Fuzzy Goal Programming을 이용한 最適 檢査 政策
- Optimal Inspection Policy By Fuzzy Goal Programming -

유 정 상*
Yu, Jeong-Sang

Abstract

In this research, a mathematical programming model is developed for the economic modeling of sampling plans based on two evaluation criteria ; the outgoing quality and the average total inspection cost. A fuzzy goal programming model and its solution procedure are proposed for the managers whose management objectives on the two evaluation criteria are not rigorous. To study the sensitivity of quality characteristic dependence on the resulting inspection plans, a numerical example is solved several times for a dependent model.

1. 서 론

意思決定過程에서 不明確한 것을 다루는 기법중의 하나가 퍼지 (Fuzzy)이론이다(Bellman 과 Zadeh [1]). 우선 퍼지집합에 대해서 간단히 설명한다. 이 집합에서는 어떤 분명한 집합의 구간이 정해져 있지 않고, 집합에 속하는 정도를 어떠한 멤버쉽 함수를 이용하여 정량적으로 나타낸다. Zadeh[5]와 Bellman, Zadeh [1]에 따르면 퍼지집합은 다음과 같이 정의 된다. 즉, $X=x$ 는 어떤 代替案의 모임이라 하자. X 의 퍼지집합 D 는 순서쌍의 집합 $D=[\ x,\ \mu_i(x)]\quad x\in X$ 로 표시되며, 여기서 $\mu_i(x)$는 x 가 D 에 속하는 정도를 나타내는 멤버쉽 함수이고 i 는 함수의 종류를 나타내는 첨자이다. 일반적으로 $\mu_i(x)$는 구간 [0, 1] 사이에서 정의되며 값이 클수록 그것이 속하는 정도가 큰 것을 나타낸다. 예를들어 $\mu_i(x)=1$ 이면, x 는 일반적인 집합(Crisp Set)에서의 정의대로 집합의 요소로 평가될 수 있다.

위에서 언급한 퍼지집합 이론을 목표달성값 (Goal Achievement Value)에 적용하여 퍼지목표(Fuzzy Goal)라는 정의를 사용하면, 특정한 목적함수에 대해서 달성목표에 어느정도 가까이 가느냐하는 것을 멤버쉽 함수로 나타낼 수 있다. 예를 들어서 Narasimhan [3]은 α 가 달성목표일 때 $\mu(x)=(1+(x-\alpha)^2)^{-1}$ 이라는 멤버쉽 함수를 이용해서 대체안 x 의 값이 α 에 어느정도 가까운 가를 평가하였다.

* 경원전문대학 공경과

본 연구에서는 종속품질공정 모델[2,4]에서 두가지 평가기준, 즉 총검사비용과 로트품질을 목적함수로 보고, 이 두 기준에 대한 달성목표가 퍼지하게 주어지는 경우 어떻게 최적 샘플링검사계획을 구할 것인가를 알아보고, 나아가 멤버쉽 함수의 형태가 이 계획에 미치는 영향을 조사해본다.

2. 모형 設定

본 연구에서는, 우선 선형함수인 멤버쉽 함수를 사용하여 두개의 멤버쉽 함수의 최소값을 극대화하는 문제를 구해본다. 이러한 방식은 가능한 달성목표에서 균등하게 떨어져 있는 것을 조화있는 해 (compromise solution)로 평가하는 것에 근본을 두고 있다. 물론 변형된 방법으로 각 멤버쉽 함수에 가중치(weight)를 주어서 평가하는 방법도 고려할 수 있다.

$f_1(n,c)$에 대한 선형멤버쉽함수는 다음 식 (2-1)과 같다.

$$\mu_1(f_1(n,c))=\begin{cases}1 & \text{if} \quad f_1(n,c)\le\alpha \\ \dfrac{A-f_1(n,c)}{A-\alpha} & \quad \alpha\le f_1(n,c)\le A \\ 0 & \quad f_1(n,c)\ge A\end{cases} \qquad (2\text{-}1)$$

여기서, α 는 $f_1(n,c)$의 달성목표이고, A는 $f_1(n,c)$의 허락할 수 있는 총 검사비용의 상한한계이다.

