int_r^{\infty} g^2 dx - \left(\int_r^{\infty} f\cdot g\,dx\right)^2\right]$$

이 된다. 위식은 Schwarz의 부등식에 의해 $|H|_3 \geq 0$ 이 성립하므로 K_3는 볼록함수가 된다. 한편, 볼록함수의 합은 볼록함수이므로 $\beta=1$일 때 식(13)의 $K(R, r)$은 볼록함수가 된다.

참 고 문 헌

[1] Kim, Dae H. & Park, Kyung S. "(Q,r) Inventory Model with a mixture of Lost Sales and Time-Weighted Backorders", *J. Opl. Res. Soc.*, Vol.36, No.3, pp.231-238, 1985.

[2] Montgomery, D.C., Bazaraa, M.S. and Keswani, A.k., "Inventory Models with a Mixture of Backorders and Lost sales", *Naval. Res. Logist. Quart.*, vol.20, No.2, pp.255-263, 1973.

[3] Park, Kyung.S., "Inventory Model with Partial Backorders", *Int. J. System. Sci.*, Vol.13, No.12, pp.1313-1317, 1982.

[4] Park, K.S.,"Another Inventory Model with a Mixture of Backorders and Lost Sales", *Naval. Res. Logist. Quart.*, Vol.30, No.3, pp.397-400, 1983.

[5] Rosenberg, D. "A New Analysis of a Lot-size Model with Partial Back-logging", *Naval. Res. Logist. Quart.*, Vol.26, No.2, pp.349-353, 1979.

[6] 姜錫昊, 朴光泰, "注文引渡期間이 不確實한 狀況下에서의 (Q,r)在庫模型과 多段階 分配시스템에의 應用에 관한 硏究", 韓國經營科學會誌, 第11券, 第 1號, pp.44-50, 1986.

[7] 金正子, 李康雨, 春日井博, "調達期間の不確實性を考慮した部分バックオーダモデルに關する硏究", 日本經營工學會誌, Vol.42 No.5, pp.338-344, 1991

[8] 金正子, 春日井博, "部分バックオーダを考慮した經濟的發注量モデル", 日本經營工學學會誌,Vol.45 No.2, pp.141-147, 1994.

[9] 金正子, 春日井博, "部分バックオーダを考慮した經濟的生産量モデル", 日本經營工學會誌, Vol.45 No.1, pp.71-76, 1994.

[10] 남상진, 김정자, "부분부재고를 고려한 생산량모델에 관한 연구", 韓國經營科學會誌 Vol.19 No.3, pp.81-91, 1994.

[11] 李康雨, 李相道, "調達期間이不確實한 상황하에서의 部分負在庫模型에 관한 硏究", 大韓産業工學會誌, Vol.17 No.1, pp.51-58, 1991.

[12] 李康雨, "線形 負在庫比率을 갖는 確率的 部分負在庫시스템에 관한 硏究", 大韓産業工學會誌, Vol.20 No.3, pp.105-116, 1994.