
 論 文

大韓造船學會論文集
 第 32 卷第 2 號 1995 年 5 月
 Transactions of the Society of
 Naval Architecture of Korea
 Vol. 32, No. 2, May, 1995

석유시추공에서의 저주파음향의 전달에 관한 연구

이현엽*

A Study on Wave Propagation in Drilling Boreholes at Low Frequencies

by

H. Y. Lee*

요 약

석유시추공에서 저주파음향의 전파특성을 파악하기 위하여, 무한히 길고, 균일한 단면을 갖고, 유체와 고체로 구성된 원통형 다층 음향도파관에 대한 이론적 해석을 수행하여, 각 층들의 연성작용을 고려한 음향의 전파모드, 전파속도를 구했다. 저주파수(음향파의 파장이 시추공 지름에 비해 매우 크다), 축대칭, 비점성유체 등의 가정을 함으로써 해석적 해를 얻을 수 있었다. 또한 그 결과를 이용하여 단면의 변화가 있는 곳에서의 반사를 해석하는 기법을 제시하였다. 각 층간의 연성이 심한 경우와 연성이 무시될 수 있는 경우에 대한 실제 해석을 통하여 본 기법의 유용성을 확인하였으며, 유한요소법으로 해석한 결과와의 비교를 통하여 본 기법을 검증하였다.

Abstract

To understand how low-frequency sound waves propagate axially in drilling boreholes, the propagation modes and speeds including the effect of interaction among layers are obtained by analyzing an infinitely-long, uniform, and cylindrically multi-layered waveguide which is consisted of fluid layers and solid layers. Assuming low frequency(wave length considered is very long compared to the borehole diameter), axisymmetry, non-viscosity, and etc., analytical solutions are obtained. Also, sound reflection due to the changes in the cross section is analyzed. Results for typical drilling boreholes show the usefulness of the method developed in this research, and are compared with FEM results showing good agreements.

발 표 : 1994년도 대한조선학회 추계연구발표회('94. 11. 12)

접수일자 : 1994년 11월 28일, 재접수일자 : 1995년 4월 13일

* 정회원, 홍익대학교 조선해양공학과

1. 서론

석유자원이 고갈되어 감에 따라, 선진국에서는 기술적으로 개발이 어려운 유전에 대해 관심이 높아졌고, 최근 비트의 방향을 제어함으로써 구멍을 직선뿐 아니라 원하는 곡선으로 파 들어가는 Directional Boring 기술이 개발되어, 포기했던 유전의 개발가능성을 보여주었다.

이 Directional Boring에서는, 비트의 위치와 방향 및 동적거동 등을 실시간으로 알아내는 것이 성패를 좌우하게 된다. 현재 가장 활발하게 개발되고 있는 방법은 비트 근처에서 측정된 정보를 Pulse 형태의 음향파로 드릴파이프 속의 유체(Mud)를 통하여 지상으로 전달하는 소위 Mud Pulse Telemetry System이다. 이 방법에서는 시추공에서의 음향전파를 해석할 수 있는 이론적 모델이 필요한데, 기존의 모델로는 아직 현장에서의 성공률이 그다지 높지 못한 형편이다. 따라서 새로운 모델의 개발이 절실히 요구되고 있는 실정이다. 이에 관한 연구는 각 기업이 보안유지 속에서 진행하고 있는 만큼, 발표된 연구결과는 거의 없다[1]. 지층에서의 음향전파속도를 측정하기 위한 Velocity Logging[2,3]에 관한 분야가 이와 유사한 연구라 할 수 있으나, 석유시추공은 유체로 가득 찬 Borehole 속에 파이프가 있다는 점에서 그 음향전달특성이 매우 다르다.

석유시추공은 음향학적으로 파이프 속의 유체, 파이프, 파이프와 시추공 사이의 유체, 시추공을 둘러싸고 있는 암석으로 구성되는 원통형 다층 음향도파관이다. 기존의 음향해석 방법은 각 층에 대해서 별도로 해석하거나 바로 인접한 층만 같이 고려하는 방법을 사용하고 있다[4,5,6]. 본 연구에서는 모든 층들의 상호작용을 근본적으로 이해하기 위하여 4개의 층을 동시에 고려하여 이론적 해석을 하였다.

고려되는 음파의 파장이 시추공의 지름에 비해 매우 크다는 저주파수 가정을 함으로써 운동방정식을 단순화 시키고, 수치해석적 방법이 아닌 해석적 해를 얻었다. 이 가정은 현재 Mud Pulse Telemetry System에서 사용하고 있는 주파수 범위에서는 충분히 만족된다.

