工業經營學會誌 第18卷 第34輯 1995年 6月 1

Eigenvector를 이용한 다속성의사결정에 관한 연구
- A Study on the Multi-Attribute Decision Making based on Eigenvector -

안 동 규*
An, Dong-Kyu

Abstract

The practical problem of multi-attribute decision making are formed by the uncertain attribute that the attribute by the alternatives cannot be defined or judged crisphy but only as vague.
In this case the final judgements are also represented by vague which have to be ordered to determine the optimal alternative. The problem is more complex if the evaluations of alternatives according to each attribute are expresed vague.
This paper described the results of a study done to determine how well multi-attribute decision marking perform in helping a decision maker arrive at a preferred solution to a multi-attribute problem with vague attribute. Particular area of research has concentrated on the issue of combining quantitative and qualitative data supplied by estimation. Futher study considers some method for suitable evaluation of qualitative data.

1. 서론

다속성의사결정 문제는 다수의 대안들 중에서 가장 적절한 대안을 선정하는 의사결정방법이다. 이 방법의 중요한 장점은 대안을 비교하기 위하여 서로 상이한 차원을 가지고 있는 속성들의 가치를 동일한 화폐단위로 변경시킬 필요가 없을 뿐만 아니라, 매우 복잡한 속성들에 대한 설명이 용이하다는 점이다. 그러나 각각의 평가기준치의 애매함과 평가기준간의 상대적인 중요도를 나타내는 가중치의 결정이 중요한 영향을 미친다. 가중치 결정에 대한 연구로서는 Satty[6,7]에 의한 방법이 제안되어 그와 관련된 많은 연구가 행해지고 있다.

의사결정에 있어서 속성이 지배적인 요소가 될때 그러한 상황을 선택(choice)의 문제로 정의할 수 있으며, 목적(objective)들이 지배적인 경우에는 그것을 설계(design) 문제로 정의할 수 있다.
이러한 대안들은 다수의 속성들을 갖고 있으며, 그들의 상대적 중요성은 보다 신뢰성 있는 평가방법을 요구하고 있다.

각 대안에 대한 속성들이 정량화 되어 있는 경우는 대안평가에 있어서 어려움이 없으나, 의사결정자의 모호한 정보에 따른 주관적인 판단치인 정성적인 값은 의사결정에 어려움을 주고 있다.
본 연구에서는 속성들의 상대적 가치를 판단함으로써 각 대안을 비교분석할 수 있는 다속성의사결정방법을 중심으로 효율적인 의사결정 기법을 개발하여 속성의 모호한 정보를 정량화할 수 있는 방법을 제시하고, 이 방법을 정보가 모호한 경우의 설비교체 문제에 적용하여 최적대안을 선정하는데 적용하였다.

---

* 건국대학교 산업공학과

2. Eigenvector에 의한 모호한 속성의 평가

다속성 의사결정문제에서 많은 방법들은 각 요소들의 상대적인 가중치를 필요로 한다[1]. 이러한 정보는 합이 1이 되는 가중치의 집합으로 받아 들여진다. n개의 요소가 있을 때 가중치의 집합은 벡터 형태

$$\underline{w}^T = (w_1, \cdots, w_j, \cdots, w_n)$$

$$\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$$

로 표시된다.

쌍대비교행렬의 Eigenvector를 이용하여 비율규준화(scaling ratio)방법의 행렬 A를 구하면

$$A = \{a_{ij}\} = \left\{\frac{w_i}{w_j}\right\}$$

여기서 $a_{ij} = \dfrac{1}{a_{ji}}$

$$a_{ij} = \frac{a_{ik}}{a_{kj}}$$

의 성질을 갖는 역수행렬(reciprocal matrix)이 된다. 그러므로 Eigenvalue 문제 $A\underline{w} = n\underline{w}$, 즉 $(A - nI)\underline{w} = \underline{0}$를 만족시키는 $\underline{w}$를 구할 수 있다.

보통 $\dfrac{w_i}{w_j}$의 정확한 값을 모르므로 추정치를 사용 한다.

