손실비용을 고려한 (s, S) 재고정책*1)
- On the Optimality of (s, S) Inventory Policy with Loss Cost -

최 진 영**
Choi, Jin-Yeong

Abstract

Through the model presented in this paper, we study on the depletion of stock taking place due to random loss of items as well as random demand, under the assumption that the distributions of demand are independent of those of loss, and both of them are identical, and that life time distribution of each item is negative exponential. The steady state probability distribution of the stock level assuming instantaneous delivery of order under (s, S) inventory policy. Also we have derived total expected cost expression with loss cost. The results of sensitive analysis show that the effect of loss rate is substantial on the total cost and optimal value of inventory level.

1. 서론

주문정책에 관한 많은 논문들은 한번 재고로 남게 되면, 이 재고는 영원히 존속하거나 또는 단일계획기간 후에는 수요 또는 품질손상에 의하여 소멸된다는 암시적인 가정을 하였다. 그러나 방사능 물질의 소멸, 저장 식품의 손실, 유리제품의 파손과 보유재고의 도난 등은 보유하고 있는 재고량의 전체가 제품손실의 대상이 된다. 이와 같이 현실적인 재고상황에 있어서의 재고수준의 감소는 시간이 경과함에 따라 수요와 손실의 현상이 동시에 발생하여 결합된 영향력의 결과로 나타난다.

Sivazlian[7] 및 많은 연구는 재고수준의 감소가 단지 확률적 수요에 의해서만 일어나는 재고모델을 연구하였다. Nahmias와 Wang[5] 등은 확률적 수요를 가정하고 지수적 손실이 발생하는 재고의 상황하에서 확정적인 조달기간이 있다는 가정에서 설정한 모델을 연구하였다. 이들이 만들어 낸 모델은 연속조사 재고시스템하에서 (Q, r)정책을 사용하였다. 최근에 몇몇 연구는 재고수준의 감소가 랜덤수요 뿐만 아니라 보유중인 재고량에 비례적으로 발생하는 손실문제를 고려하였다[4, 8]. 그러나 그들 연구는 손실비용을 고려하지 않았다.

본 연구는 재고수준의 감소가 보유하고 있는 재고량에 비례적으로 발생하는 확률적 손실과 수요에 의하여 감소되는 문제를 고려한다. 즉, 수요는 Poisson 방식으로 발생하며 재고에서 제품의 수명시간 분포는 음의 지수분포로 가정하며, 수요와 손실은 서로 독립적으로 분포되고 각각 동일한 확률분포를

* 이 논문은 1994학년도 경기대학교 교내 학술연구 조성비에 의하여 연구되었음.
** 경기대학교 산업공학과 교수

가지며, 주문의 즉각적인 인도아래, 품절을 허용하지 않는 가정하에 재고수준의 안정상태 확률분포식을 유도한다. 그리고 손실비용을 포함한 총비용식과 최적해를 만족하는 조건을 유도하여 최적 주문량을 결정하는 모델을 개발하고, 수치계산에 의한 민감도 분석에 의하여 모수(parameter)에 따른 변화를 검토 고찰한다.

2. 문제의 분석

본 연구에서는 최적 재고수준이 S 단위로 고정된 문제를 고려한다. 단위들에 대한 수요는 모수 μ 를 갖는 Poisson 방식으로 발생하며, 품목의 수명시간은 모수 λ 를 갖는 음의 지수분포를 갖는다. 또한, 재고수준의 감소는 수요 또는 손실에 기인하며, 재고수준이 s로 떨어지자마자 곧바로 S 수준으로 하기 위하여 Q = S - s 만큼의 일정량이 주문되며, 재고의 보충은 즉시 이루어진다고 가정한다.

본 연구에 사용되는 기호의 정의는 다음과 같다.

μ : 평균 수요율
λ : 평균 손실율
K : 주문당 주문비용
c : 단위당 가변보충비용
h : 단위시간당 재고단위당 유지비용
S : 최적 재고수준
s : 주문점
Q : 주문량
H(t) : 시간 t 에서의 재고수준
E(H) : 기대 현 재고량
V_n : 재고수준이 n 상태에 머무르는 시간
E(V) : 두 연속적인 주문간의 기대 경과시간
C(s, Q) : 단위시간당 기대 총비용

H(t)를 임의의 시간 t 에서의 재고수준이라 하고, 재고가 n 단위 있을 확률을 $P(n,\ t) = P\{H(t)\}$ 이라 하면, (단, 여기서 $n = s+1,\ s+2,\ \cdots,\ S$이다.) dt 의 시간내에서 수요 또는 손실이 발생하게 되면 재고수준이 n+1 상태에서 n 상태로 되고, 수요도 손실도 발생하지 않으면 재고수준은 n 상태에 있게 된다. 만일 재고수준이 s+1 상태에서 수요나 손실이 있다면, 보충이 즉시 일어나므로 S 상태로 되게 된다. 이러한 변환은 <Figure 1>과 같이 표현된다. 이에 의하여 다음의 식들을 유도할 수 있다.