본 연구에서는 우선 무한히 길고 단면이 일정한 경우에 대해 해석을 하였고, 그 결과를 이용하여 단면의 변화가 있는 곳에서의 음향파의 반사를 해석하였다. 또한 실제의 시추공에 대한 계산을 수행하였고, 유한요소법으로 해석한 결과와의 비교 검토를 통하여 본 연구에서 개발된 이론적 모델과 해석방법을

검증하였다. 입력 자료가 lb-ft-sec 단위계로 입수되었기 때문에 실제 계산에서도 같은 단위계를 사용하였다.

2. 이론해석

석유시추공에서 저주파음향이 어떻게 전파되는가를 이해하기 위하여, Fig. 1과 같이 반경방향으로 무한하고 균일한 암석층(formation)에 둘러싸인, 길이 방향으로 균일하고 무한히 긴 원통형 다층 음향도파관에서의 음향전파에 대한 해석을 하였다. 가운데 첫번째 층은 파이프 속의 유체(inner mud)이고, 두번째 층은 파이프, 세번째 층은 파이프와 시추공벽(formation) 사이의 유체(outer mud), 네 번째 층은 시추공을 둘러싸고 있는 암석층이다. 또한 그 결과를 이용하여 단면의 변화가 있는 곳에서의 음향파의 반사를 해석하였다.

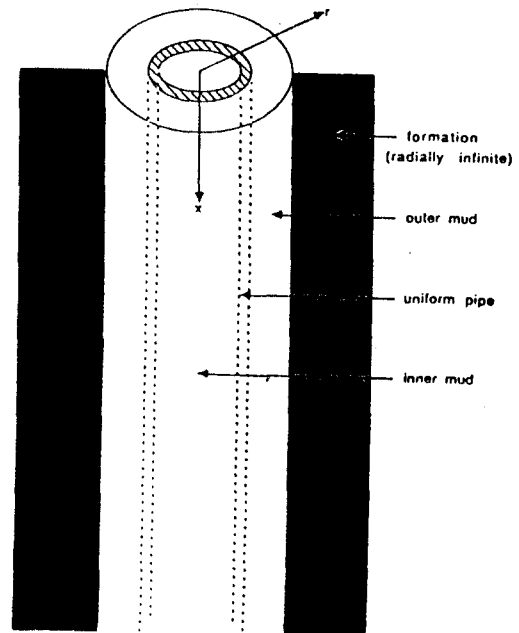


Fig. 1 Idealized uniform borehole

2.1 가정

본 연구에서는 다음과 같은 가정을 하여, 운동방정식을 단순화하였다. 첫째, 시추공의 기하학적 모양으로 부터 축대칭을 가정할 수 있으므로, 본 해석에

서는 원통좌표계를 사용하며 2차원 θ -independent 문제로 된다. 둘째, 본 연구에서는 그 파장이 시추공 지름에 비해 매우 큰 저주파음향에 대한 해석을 한다. 셋째, mud의 점성은 무시하며, 따라서 시추공 내에서의 전단력은 무시한다. 네째, mud에서의 음향전파속도의 깊이에 따른 변화는 무시할 수 있다[7]. 다섯째, mud의 순환속도는 mud의 음향전파속도에 비해 매우 느리다. 여섯째, mud에서의 정적압력은 mud의 bulk modulus에 비해 매우 낮다.

2.2 운동방정식의 유도

2.2.1 파이프

Fig. 1의 파이프에 대하여, 축대칭을 가정하고 전단력을 무시하면 반경방향과 축방향에 대한 운동방정식은 각각 다음과 같이 된다.

$$\rho_p \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} \quad (1)$$

$$\rho_p \frac{\partial^2 u_p}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma_p}{\partial x} \quad (2)$$

- ρ_p : 파이프의 밀도
- u_r, u_p : 파이프의 반경, 축방향 변위
- $\sigma_r, \sigma_\theta, \sigma_p$: 파이프에서 반경, θ , 축방향의 응력

식(1)은 응력-변형 관계와 저주파수임을 이용하면 반경방향의 변위에 대한 quasi-static 문제로 단순화된다. 또한 주위 유체의 압력이 주어지면 경계치문제로 되며, 그 해는 다음과 같다.

$$u_r = C_1 r + \frac{C_2}{r} \quad (3)$$

여기서,

$$C_1 = (1+\nu)(1-2\nu) \frac{a^2 p_i - b^2 p_o}{E(b^2 - a^2)} - \nu \frac{\partial u_p}{\partial x}$$

$$C_2 = (1+\nu) \frac{a^2 b^2 (p_i - p_o)}{E(b^2 - a^2)}$$

- E, ν : 파이프의 Young's modulus, Poisson 비
- a, b : 파이프의 내반경, 외반경
- p_i, p_o : inner mud 압력, outer mud 압력