어떤 행렬에서 계수들의 작은 변동은 Eigenvector에서 작은 변동을 유발시킨다. A'을 A의 추정행렬, $\underline{w}'$을 $\underline{w}$의 추정벡터라 하면

$$A'\underline{w}' = \lambda_{\max}\underline{w}'$$

가 된다. $\lambda_{\max}$는 Eigenvalue 중 가장 큰 값이다. 그러므로 추정치 $\underline{w}'$는 윗 식에 의하여 구할 수 있다.

3. 최적대안의 선정

위에서 구한 값을 이용하여 ELECTRE 방법[1]에 의해 다음 절차로 최적대안을 선정한다.

절차 1 : $\underline{w}^T$ 값에 대한 정규화(normalized)된 의사결정행렬을 구한다.

$$R = \{r_{ij}\},$$

$$r_{ij} = \frac{x_{ij}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{m} x_{ij}^2}}$$

모든 요소치는 같은 크기의 단위벡터 길이를 갖는다.

절차 2 : 정규화된 의사결정행렬에 가중치를 부여한다.

$$v_{ij} = w_j r_{ij}$$

또는, $V = RW = \{v_{ij}\}$ 여기서 $W = \begin{pmatrix} w-1 & 0 \\ 0 & w_n \end{pmatrix}$

절차 3 : 일치(Concordance)와 불일치(Discordence)집합을 형성한다,.

$C_{kl} = \{ j \mid x_{kl} \geq x_{ij} \}$

$D_{kl} = \{ j \mid x_{kl} < x_{ij} = J - C_{kl} \}$

$J = \{ j \mid j = 1, 2, \cdot\cdot\cdot, n \}$

절차 4 : 일치행렬을 구한다.

$C = \{ c_{kl} \}$

$c_{kl} = \sum w_i \; / \; \sum_{j=1}^{n} w_j$: 일치지수(concordance index)

여기서 c_{kl}이 커질수록 일치기준하에서 A_k가 A_l보다 우위에 있다는 가정의 확증이 커진다.

절차 5 : 불일치(Discordance)행렬을 구한다.

$D = \{ d_{kl} \}$

$$d_{kl} = \frac{\max_{j \in D_{kl}} | v_{kj} - v_{lj} |}{\max_{j \in J} | v_{kj} - v_{lj} |}$$: 불일치지표(discordance index)

여기서는 d_{kl}이 커질수록 불일치 기준하에서 A_k가 A_l보다 우위에 있다는 가정의 의심이 커진다.

절차 6 : 일치우위(concordance dominance)행렬을 구한다.

이 행렬은 일치지표와 역치(threshold value)를 이용하여 계산한다.

일치지표 c_{kl}이 주어진 역치 $\bar{c}$보다 크면 A_k가 A_l보다 우위에 있다. 이 역치 $\bar{c}$는

$$\bar{c} = \sum_{k=1}^{m} \sum_{l=1}^{m} \frac{c_{kl}}{m(m-1)}$$

로 구성된다. 역치에 근거하여 원소는 다음과 같은 불리안(Boolean)행렬 F를 구성한다.

$F = \{ f_{kl} \}$

$$f_{kl} = \begin{cases} 1, & c_{kl} \geq \bar{c} \text{ 일때} \\ 0, & c_{kl} < \bar{c} \text{ 일때} \end{cases}$$

즉, 원소 1은 대안 A_k가 A_l에 대하여 일치관점에서의 우위임을 나타낸다.

절차 7 : 불일치우위(discordance dominance) 행렬을 구한다.

불일치 지표와 역치 $\bar{d}$를 이용하여 계산한다. 이 역치 $\bar{d}$는

$$\bar{d} = \sum_{k=1}^{m} \sum_{l=1}^{m} \frac{d_{kl}}{m(m-1)}$$

로 구성되며, 불일치우위 행렬 G는 다음과 같은 원소를 갖는다.

$$g_{kl} = \begin{cases} 1, & d_{kl} \leq \bar{d} \text{ 일때} \\ 0, & d_{kl} < \bar{d} \text{ 일때} \end{cases}$$

절차 8 : 절차 6, 7에서 구한 행렬 F, G를 결합하여 결합행렬 E를 구한다.
결합행렬 E는 $e_{kl} = f_{kl} \times g_{kl}$을 원소로 갖는다.

절차 9 : 결합행렬에 의하여 받아들여질 수 없는 대안들을 제거한 후 최적대안을 선정한다.