$s+1 \le n < S-1,\ t \ge 0$에 대하여,

$$P(n,\ t+td) = P(n,t)[\ 1-\mu dt - n\lambda dt + o(dt)] \ + \ P(n+1,\ t)[\ \mu dt + (n+1)\lambda dt + o(dt)]\ .$$

$n=S,\ t \ge 0$에 대하여,

$$P(n,\ t+dt) = P(n,\ t)[\ 1-\mu dt - n\lambda dt + o(dt)] \ + \ P(s+1,\ t)[\ \mu dt + (s+1)\lambda dt + o(dt)]\ .$$

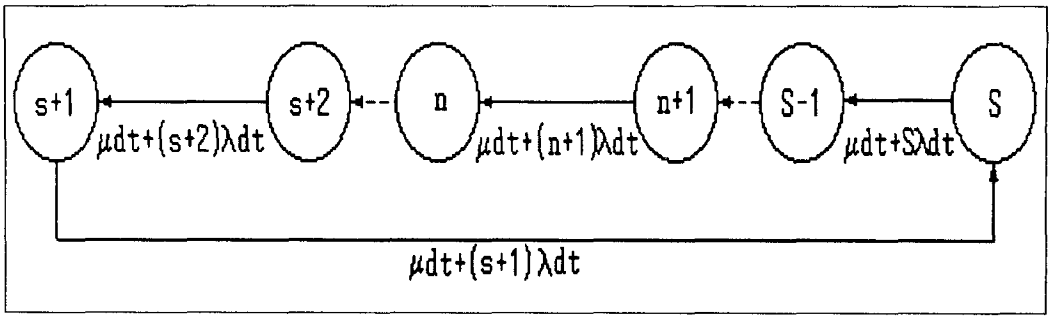

Figure 1. Transition diagram.

이항하여, dt 로 나누고, dt→0 으로 하면,

$$\frac{dP(n,\ t)}{dt} = -(\mu + n\lambda)P(n,\ t) + [\ \mu + (n+1)\lambda\ ]\ P(n+1,\ t),\quad s+1 \le n \le S-1. \quad (1)$$

$$\frac{dP(n,\ t)}{dt} = -(\mu + n\lambda)P(n,\ t) + [\ \mu + (s+1)\lambda\ ]\ P(s+1,\ t),\quad n = S. \quad (2)$$

P_n을 재고가 정확히 n 단위가 있는 안정상태에서의 확률이라 하면

즉,

$$P_n = \lim_{t\to\infty} P(n,\ t) = \lim_{t\to\infty} P[\ H(t) = n\ ]\ .$$

S=s+Q 이므로 식(1), (2)으로부터 다음의 안정상태 방정식이 얻어진다.

$$-(\mu + n\lambda)P_n + [\ \mu + (n+1)\lambda\ ]\ P_{n+1} = 0,\qquad s+1 \le n \le s+Q-1. \quad (3)$$

$$-(\mu + n\lambda)P_n + [\ \mu + (s+1)\lambda\ ]\ P_{s+1} = 0,\qquad n = s+Q. \quad (4)$$

식 (3)과 (4)의 시스템을 순환적으로 풀어 일반화하면 다음 식과 같다.

$$P_n = \frac{\mu + (s+1)\lambda}{\mu + n\lambda} P_{s+1}\ ,\qquad n = s+1,\ \cdots\ ,s+Q. \quad (5)$$

P_{s+1}의 값은 $\sum_{i=s+1}^{s+Q} P_i = 1.$ 에 의하여 결정할 수 있다.

$$P_{s+1} = \left\{ \sum_{i=s+1}^{s+Q} \frac{\mu + (s+1)\lambda}{\mu + i\lambda} \right\}^{-1}. \quad (6)$$

식 (6)을 식(5)에 대입하면, 재고수준의 안정상태 분포를 얻을 수 있다.

$$P_n = \left\{ (\mu + n\lambda) \sum_{i=s+1}^{s+Q} \frac{1}{\mu + i\lambda} \right\}^{-1}, \qquad n = s+1, \cdots, s+Q. \tag{7}$$

안정상태에 있어서 기대 현 재고(expected on-hand inventory)는 다음과 같다.