축 방향의 운동은 Poisson 효과로 인하여 반경방향의 운동과 연성이 되는데, 식(2)는 응력-변형 관계와 식(3)을 이용하여, 다음과 같이 나타낼 수 있다 [9].

$$\rho_p \frac{\partial^2 u_p}{\partial t^2} = E \frac{\partial^2 u_p}{\partial x^2} + \frac{2\nu}{b^2 - a^2} \left(a^2 \frac{\partial p_i}{\partial x} - b^2 \frac{\partial p_o}{\partial x} \right) \quad (4)$$

2.2.2 암석층 (Formation)

Fig. 1과 같이 반경방향으로 무한하고 균일한 암석 속에 원통형 시추공이 있고 그 속에 유체에 의한 압력 (p_o)이 작용할 때, 시추공 벽면의 반경방향의 변위 (u_{rc})는 저주파수 가정에 의하여 다음 식과 같이 간단히 표현된다[9].

$$u_{rc} = \frac{c p_o}{2 G} \quad (5)$$

G : 암석의 shear modulus

c : 시추공의 반경

2.2.3 유체

석유시추공에는, 파이프 속의 유체(inner mud)와 파이프와 시추공 벽 사이의 유체(outer mud), 두 개의 유체층이 있다. 2.1절에서의 설명과 같이 비점성 유체를 가정하고, mud의 순환속도를 무시하고, 또한 깊이에 따른 음향전파속도의 변화를 무시하면, 각 유체층의 축방향운동은 다음식과 같이 탄성 파이프 속의 유체의 운동으로 표현된다.

$$\rho_m \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = B \frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2} + B \frac{\partial A_i}{\partial x} \quad (6)$$

$$\rho_m \frac{\partial^2 u_o}{\partial t^2} = B \frac{\partial^2 u_o}{\partial x^2} + B \frac{\partial A_o}{\partial x} \quad (7)$$

$$A_i = \frac{2u_{ra}}{a} \quad (8)$$

$$A_o = \frac{2cu_{rc} - 2bu_{rb}}{c^2 - b^2} \quad (9)$$

여기서,

ρ_m, B : mud 의 밀도, bulk modulus

u_i, u_o : inner mud, outer mud 의 축방향 변위

u_{ra}, u_{rb}, u_{rc} : $r = a, b, c$ 에서의 반경방향 변위

A_i 은 inner mud layer의 초기 단면적에 대한 면적 변형도이고, A_o 은 outer mud layer에 대한 것이다. 각 층의 경계에서의 반경방향 변위는 식(3), (5)로부터 구하고, 식(6), (7)에서의 면적변형도의 미분은 식(8), (9), (4)로부터 다음과 같이 표현할 수 있다 [9].

$$\frac{\partial A_i}{\partial x} = -\frac{2\nu\rho_p\partial^2 u_p}{E\partial t^2} + \frac{\partial p_i}{K_a\partial x} - \frac{\partial p_o}{K_{ab}\partial x} \quad (10)$$

$$\frac{\partial A_o}{\partial x} = \frac{b^2}{c^2-b^2} \frac{2\nu\rho_p}{E} \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} - \frac{1}{K_{ba}} \frac{\partial p_i}{\partial x} + \left\{ \frac{1}{K_b} + \frac{1}{K_c} \right\} \frac{\partial p_o}{\partial x} \quad (11)$$

여기서,

$$K_a = \frac{E}{2} \frac{b^2-a^2}{(1-\nu)a^2+(1+\nu)b^2}$$

$$K_{ab} = \frac{E}{4} \frac{b^2-a^2}{b^2}$$

$$K_b = \frac{E}{2} \frac{c^2-b^2}{b^2} \frac{b^2-a^2}{(1+\nu)a^2+(1-\nu)b^2}$$

$$K_{ba} = \frac{E}{4} \frac{c^2-b^2}{b^2} \frac{b^2-a^2}{a^2}$$

$$K_c = G \frac{c^2-b^2}{c^2}$$

2.2.4 연성 운동방정식

각 유체층에서의 압력은 축 방향 변위와 다음과 같은 관계를 갖는다.

$$\frac{\partial p_i}{\partial x} = -\rho_m \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \quad (12)$$

$$\frac{\partial p_o}{\partial x} = -\rho_m \frac{\partial^2 u_o}{\partial t^2} \quad (13)$$

각 층에서의 축 방향의 운동방정식, 식(4), (6), (7)은 식(10), (11), (12), (13)을 이용하여, 축방향 변위만의 식으로 나타낼 수 있고, 행렬의 형태로 표현하면 다음과 같다.