절차 10 : 위 절차에 의하여 최적 대안이 결정되지 않으면 열세 대안을 제거하고 나머지 대안의 우선순위를 다시 비교하여 최적대안을 선정한다.

4. 수치예

설비교체 의사결정 과정에서 실제로 대두되고 있는 문제를 선정하여 그 적용성을 검토하였다. 설비교체 선정에 대하여 전문가로 부터 제안된 가능한 대안에 대한 자료는 표 1과 같다. 신뢰성과 보전성에 대한 의사결정 전문가의 정보는 정성적 자료로서 이를 정량화시켜야 한다. 즉 현재 사용하고 있는 설비와 같은 종류의 설비(대안1)를 기준으로 하여 새로운 설비(대안2)는 현 설비보다 신뢰성면에서는 좋은 편이나, 보전성면에서는 나쁜편이라고 전문가가 정보를 제시하였고, 대안3과 대안4도 같은 절차에 의하여 전문가의 정보를 획득하였다.

표 1 설비교체 대안의 성능

	대안			
	1	2	3	4
최대생산량(개/분)	90	100	120	80
구매비(단원:만원)	350	500	600	300
신 뢰 성	보 통	좋 다	매우 좋다	나쁘다
보 전 성	보 통	나쁘다	나쁘다	좋 다

본 장에서는 이상과 같은 실제문제를 해결하기 위하여 먼저 정성적인 값을 비교 우위의 개념에 의하여 신뢰성 및 보전성의 행렬을 구한다. 신뢰성 면에서 대안2는 대안1보다 우세하다는 정보는 2값으로 주어지면 이에 반하여 대안1은 대안2에 대하여 1/2의 값을 갖는다. 또한 보전성 면에서는 대안 2는 대안1보다 열등하므로 1/2의 값을 가지며, 이에 반하여 대안1은 2의 값을 갖는다.
그러므로 신뢰성 및 보전성에 대한 정보를 정리하면 다음과 같다.

$$\text{신뢰성} : \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 2 \\ 2 & 1 & \frac{2}{3} & 4 \\ 3 & \frac{3}{2} & 1 & 6 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{6} & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{보전성} : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & 1 & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & 1 & 1 & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & 4 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Eigenvalue 문제 $A\underline{w} = n\underline{w}$, 즉 $(A - nI)\,\underline{w} = \underline{0}$를 만족시키는 영벡터(zero vector)가 아닌 $\underline{w}$를 구하면 다음과 같다.

$$\text{신뢰성} : |A - \lambda I| = \begin{pmatrix} 1-\lambda & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 2 \\ 2 & 1-\lambda & \frac{2}{3} & 4 \\ 3 & \frac{3}{2} & 1-\lambda & 6 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{6} & 1-\lambda \end{pmatrix} = 0$$

$$\text{보전성} : |A - \lambda I| = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 & 2 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1-\lambda & 1 & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & 1 & 1-\lambda & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & 4 & 4 & 1-\lambda \end{pmatrix} = 0$$

그러므로 신뢰성에 대한 λ_{max} = 4.0000, 보전성에 대한 λ_{max} = 3.9999이다.

이에 대한 $\underline{w}^T$를 구하면 다음과 같다.

$$\text{신뢰성} : \begin{pmatrix} -3 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 2 \\ 2 & -3 & \frac{2}{3} & 4 \\ 3 & \frac{3}{2} & -3 & 6 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{6} & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \end{pmatrix} = 0$$

$$\text{보전성} : \begin{pmatrix} -2.999 & 2 & 2 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -2.999 & 1 & 4 \\ \frac{1}{2} & 1 & -2.999 & 4 \\ 2 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -2.999 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \end{pmatrix} = 0$$

결과적으로 구해진 신뢰성의 $\underline{w}$는 $\underline{w}^T$ = (0.2648, 0.5299, 0.7947, 0.1325)이고, 보전성은 $\underline{w}^T$ = (0.4264, 0.2132, 0.2132, 0.8528)이다.