$$E(H) = \sum_{i=s+1}^{s+Q} iP_i = \Big(\sum_{j=s+1}^{s+Q} \frac{j}{\mu + j\lambda}\Big) / \Big(\sum_{i=s+1}^{s+Q} \frac{1}{\mu + i\lambda}\Big). \tag{8}$$

V_n을 재고수준이 n 상태에서 머무르는 시간이라고 하면, $fV_n(t)$의 확률밀도함수는

$$fV_n(t) = (\mu + n\lambda)e^{-(\mu + n\lambda)t}, \quad t \geq 0.$$

따라서 V_n은 모수 $\mu + n\lambda$를 갖는 지수분포이다. 그리고 주문간의 기대 경과시간 E(V)는 다음 식(9)와 같이 된다.

$$\begin{aligned} E(V) &= E\Big(\sum_{i=s+1}^{s+Q} V_i\Big) = \sum_{i=s+1}^{s+Q} E(V_i) \\ &= \sum_{i=s+1}^{s+Q} (\mu + i\lambda)^{-1}. \end{aligned} \tag{9}$$

손실에 의해서 i 상태에서 i−1 상태로 될 확률은 $i\lambda/(\mu + i\lambda)$ 이다. 따라서 한 주기당 평균 손실에 의한 평균 손실비용은 다음과 같다.

$$C \sum_{i=s+1}^{s+Q} \frac{i\lambda}{\mu + i\lambda}$$

안정상태 조건하에서, 단위 시간당 기대 총비용은 단위시간당 기대 보충비용, 기대 유지비용 및 평균 손실비용으로 이루어지며 s 와 Q 의 함수로 나타내면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} C(s, Q) &= \frac{K + CQ}{E(V)} + hE(H) + \frac{C}{E(V)} \sum_{i=s+1}^{s+Q} \frac{i\lambda}{\mu + i\lambda} \\ &= [\,K + CQ\,] \,/\, [\,\sum_{i=s+1}^{s+Q} (\mu + i\lambda)^{-1}] + [\,h \sum_{j=s+1}^{s+Q} \{j/(\mu + j\lambda)\}] \,/ \\ &\quad [\,\sum_{i=s+1}^{s+Q} (\mu + i\lambda)^{-1}] + [\,C \sum_{i=s+1}^{s+Q} \{i\lambda/(\mu + i\lambda)\}] \,/\, [\,\sum_{i=s+1}^{s+Q} (\mu + i\lambda)^{-1}] \\ &= [\,(K + CQ) + h\sum_{j=s+1}^{s+Q} \{j/(\mu + j\lambda)\} + C\sum_{i=s+1}^{s+Q} \{i\lambda/(\mu + i\lambda)\}] \,/ \\ &\quad [\,\sum_{i=s+1}^{s+Q} (\mu + i\lambda)^{-1}]\,. \end{aligned} \tag{10}$$

3. 최적조건

본 모델의 최적화는 단위 시간당 기대 비용을 최소화하는 것이다. 그럼으로 식 (10)에서 C(s, Q)을 s 와 Q 에 관하여 최적화 되어야 되는 것이다. s 가 증가됨에 따라 E(V)는 감소하고, E(H)는 증가되며 따라서 C(s, Q)가 증가되므로 s 의 최적치는 $s^*=0$ 이어야 함이 명백하다. Q 의 최적치는 다음 함수를 최소화하는 것에 의하여 얻어진다.

$$C(Q) = [\ (K+CQ)+h\sum_{j=1}^{Q}\{j/(\mu+j\lambda)\}+C\sum_{i=1}^{Q}\{i\lambda/(\mu+i\lambda)\}]\ /\ [\ \sum_{i=1}^{Q}(\mu+i\lambda)^{-1}]$$
$$= [\ (K+2CQ)+h\sum_{j=1}^{Q}\{j/(\mu+j\lambda)\}]\ /\ [\ \sum_{i=1}^{Q}(\mu+i\lambda)^{-1}]\ -C\mu. \qquad (11)$$

여기서 Q 는 양의 정수(positive integer)이므로 Q 의 최적치 Q^* 는 다음 조건을 만족하여야 한다.

$$C(Q^*) - C(Q^*+1) \le 0. \qquad (12)$$
$$C(Q^*) - C(Q^*-1) \le 0. \qquad (13)$$

식 (12), (13)을 정리하여 다음과 같은 부등식을 얻을 수 있다.

$$(\mu+Q^*\lambda+\lambda)\sum_{i=1}^{Q^*}(\mu+i\lambda)^{-1}-Q^* \ge \lambda K/(2C\lambda+h) \ge (\mu+Q^*\lambda)\sum_{i=1}^{Q^*}(\mu+i\lambda)^{-1}-Q^* \qquad (14)$$

따라서 최적주문량 Q^* 는 필요조건인 식 (14)를 만족시켜야 한다.