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} [M] \begin{Bmatrix} u_p \\ u_i \\ u_o \end{Bmatrix} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} [K] \begin{Bmatrix} u_p \\ u_i \\ u_o \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (14)$$

[M] =

$$\begin{bmatrix} \rho_p & \frac{2\nu a^2}{b^2-a^2} \rho_m & \frac{-2\nu b^2}{b^2-a^2} \rho_m \\ \frac{2\nu B}{E} \rho_p & \left(1 + \frac{B}{K_a}\right) \rho_m & \frac{-B}{K_{ab}} \rho_m \\ \frac{-b^2}{c^2-b^2} \frac{2\nu B \rho_p}{E} & \frac{-B}{K_{ba}} \rho_m & \left(1 + \frac{B}{K_b} + \frac{B}{K_c}\right) \rho_m \end{bmatrix} \quad (15)$$

$$[K] = \begin{bmatrix} E & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & B \end{bmatrix} \quad (16)$$

2.3 운동방정식의 해

2.3.1 제차해 (Homogeneous Solution)

식(14)는 각 층의 축방향 변위에 대하여 wave-form의 해 ($e^{i(\omega t - k_x x)}$)를 가정하면, 다음과 같이 고유치문제로 되며 축 방향으로의 음향전파속도 ($c_x = \omega/k_x$)를 고유치로 갖는다.

$$[-[M] c_x^2 + [K]] \begin{Bmatrix} u_p \\ u_i \\ u_o \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (17)$$

위의 식이 해를 갖기 위해서는, 다음과 같은 특성방정식을 만족하여야 한다.

$$|-[M] c_x^2 + [K] | = 0 \quad (18)$$

이 특성방정식은 세개의 고유치(축 방향으로의 음향전파속도)를 가지며, 각각의 고유치에 대하여 각 층의 축방향 변위의 분포를 나타내는 모드가 얻어진다. 속도모드와 압력모드는 다음과 같이 축방향 변위모드로 부터 구할 수 있다.

$$\begin{Bmatrix} v_p \\ v_i \\ v_o \end{Bmatrix}_n = i\omega \begin{Bmatrix} u_p \\ u_i \\ u_o \end{Bmatrix}_n \quad (19)$$

$$\begin{pmatrix} \sigma_p \\ p_i \\ p_o \end{pmatrix}_n = c_{xn} \begin{bmatrix} -\rho_p & 0 & 0 \\ 0 & \rho_m & 0 \\ 0 & 0 & \rho_m \end{bmatrix} \begin{pmatrix} v_p \\ v_i \\ v_o \end{pmatrix}_n \quad (20)$$

여기서,

v_p, v_i, v_o 파이프, inner mud, outer mud 의
 축방향 속도
 n: 모드 number (=1,2,3)

2.3.2 모달해석 (Modal Analysis)

$x=0$ 에서 기진력, $\{f\}e^{i\omega t}$, 가 작용할 때의 해는
 다음과 같이 앞에서 구한 모드들의 선형합성으로 나
 타낼 수 있다.

$$\begin{pmatrix} \sigma_p \\ p_i \\ p_o \end{pmatrix} = D_1 \begin{pmatrix} \sigma_p \\ p_i \\ p_o \end{pmatrix}_1 e^{-ik_{1n}x} e^{i\omega t} + D_2 \begin{pmatrix} \sigma_p \\ p_i \\ p_o \end{pmatrix}_2 e^{-ik_{2n}x} e^{i\omega t} + D_3 \begin{pmatrix} \sigma_p \\ p_i \\ p_o \end{pmatrix}_3 e^{-ik_{3n}x} e^{i\omega t} \quad (21)$$

여기서,

$$k_{xn} = \omega/c_{xn} \quad n=1,2,3$$

D_1, D_2, D_3 는 다음과 같이 $x=0$ 에서의 경계조
 건으로부터 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} \{f\} &\equiv \begin{pmatrix} f_p \\ f_i \\ f_o \end{pmatrix} \\ &= D_1 \begin{pmatrix} \sigma_p \\ p_i \\ p_o \end{pmatrix}_1 + D_2 \begin{pmatrix} \sigma_p \\ p_i \\ p_o \end{pmatrix}_2 + D_3 \begin{pmatrix} \sigma_p \\ p_i \\ p_o \end{pmatrix}_3 \quad (22) \\ \begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{pmatrix} &= \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_p \\ p_i \\ p_o \end{pmatrix}_1 & \begin{pmatrix} \sigma_p \\ p_i \\ p_o \end{pmatrix}_2 & \begin{pmatrix} \sigma_p \\ p_i \\ p_o \end{pmatrix}_3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} f_p \\ f_i \\ f_o \end{pmatrix} \quad (23) \end{aligned}$$

식(21)에서 보다시피 시추공 내에 주어진 음향자
 극(Acoustical Disturbance)은 세 개의 모드로 분
 해되어 그 모드에 해당하는 속도로 전파되어 나간다.