$\underline{w}^T$값에 대한 정규화된 의사결정행렬을 구하면 다음과 같다.

$$R = \begin{pmatrix} 0.4563 & 0.3859 & 0.2648 & 0.4264 \\ 0.5070 & 0.5513 & 0.5299 & 0.2132 \\ 0.6084 & 0.6616 & 0.7947 & 0.2132 \\ 0.4056 & 0.3308 & 0.1325 & 0.8528 \end{pmatrix}$$

각 요소에 대한 가중치 w = (0.2, 0.35, 0.25, 0.2)라 가정하고 정규화된 의사결정행렬에 가중치를 부여하면 다음과 같다.

$$V = \begin{pmatrix} 0.0913 & 0.1351 & 0.0637 & 0.0853 \\ 0.1014 & 0.1930 & 0.1325 & 0.0426 \\ 0.1217 & 0.2316 & 0.1987 & 0.0426 \\ 0.0811 & 0.1158 & 0.0331 & 0.1706 \end{pmatrix}$$

일치와 불일치집합을 형성하고 일치행렬과 불일치행렬을 구하면 다음과 같다.

$$
\begin{array}{llll}
c_{12} = \{2, 4\} & & d_{12} = \{1, 3\} \\
c_{13} = \{2, 4\} & & d_{13} = \{1, 3\} \\
c_{14} = \{1, 3\} & & d_{14} = \{2, 4\} \\
c_{21} = \{1, 3\} & & d_{21} = \{2, 4\} \\
c_{23} = \{2, 4\} & & d_{23} = \{1, 3\} \\
c_{24} = \{1, 3\} & & d_{24} = \{2, 4\} \\
c_{31} = \{1, 3\} & & d_{31} = \{2, 4\} \\
c_{32} = \{1, 3, 4\} & & d_{32} = \{2\} \\
c_{34} = \{1, 3\} & & d_{34} = \{2, 4\} \\
c_{41} = \{2, 4\} & & d_{41} = \{1, 3\} \\
c_{42} = \{2, 4\} & & d_{42} = \{1, 3\} \\
c_{43} = \{2, 4\} & & d_{43} = \{1, 3\}
\end{array}
$$

$$
C = \begin{pmatrix} - & 0.55 & 0.55 & 0.45 \\ 0.45 & - & 0.55 & 0.45 \\ 0.45 & 0.65 & - & 0.45 \\ 0.55 & 0.55 & 0.55 & - \end{pmatrix}
$$

$$
D = \begin{pmatrix} - & 0.8416 & 1.0 & 1.0 \\ 0.1468 & - & 1.0 & 1.0 \\ 0.2252 & 0.5831 & - & 0.7729 \\ 0.1196 & 0.6031 & 1.0 & - \end{pmatrix}
$$

일치 우위행렬과 불일치행렬을 구하면 다음과 같다.

$$
\overline{C} = \frac{6.2}{4 \times 3} = 0.5167
$$

$$
F = \begin{pmatrix} - & 1 & 1 & 0 \\ 0 & - & 1 & 0 \\ 0 & 1 & - & 0 \\ 1 & 1 & 1 & - \end{pmatrix}
$$

$$
\overline{D} = \frac{8.2923}{4 \times 3} = 0.691025
$$

$$
G = \begin{pmatrix} - & 0 & 0 & 0 \\ 1 & - & 0 & 0 \\ 1 & 1 & - & 0 \\ 1 & 1 & 0 & - \end{pmatrix}
$$

일치 우위행렬과 불일치 우위행렬에 의하여 결합행렬을 구하면 다음과 같다.

$$
E = \begin{pmatrix} - & 0 & 0 & 0 \\ 0 & - & 0 & 0 \\ 0 & 1 & - & 0 \\ 1 & 1 & 0 & - \end{pmatrix}
$$

결합행렬에 의하여 대안의 우위를 비교하면 다음과 같다.

$3 \rightarrow 2$, $4 \rightarrow 1$, $4 \rightarrow 2$

즉, 대안3이 대안2에 우위 하며, 대안4는 대안1과 대안2에 우위이다.
그러나 여기서는 대안3과 대안4를 비교할 수 없으므로 최적대안을 결정할 수 없다. 그러므로 다른 대안에 비해 상대적으로 우위에 있는 대안3과 대안4를 따로 분리(즉, 상대적으로 열세인 대안1과 대안2를 제거) 하여 둘사이의 우선순위를 전 절차에 의하여 구함으로써 최적대안을 선정한다.
같은 절차에 의하여 결합행렬을 구하면 다음과 같다.

$$E = \begin{pmatrix} - & 0 \\ 1 & - \end{pmatrix}$$

결합행렬에 의하여 대안의 우위를 비교하면 다음과 같다.