또, $f_2(n,c)$에 대한 멤버쉽함수는 다음 식 (2-2)로 구할 수 있다.

$$\mu_2(f_2(n,c))=\begin{cases}1 & \text{if} \quad f_2(n,c)\le\beta \\ \dfrac{B-f_2(n,c)}{B-\beta} & \quad \beta\le f_2(n,c)\le B \\ 0 & \quad f_2(n,c)\ge B\end{cases} \qquad (2\text{-}2)$$

여기서, β 는 $f_2(n,c)$의 달성목표이고 B는 $f_2(n,c)$(로트품질)의 허락 가능한 상한한계이다.

이러한 것을 종합하여서, 총 검사비용과 품질의 멤버쉽함수가 주어졌을때, 다음의 최적화 Fuzzy 모델을 설정하여 샘플링검사 계획을 구할 수 있다.

$$\underset{n,c}{Max}\ \{\ \underset{i}{Min}\ \ w_i\,\mu_i(f_i(x))\},\quad i=1,2 \qquad (2\text{-}3)$$

$$s.t.\ \ 0\le c\le n\le n_{\max}$$

여기서 w_i 는 i 번째 멤버쉽 함수에 주는 가중치이다.

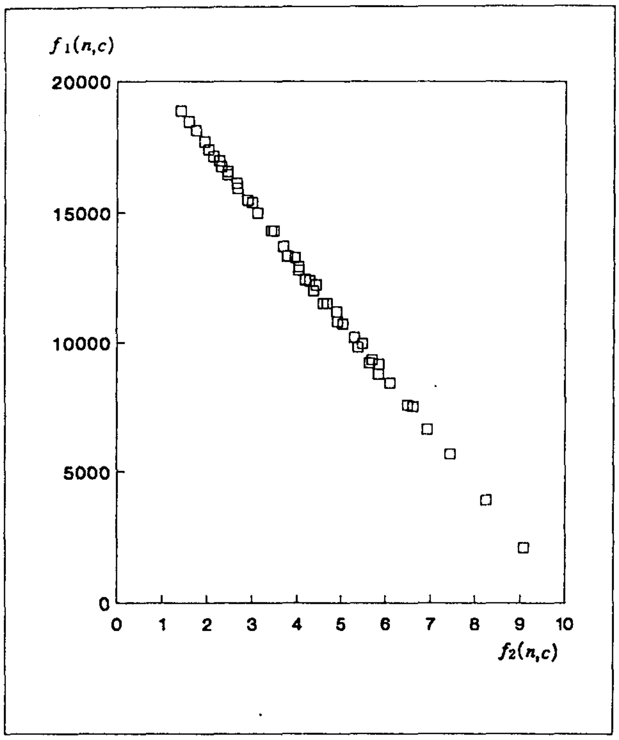
또한 멤버쉽 함수가 비선형이거나 다른 함수일 때에는 어떻게 되는지, 또, 달성목표의 변동과 상한선 A와 B가 전체 해에 미치는 영향등을 분석하려고 한다.

3. 퍼지 Goal Programming 의 解法

위에서 설명한 퍼지 Goal Programing(GP) 모형을 토대로 하여 여기에서는 어떻게 최적해를 찾는

가를 설명하려고 한다. 퍼지 GP의 목적식인 $\underset{n,c}{Max}\{\underset{i}{Min}(\mu_1, \mu_2)\}$ 의 특성상, 최적해를 찾아가는 과정은 두개의 평가기준 중에 작게 달성된 (즉, 멤버쉽 값이 작은) 것을 되도록이면 크게 하려고 하는 방향을 취한다.

다음 <Figure 1>은 從屬品質공정인 경우[2,4,6]에 대하여 대부분이 corner plan인 $f_1(n,c)$값과 $f_2(n,c)$값을 그려본 것이다. 수식에 대한 기호의 정의와 용어는 인용문헌[6]을 참조하기 바란다. 그림에서 볼 수 있듯이 $f_1(n,c)$와 $f_2(n,c)$는 거의 상치되어 있기 때문에 μ_1 과 μ_2 의 값이 거의 같아지는 점에서 최적 퍼지 GP의 샘플링검사 계획이 되는 성질을 갖고 있다.