4. 수치계산 및 고찰

위에 밝힌 모델의 한 예로 다음과 같은 모수의 값을 갖는 시스템을 고려해 본다. 즉, K=₩1만원, C=₩400 원/단위, h=₩100 원/단위/년, μ=100 그리고 λ=5 이다. 식 (14)에 적용시켜 계산결과를 보면 Q 의 최적치 $Q^*=26$ 이 된다. 따라서 $s^*=0$ 이며, $S^*=26$ 이 된다. 그리고 식 (11)로 부터 기대 총비용은 ₩146,779가 된다. <Table 1>은 손실비율 λ의 여러 값에 대한 Q 의 최적치와 Q^* 에 따른 기대비용을 나타낸다. 또한 손실을 고려하지 않는다는 가정하의 Q^* 와, 실제 손실이 발생했다면 Q^* 는 일정하더라도 실제 비용은 다를 것이므로 λ 따른 비용을 개발된 본 모형의 비용식에서 계산되어 나타낸다.

Table 1. Optimal Value of Q varying with λ.

			Not considered the loss of items	
λ	Q^*	$C(Q^*)$	Q^*	$C(Q^*)$
1	51	₩ 60,861	141	₩ 81,821
5	26	146,779	141	165,686
10	20	223,536	141	253,081
20	15	356,257	141	408,563

이상의 결과를 고찰해 보면, λ 가 증가됨에 따라 Q^* 는 감소하지만 단위 시간당 최소 기대비용은 증가한다. 또한 손실을 고려하지 않고 Q 를 구할 때 보다는 손실을 고려한 본 모델에서의 주문량이 적어진다. 왜냐하면 제품을 많이 주문하여 재고로 가지고 있으면 가지고 있는 량에 비례하여 손실이 발생하므로 Q 를 적게하여 제품의 손실을 줄이려 할 것이다. 따라서 본 연구에서 개발된 최적 주문량의 결정모델은 실질적이다.

5. 결론

본 연구의 목적은 제품의 손실과 이에 따른 손실비용을 고려한 재고평가 정책에 대한 새로운 수학적 모델을 제시하는 데 있다. 기존 연구에서는 대개의 경우 현 재고량의 감소가 단지 수요에 의해 발생되던지, 손실을 고려하더라도 제품의 손실은 현 재고량에 비례하는 것이 아니라 오직 가정된 분포에 따른 손실발생에 대한 연구, 혹은 비례하더라도 손실비용을 무시한 연구이었다.

본 연구는 재고수준의 감소가 수요뿐만 아니라 보유하고 있는 재고량에 비례적으로 발생하는 손실에 기인하며 확률적으로 변한다는 가정하에 연구되었고, 손실비용을 고려한 기대 총 비용식을 도출하여 최적 주문량을 결정하는 모델을 개발하였으며, 민감도 분석을 통해 손실이 최적결정에 미치는 영향에 대하여 고찰하였다. 앞으로 현실적인 가정하의 실질적인 연구와 유용한 모델개발에 대한 연구가 이루어지기를 바란다.

참 고 문 헌

1. Buffa, E. S., *Modern Production Management*, John Wiley and Sons, Inc., New York, 1969.
2. Freeland, J. R. and Proteus, E. L., "Evaluating the Effectiveness of a New Method for Computing Approximately Optimal(s, S) Inventory Policies," *Opns. Res.*, Vol.28, No.2, pp.353-364, 1980.
3. Hadley, G. and Whitin, T. M., *Analysis of Inventory Systems*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1963.
4. Kumaraswamy, S. and Sankarasubramanian, E., "A Continuous Review of (S, s) Inventory Systems in which Depletion is due to Demand and Failure of Units," *J. of Opl. Res. Soc.*, Vol.32, No.11, pp.997-1001, 1981.
5. Nahmias, S. and Wang, S., "A Heuristic Lot-Size Reorder Point Model for Decaying Inventories," *Mgmt. Sci.*, Vol.25, No.1, pp.90-97, 1979.
6. Schneider, H., "Methods for Determining the Re-order Point of an (s, S) Ordering Policy when a Service Level is Specified," *J. of Opl. Res. Soc.*, Vol.29, No.12, pp.1181-1193, 1978.

7. Sivazlian, B. D., "A Continuous Review (s, S) Inventory System with Arbitrary Interarrival Distribution between Unit Demand," *Opns. Res.*, Vol.22, No.1, pp.65-71, 1974.
8. 최진영, 김만식, "An One-for-one Ordering Inventory Policy with Poisson Demands and Losses with Order Dependent Leadtimes," 한국경영과학회지, 제12권, 제1호, pp.27-33, 1987.