4 → 3

즉, 대안4가 대안3 보다 우위임을 알 수 있다.

결론적으로 상대적 우위 개념에 의하여 대안 4가 최적대안으로 선정된다.

5. 결론

의사결정 과정에서 대두되는 실제 문제는 매우 복잡 다양하며 유동적이고 불확실성이 내포되어 있다. 이에따라 의사결정방법은 단일속성 평가방법으로 부터 다중속성 평가방법으로 발전되고 있으며 이러한 관점에서 볼때 의사결정 문제는 가능한 대안중 최선의 대안을 선정하는 문제라고 할 수 있다.
본 연구에서는 의사결정 평가기준이 의사결정자의 주관에 의한 정성적인 값으로 주어진 경우 이를 보다 적절히 이용할 수 있는 방법을 제시하고 한번의 절차에서 최적 대안이 결정되지 않으면 열세 대안을 제거한 후 다시 반복 절차에 의하여 최적 대안을 선정하였다.
그러므로 본 연구에서 제시한 방법을 평가에 활용할 경우, 현실적으로 다속성평가문제에 있어서 가장 중요한 요소의 하나인 의사결정자가 고려하는 평가속성간의 중요성의 정도에 대한 왜곡을 방지할 수 있을 것으로 기대된다.
그러나 본 연구에서 제시한 방법만으로 모든 의사결정문제를 결정하는데는 몇가지 제한사항이 있다. 즉 조직의 상위차원에서 보면 각각의 속성들은 상호작용 및 상충관계가 존재할 수 있기 때문에 위에서 제시한 방법과 더불어 이러한 문제를 고려할 수 있는 새로운 방법을 이용하여야만 최선의 대안을 선정할 수 있을 것이며, 대안평가에서 나타나는 정성적인 자료에 대하여 타당성 있게 계량화하는데는 아직도 많은 어려움이 남아 있다.
아울러 다속성의사결정 방법을 사용할때 의사결정자가 이용할 수 있는 정보에는 한계가 있으나 의사결정자가 합리적인 판단을 할 수 있도록 실무자의 조언이 뒤 따를때 다속성 의사결정 문제는 획기적으로 발전할 것이다.

參考文獻

1. 김성의, 의사결정론, 영지문화사, pp. 406~412, 1990.
2. 정규련, 정택수, 퍼지교차종속관계를 이용한 다기준평가문제의 가중치 책정방법, 한국경영과학회지, 제19권, 제3호, PP.53~62, 1994.
3. Bernardo, J.J. and Blim, J.M., "A Programming Model of Consumer Choice among Multi-Attributed

Brands," J. of Consumer Research, Vol. 13, pp.111~118, 1977.
4. Buckley, J.J., "The Multiple Judge, Multiple Criteria Ranking Problem:A Fuzzy Sets and Systems Approach," Fuzzy Sets and Systems, Vol. 13, pp.25~37, 1984.
5. Pekelman, D. and Sen, S.K., "Mathematical Programming Models for the Determination of Attribute Weights," Management Science, Vol. 20, pp.1217~1229, 1974.
6. Satty, T. L.,"A Scaling Method for Priorities in Hierarchical Structures," J.of Mathematical Psychology, Vol. 15, No. 3, pp.234~281, 1977.
7. Satty, T. L. & M. Takizawa, "Dependence and independance:From linear hierarchies to nonlinear networks", European Journal of Operational Research 26, pp. 229~237, 1986.
8. Solymosi, T, and Dombi, T., "A method for determining the weights of criteria : the centralized weights," European J. of Operations Research, Vol. 26, pp.35~41, 1986.
9. Vansick, J. C., "On the Problem of Weights in Multiple Criteria Decision Making(the noncompensatory approach)," European J. of Operational Research, Vol. 24, pp. 288~294, 1986.
10. Vincke, P., "Analysis of Multicriteria decision aids in Europe," European J. of Operations Research, Vol. 25, pp.160~168, 1986.
11. Yoon, K. S. and G. T. Kim, "Multiple Attribute Decision Analysis with Imprecise Information," IIE Transactions, Vol. 21, pp.21~26, 1989.