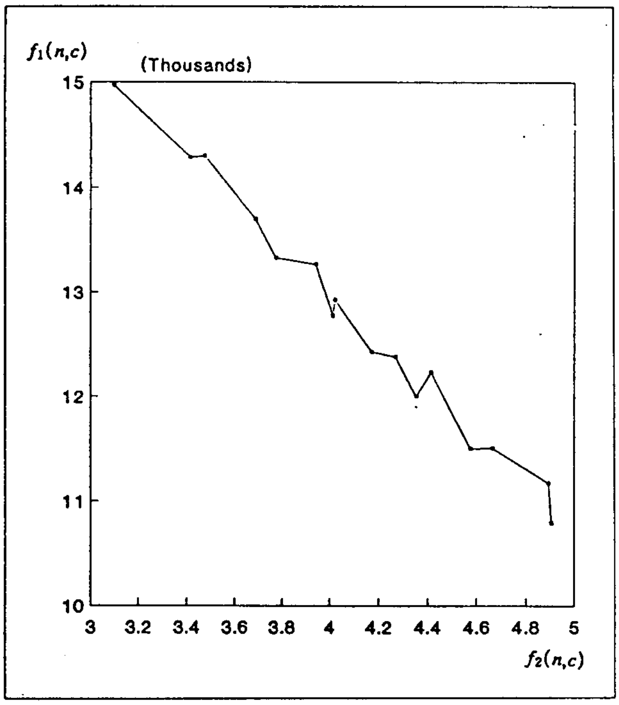
< Figure 1 > Values of Objective Functions

이러한 결과는 직감적으로 명확히 설명할 수 있겠다. 만약에 관리자가 두 평가 기준에 대해서 목표를 정한다면, 멤버쉽 함수는 일종의 목표 달성을 나타내는 척도로 볼 수 있을 것이다. 이와같은 경우에, 관리자를 만족시키는 최적해는 되도록이면 균등한 척도값을 갖도록 하는 것이 될 것이다. 왜냐하면, 두 기준이 상치되는 경우에는 한 기준의 희생없이는 다른 기준의 멤버쉽 값을 증가시킬 수 없기 때문이다.

<Figure 2>에서는 $f_2(n,c)$가 3%에서 5%사이에 있는 corner plan들의 $f_1(n,c)$값을 비교하여 본 것이다. 그림을 통해서 $f_2(n,c)$와 $f_1(n,c)$가 대부분 상치하지만 완전한 상치가 되는 것은 아님을 예를 통해서 알 수 있다. 따라서 최적해를 구하는 방법을 개발할 때에는 이러한 점에 대해서 주의를 해야 할 것이다.

퍼지 GP 해법에서는 $f_1(n,c)$나 $f_2(n,c)$중 어느것을 조절해도 상관이 없겠지만, 본 논문에서는

$f_2(n, c)$를 조절해서 최적해를 구하는 방법을 제시한다. 이 방법은 크게 3단계로 나누어져 있다. 첫째, $f_2(n, c)$값의 범위를 조절하여 중간값을 찾는다. 둘째, $f_2(n, c)$가 중간값에 제약식을 갖는 조건에서 최적 $f_1(n, c)$값을 갖는 샘플링검사 계획을 찾는다. 셋째, 최적해에서의 두 평가기준의 멤버쉽 값을 결정하고 현재까지의 최적해를 갱신한다. 이러한 3단계를 반복적으로 행함으로서 모든 $f_2(n, c)$ 범위에 속하는 값들을 평가했을 때 해법 과정을 멈추고 최적해를 출력한다.



< Figure 2 > Values of Objective Functions with $3 < f_2(n, c) < 5$

< 퍼지 GP의 해법 단계 >

Fuzzy Goal Programming의 풀이과정을 설명하면 다음과 같다.

퍼지 GP 문제의 최적화 수리모델은 식(2-3)과 같이 되는데 해법은 두개의 평가기준 함수의 특성상 Bisection Method 를 이용한다.

[단계 1] (1) 초기값를 입력시킨다. 초기값들은 다음과 같다.

$f_1(n, c)$, $f_2(n, c)$, N, n_{max}, C_Y, C_r, C_p, α, β. 여기서 α 는 $f_1(n, c)$의 목표값이고 β 는 $f_2(n, c)$의 목표값이다.

(2) $f_1(n, c)$와 $f_2(n, c)$의 상한선인 A와 B를 각각 구한다.

A = $f_1(n_{max}, 0)$이고, B는 (0, 0)가 된다.

(3) $f_2(n, c)$의 초기 범위를 구한다. 즉, $l < f_2(n, c) < u$.

여기서 l 은 $f_2(n, c)$의 하한으로서 β 와 $f_2(n_{max}, 0)$ 중에서의 큰 값이다.