2.4 단면변화에 따른 반사

지금까지는 축방향으로 균일한 시추공에 대해 해
 석을 하였다. 그러나 실제 시추공은 균일하지 않고,
 단면의 변화가 있는 곳에서는 반사가 일어나게 된다.
 Fig 2와 같이 두 개의 서로 다른 균일하고 무한히
 긴 시추공이 $x=0$ 에서 접합되어 있고, 왼쪽으로부터
 입사파가 전파되어 오는 경우를 고려해 보자.

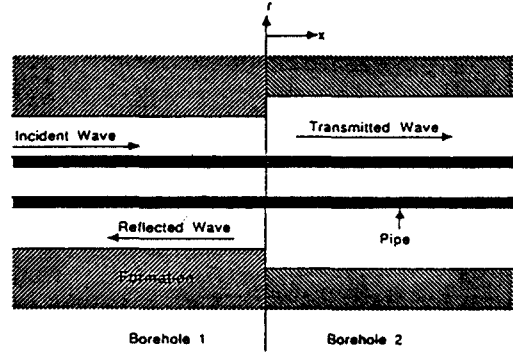


Fig. 2 Reflection due to discontinuity

입사파는 2.3.2절에서 설명한 바와 같이 세 개의
 모달성분으로 분해되어 각자의 전파속도를 갖고 접
 합점($x=0$)에 도달하게 되고, 여기서 반사파와 전달파
 가 생긴다. n번째 모달성분이 입사될 때, 그에 대한
 반사파와 전달파 또한 해당되는 시추공에 대한 세
 개의 모드로 분해되어 전파되며 응력 및 압력 분포
 에 대해 식으로 표현하면 다음과 같다.

$$\{p\}_I = I_n \{p\}_n^1 e^{-ik_{1n}x} e^{i\omega t} \quad (24)$$

$$\{p\}_R = [R_1 \{p\}_1^1 e^{ik_{1n}x} + R_2 \{p\}_2^1 e^{ik_{2n}x} + R_3 \{p\}_3^1 e^{ik_{3n}x}] e^{i\omega t} \quad (25)$$

$$\{p\}_T = [T_1 \{p\}_1^2 e^{-ik_{1n}x} + T_2 \{p\}_2^2 e^{-ik_{2n}x} + T_3 \{p\}_3^2 e^{-ik_{3n}x}] e^{i\omega t} \quad (26)$$

여기서,

$\{p\}_I, \{p\}_R, \{p\}_T$ 입사파, 반사파, 전달파의 압력분포
 I_n, R_n, T_n 입사파, 반사파, 전달파의 n^{th} 모드의 크기
 $\{p\}_n^l$: l^{th} 시추공에서의 n^{th} 압력모드
 k_{xn}^l : l^{th} 시추공에서의 n^{th} 모드의 축방향
 wave number

압력모드는, 식(17)로부터 각 시추공에서의 축 방향 변위모드를 구하고, 식(19)를 이용하여 속도모드를 구하여, 식(20)을 이용하여 구한다. 접합점 $x=0$ 에서의 조건은 다음과 같이, 파이프에 대해서는 힘의 평형과 속도의 연속성이 만족되어야 하고[4], 유체에 대해서는 질량의 보존과 압력의 연속성이 만족되어야 한다[8].

$$A_p^1(\sigma_{pI} + \sigma_{pR}) = A_p^2\sigma_{pT}, \quad \text{at } x=0 \quad (27)$$

$$v_{pI} + v_{pR} = v_{pT}, \quad \text{at } x=0 \quad (28)$$

$$p_{iI} + p_{iR} = p_{iT}, \quad \text{at } x=0 \quad (29)$$

$$A_i^1(v_{iI} + v_{iR}) = A_i^2v_{iT}, \quad \text{at } x=0 \quad (30)$$

$$p_{oI} + p_{oR} = p_{oT}, \quad \text{at } x=0 \quad (31)$$

$$A_o^1(v_{oI} + v_{oR}) = A_o^2v_{oT}, \quad \text{at } x=0 \quad (32)$$

여기서,

- A_p^1 : l^{th} 시추공의 파이프의 단면적
- A_i^1 : l^{th} 시추공의 inner mud layer 단면적
- A_o^1 : l^{th} 시추공의 outer mud layer 단면적
- $(\sigma_{pI}, \sigma_{pR}, \sigma_{pT}), (v_{pI}, v_{pR}, v_{pT})$: 입사파, 반사파, 전달파에 의한 파이프의 응력과 속도
- $(p_{iI}, p_{iR}, p_{iT}), (v_{iI}, v_{iR}, v_{iT})$: 입사파, 반사파, 전달파에 의한 inner mud의 압력과 속도
- $(p_{oI}, p_{oR}, p_{oT}), (v_{oI}, v_{oR}, v_{oT})$: 입사파, 반사파, 전달파에 의한 outer mud의 압력과 축방향 속도

식(24), (25), (26)은 압력에 대한 식이고, 속도에 대해서도 속도에 대한 모드를 사용하여 같은 형태로 나타낼 수 있다. 따라서, 왼쪽시추공에서 단위크기의 n 번째 모달성분이 입사될 때, 식(27)-(32)에 이들을 대입하면, 다음과 같이 계수 $R_1, R_2, R_3, T_1, T_2, T_3$ 를 구할 수 있다.

$$\begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -\sigma_{pI}^1 & -\sigma_{pR}^1 & -\sigma_{pT}^1 & A_p^1\sigma_{pI}^2 & A_p^1\sigma_{pR}^2 & A_p^1\sigma_{pT}^2 \\ -p_{iI}^1 & -p_{iR}^1 & -p_{iT}^1 & p_{iI}^2 & p_{iR}^2 & p_{iT}^2 \\ -p_{oI}^1 & -p_{oR}^1 & -p_{oT}^1 & p_{oI}^2 & p_{oR}^2 & p_{oT}^2 \\ v_{pI}^1 & v_{pR}^1 & v_{pT}^1 & v_{pI}^2 & v_{pR}^2 & v_{pT}^2 \\ v_{iI}^1 & v_{iR}^1 & v_{iT}^1 & A_i^1v_{iI}^2 & A_i^1v_{iR}^2 & A_i^1v_{iT}^2 \\ v_{oI}^1 & v_{oR}^1 & v_{oT}^1 & A_o^1v_{oI}^2 & A_o^1v_{oR}^2 & A_o^1v_{oT}^2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \sigma_{pI}^1 \\ p_{iI}^1 \\ p_{oI}^1 \\ v_{pI}^1 \\ v_{iI}^1 \\ v_{oI}^1 \end{pmatrix} \quad (33)$$

여기서,

$$\begin{aligned} A_p^1 &= A_p^2/A_p^1 \\ A_i^1 &= A_i^2/A_i^1 \\ A_o^1 &= A_o^2/A_o^1 \end{aligned}$$

$(\sigma_{pI}^1, p_{iI}^1, p_{oI}^1, v_{pI}^1, v_{iI}^1, v_{oI}^1)$ l^{th} 시추공에서의 n^{th} 모드의 압력과 속도

압력에 대한 모드는 식(20)으로 부터 구하는 데, 식(33)에서 음의 부호가 나타나는 이유는 반사파의 경우에는 음향파가 반대 방향으로 전파되므로 전파 속도를 음의 값으로 하여야 하기 때문이다.

지금까지는 하나의 모달성분에 대한 해석으로, 접합점에서 세 개의 반사파모드와 세 개의 전달파모드로 분해된다. 따라서 일반적인 입사파의 경우, 입사파는 세 개의 모드로 분해되며 따라서 아홉 개의 반사파모드와 아홉 개의 전달파모드가 존재하게 된다.

3. 계산에 및 고찰

식(14)에서 Off-diagonal 항들을 무시하면, 각 층에서의 비연성 전파속도를 구할 수 있다. 이렇게 구한 두 유체층에서의 전파속도의 비 (M')은 다음과 같다.

$$M' = \frac{c_{xp}}{c_{xi}} = \frac{M_o}{M_i} = \frac{\sqrt{1+B/K_a}}{\sqrt{1+B/K_b+B/K_c}} \quad (34)$$

M' 이 1에 가까울수록 두 유체층 사이의 심한 연성작용이 일어나게 되는데, 실제의 석유시추공에 대한 계산을 통하여, M' 의 값에 따른 연성정도의 차이를 검토하였다.