(즉, $l = \max\{\beta, f_2(n_{max}, 0)\}$. u 는 $f_2(n, c)$의 상한으로 B가 된다 ; $u = B$).

(4) 초기 멤버쉽 $z^o = \min\{\ \mu_1 f_1(n_{max},0)\ ,\ \ \mu_2 f_2(n_{max},0)\ \}$를 취하고 초기해는 $(n^o,\ c^o) = (\ n_{max},\ 0)$로 한다.

[단계 2] (1) $f_2(n,c)$의 범위내에서 중간값을 구한다. 중간값을 $\overline{Q}$ 라고 할 때, $\overline{Q} = \frac{l+u}{2}$ 가 된다.

(2) 수리모델 (3-1)의 문제를 풀어서 $f_1(n,c)$를 최소화하는 샘플링검사 계획을 찾는다.

(3) (2) 에서 구한 문제의 해를 $(n^i,\ c^i)$ 라고 한다.

(4) 만일 $(u-l)$ 값이 충분히 작으면 즉, $(u-l) < \varepsilon$ 이면, 과정을 멈추고, 아니면 [단계 2]의 (1)로 간다.

[단계 3] (1) 현재 해에서의 멤버쉽 값을 구한다. 즉, $\mu_1(f_1(n^i,\ c^i))$ 와 $\mu_2(f_2(n^i,\ c^i))$ 를 구한다.

(2) 현재의 해에서의 최소멤버쉽 값 $z^i = \min\{\mu_1,\ \mu_2\}$를 구하고 만일 z^i 가 z^{i-1} 보다 크면 멤버쉽 값을 갱신 하고 또 $(n^*,\ c^*)$ 도 함께 갱신한다.

[단계 4] (1) 만일 $\mu_1(f_1(n^i\ ,\ c^i))$가 $\mu_2(f_2(n^i,\ c^i))$보다 크면 $f_2(n,c)$를 감소시켜서 μ_2 를 증가시켜야 한다. 이것은 $u = \overline{Q}$으로 하고 상한을 줄임으로써 달성할 수 있다.

(2) 만일 $\mu_1(f_1(n^i\ ,\ c^i))$가 $\mu_2(f_2(n^i,\ c^i))$보다 작으면, $f_1(n,c)$를 감소시켜서 (즉, $f_2(n,c)$를 증가시켜서) μ_1 을 증가시켜야 한다. 이것은 $l = \overline{Q}$ 로 하여 하한을 크게 함으로써 달성할 수 가 있다.

(3) (1)과 (2)에서 $f_2(n,c)$의 범위를 갱신한 뒤에 [단계 2]의 (1)로 간다.

< 수치예제 1>

다음은 예제를 통한 퍼지 GP해법의 설명이다.

$f_1(n,c)$의 목표값 $\alpha = 3,000$ 이고, $f_2(n,c)$ 의 목표값 $\beta = 3.5\%$ 으로 관리목표가 정해져 있을 경우에 대하여 선형 멤버쉽 함수를 이용해서 예시한다.

[단계 1] (1) $\alpha = 3000,\ \beta = 3.5\ \%$

(2) $A = f_1(30,\ 0) = 21075.424$

$B = f_2(0,\ 0) = 10$

따라서, 식 (2-1)과 (2-2) 의 값을 구하면,

$$\mu_1(f_1(n,c)) = \frac{21075.424 - f_1(n,c)}{21075.424 - 3000} = \frac{21075.424 - f_1(n,c)}{18075.424}$$

$$\mu_2(f_2(n,c)) = \frac{10 - f_2(n,c)}{10 - 3.5} = \frac{10 - f_2(n,c)}{6.5}$$ 가 된다.

(3) $l = \max\{3,\ f_2(30,\ 0) = 4.08\} = 4.08$

$u = B = 10$

그러므로 $4.08 \le f_2(n,c) \le 10$ 이 된다.

(4) $z^o = \min\{\mu_1(f_1(30,\ 0),\ \mu_2(f_2(30,\ 0))\} = \min\{0,\ 0.910\} = 0$

따라서 초기해는 $(n^o,\ c^o) = (30,\ 0)$ 이 된다.

[단계 2] (1) $4.08 \le f_2(n,c) \le 10$

$$\overline{Q} = \frac{l+u}{2} = \frac{4.08+10}{2} = 7.04$$

(2) 제약조건의 상한값이 7.04 가 된다.

현단계의 최적해는 $(n^i,\ c^i) = (26,\ 3)$ 이 된다.

[단계3] (1) $\mu_1(f_1(n^i,\ c^i)) = \mu_1(f_1(26,\ 3)) = \mu_1(6187.807) = 0.8236$

$\mu_2(f_2(n^i,\ c^i)) = \mu_2(f_2(26,\ 3)) = \mu_2(6.897) = 0.4774$

(2) $z^i = \min\{0.8236,\ 0.4774\} = 0.4774$

$z^i > z^{i-1} = 0$ 이므로, $z^i = 0.4774$로 갱신되고,

이 단계에서의 최적해도 $(n^i,\ c^i) = (26,3)$로 갱신된다.

[단계 4] (1) $\mu_1(f_1(n^i,\ c^i)) = 0.8236 > \mu_2(f_2(n^i,\ c^i)) = 0.4774$ 가

되므로, μ_2 를 증가 시킬 필요가 있다. 따라서,

$u = \overline{Q} = 7.04$ 가 된다.

(2) $4.08 \le f_2(n,c) = 7.04$가 되고, [단계 2] (1)로 가서 반복한다.

설명을 간단히 하기 위해서 나머지 단계의 결과는 다음의 <Table 1>에 요약하였다. 이 예제에서는 7단계를 거쳐서 $(n^*,\ c^*) = (23,\ 2)$ 를 최적해로 구하고, 이 샘플링검사 계획에서의 멤버쉽 값은 μ_1 과 μ_2 가 각각 0.6570과 0.6731로 나타났다.

4. 결 론

관리자가 공정관리에 대한 정책을 입안할 때에, 제품의 품질의 수준과 검사에 들어가는 비용의 두 가지 평가함수에 대한 만족의 정도가 구간의 함수로 될 때에 즉, Fuzzy 할 경우에 만족의 정도를 멤버쉽 함수로 표시하여 Fuzzy Goal Programming 모형을 설정하고 두 평가기준함수에 대한 최적해를 구하면 품질관리 정책 입안을 보다 다양하게 할 수 있을 것으로 본다. 또한 멤버쉽 함수가 3개 이상이거나 비선형 함수일 때에도 Fuzzy GP를 이용할 수 있으며, 달성목표의 변동과 그것의 상하한의 값이 변화될 때에 최적 정책에 대한 영향도 분석도 가능하다.

< Table 1 > Computation Results for Example 1.

	range of $f_2(n,c)$			evaluation functions	membership value	optimum
ite-ration	lower limit	upper limit	median	$f_2(n,c)$ $f_1(n,c)$	μ_1 μ_2	Z^*
1	4.08	10.0	7.04	(26, 3) 6.897 6187.807	0.8236 0.4774	0.4774 (26, 3)
2	4.08	7.04	5.56	(24, 2) 5.361 9801.454	0.6237 0.7137	0.6237 (24, 2)
3	5.56	7.04	6.3	(21, 2) 6.200 7941.525	0.7266 0.5846	0.6237 (24, 2)
4	5.56	6.3	5.93	(22, 2) 5.827 8756.424	0.6820 0.6420	0.642 (22, 2)
5	5.56	5.93	5.745	(23, 2) 5.625 9200.516	0.6570 0.6731	0.6570 (23, 2)
6	5.745	5.93	5.8375	(30, 3) 5.772 6878.611	0.6858 0.6505	0.6570 (23, 2)
7	5.745	5.8375	-	-	-	0.6570 (23, 2)

參 考 文 獻

1. Bellman, R. E. and Zadeh, L. E., "Decision-Making in a Fuzzy Environment", *Management Science*, Vol. 17, 141-164, 1970.
2. Bhat, U. N., Lal, R., and Karunaratne, M., "A Sequential Inspection Plan for Markov Dependent Production Processes", *IIE Transactions,* Vol. 22, 56-64,1990.
3. Narasimhan, R., "Goal Programming in a Fuzzy Environment",*Decision Sciences*, Vol. 11, 325-336, 1980.
4. Nelson, B., "Estimating Acceptance Sampling Plans for Dependent Production", Forthcoming *IIE Transactions*, 1993.
5. Zadeh, L. M., "Outline of a New Approach to the Analysis of Complex Systems and Decision Processes", *IEEE Transactions*, Vol. SMC-3, No. 1, 28-44, 1978.
6. 劉征相, "從屬品質工程의 經濟的 샘플링檢査 方式", 漢陽大 博士學位論文, 1993.