실제 계산은 지름이 12.6 inch인 시추공에 지름이 5 inch인 steel 파이프가 있는 경우에 대해 수행하였다. 첫번째 예는 formation이 clay일 경우로, M' 이 1보다 상당히 작은 값을 갖게 되며 연성효과가 거의 없다. 두번째 예는 formation이 limestone일 경우로, M' 이 1에 상당히 가까우며 따라서 연성효과가 매우 크다. 해석에 필요한 입력자료는 다음과 같다.

- Radii: $a=4.276$ inch, $b=5.0$ inch, $c=12.6$ inch
- Mud: $\rho_m=2.027$ slug/ft³, $B=5.30 \times 10^7$ lb/ft²
- Pipe: $\rho_p=15.18$ slug/ft³, $E=4.32 \times 10^9$ lb/ft², $\nu=0.25$

Clay : $G = 4.17 \times 10^6 \text{ lb/ft}^2$

Limestone : $G = 4.17 \times 10^8 \text{ lb/ft}^2$

3.1 연성효과가 작은 경우

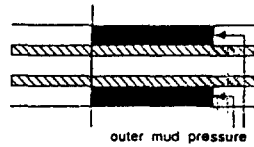
formation이 clay일 경우, 식(34)에 의하면 M' 이 0.269로 1보다 상당히 작은 값을 갖게 되어 다음 설명과 같이 연성효과가 거의 없다.

계산결과로서, 축방향 음향전파속도와 압력모드를 Fig. 3에 나타냈다. 각 모드는 주 압력을 갖는 층이 확실히 나타난다. 첫번째 모드에서는 outer mud가, 두번째 모드에서는 inner mud가, 세번째 모드는 파이프가 주 압력층이 된다. 따라서, 첫번째 모드와 두번째 모드는 mud 모드라 부르며, 이 경우 outer mud 모드와 inner mud 모드로 확실히 구별된다. 세번째 모드는 파이프 모드라 부른다. 이런 경우 축방향 전파속도는 앞에서 설명한 비연성 전파속도와 큰 차이를 보이지 않는다.

이 시추공에 단위 진폭의 조화 압력을 inner mud의 한쪽 끝($x=0$)에서 가하면, 2.3.2절에서 설명한 바와 같이 세 개의 압력모드로 분해되어 각자의 속도로 전파된다. 이 경우 임의의 위치에서의 inner mud와 outer mud의 압력은 다음과 같다.

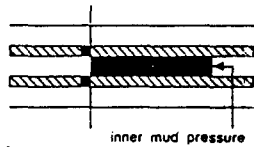
(1) First Mode ($c_{21} = 1274 \text{ ft/sec}$)

$$\begin{Bmatrix} \sigma_r \\ p \\ p_s \end{Bmatrix}_1 = \begin{Bmatrix} 0.011 \\ -0.012 \\ 1 \end{Bmatrix}$$



(2) Second Mode ($c_{21} = 4738 \text{ ft/sec}$)

$$\begin{Bmatrix} \sigma_r \\ p \\ p_s \end{Bmatrix}_2 = \begin{Bmatrix} -0.116 \\ 1 \\ 0.0017 \end{Bmatrix}$$



(3) Third Mode ($c_{21} = 16937 \text{ ft/sec}$)

$$\begin{Bmatrix} \sigma_r \\ p \\ p_s \end{Bmatrix}_3 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0.0067 \\ -4.2 \times 10^{-4} \end{Bmatrix}$$

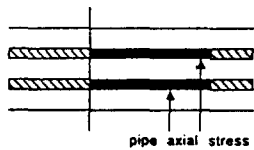


Fig. 3 Pressure mode-shapes in clay ($M' = 0.99$)

$$p_i = 1.0 e^{-i\omega\left(\frac{x}{4738} - t\right)} + 2 \times 10^{-5} e^{-i\omega\left(\frac{x}{1274} - t\right)} + 7 \times 10^{-4} e^{-i\omega\left(\frac{x}{16937} - t\right)}$$

$$p_o = 2 \times 10^{-3} e^{-i\omega\left(\frac{x}{4738} - t\right)} + 2 \times 10^{-3} e^{-i\omega\left(\frac{x}{1274} - t\right)} + 7 \times 10^{-6} e^{-i\omega\left(\frac{x}{16937} - t\right)}$$

이 경우에는, inner mud 모드가 주가 되며 다른 항들은 이 항에 비교하면 무시할 정도이다. 층들 간의 연성이 없으므로, 단지 inner mud 모드가 주 모드로서 전파되어 나간다.

3.2 연성효과가 큰 경우

formation이 limestone인 경우, 식(34)에 의하면 M' 이 0.994로 1에 매우 가까우므로 다음 설명과 같이 inner mud와 outer mud 사이의 연성효과가 크게 나타난다.

계산결과로서, 축방향 음향전파속도와 압력모드를 Fig. 4에 나타내었다. 세번째 모드는 파이프가 주 압력층이고, 첫번째 모드와 두번째 모드에서는 inner mud와 outer mud의 연성 형태로 나타난다. 따라서 축방향 전파속도는, 파이프모드에서는 비연성 전파속도와 차이가 없고, 두 mud 모드에서는 비연성 속도와 차이를 보이게 된다.

이 시추공에 단위 진폭의 조화 압력을 inner mud의 한쪽 끝($x=0$)에서 가하면, 2.3.2절에서 설명한 바와 같이 세 개의 압력모드로 분해되어 각자의 속도로 전파된다. 이 경우 임의의 위치에서의 inner mud와 outer mud의 압력은 다음과 같다.

$$p_i = 0.45 e^{-i\omega\left(\frac{x}{4591} - t\right)} + 0.55 e^{-i\omega\left(\frac{x}{4867} - t\right)} + 6 \times 10^{-4} e^{-i\omega\left(\frac{x}{16949} - t\right)}$$

$$p_o = -0.18 e^{-i\omega\left(\frac{x}{4591} - t\right)} + 0.18 e^{-i\omega\left(\frac{x}{4867} - t\right)} + 1 \times 10^{-4} e^{-i\omega\left(\frac{x}{16949} - t\right)}$$

이 경우에는 두 mud 모드가 거의 같은 기여를 하는데, 같은 주파수를 갖고 진폭과 파장이 서로 비슷한 두 음향파의 합성이므로 inner mud와 outer mud에서의 압력은 시추공 축을 따라 amplitude modulation이 일어나게 된다. 따라서 어느 특정한 위치에서는 압력이 작아지게 되고, 압력 계측이 어려

워지게 된다.

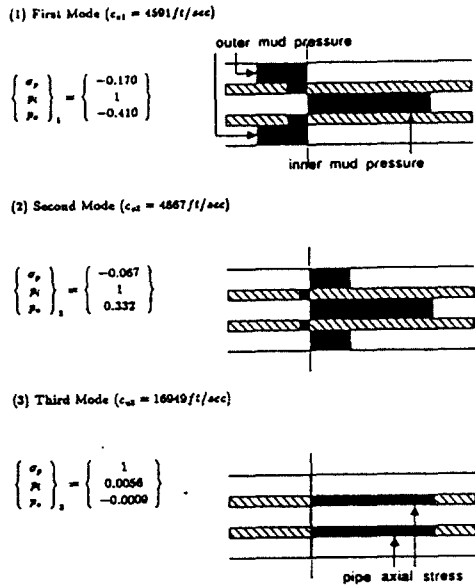


Fig. 4 Pressure mode-shapes in limestone ($M = 0.99$)

4. FEM 결과와의 비교 및 검토

본 연구의 결과를 검증할 목적으로, M.I.T.의 ERL Lab에서 지질 및 해양 연구를 위하여 개발된 유한요소법 프로그램으로 3.2절의 예에 대해서 해석을 수행하였다. 해석에 있어서는 저주파수 가정을 제외한 2.1절의 가정을 그대로 사용하여 입력하였고, 주파수를 변화시켜가면서 음향전파속도와 모드를 구하였다.

Fig. 5에서, 점선은 3.2절의 결과로서 두 mud 모드에 대한 전파속도를 나타내고, 실선은 유한요소법의 결과 중 해당되는 모드의 전파속도를 나타낸 것이다. 본 연구에서의 저주파수 가정은 결과적으로 반경방향으로는 0-th order solution을 가정한 것이 되므로, Fig. 5에서와 같이 축 방향 음향전파속도는 non-dispersive 이다.

봉(radially-free bar)에서의 음향전파의 경우, 축 방향의 파장이 봉의 지름의 3 배 이상이 되면 저주파수 가정은 유효하다는 것이 검증되어 있다[4]. 석유시추공에 대해서는 각 layer의 지름(혹은 유효지름)을 사용하여야 하나 안전하게 시추공의 지름을 사

용하면, 첫번째 모드의 경우($c=4591$ ft/sec, $d=12.6$ inch)에는

$$f < 1457 \text{ Hz}$$

일 때 유효하다. Fig. 5에서 보면, 1.5 KHz까지는 유한요소법과 1.5% 미만의 차이로 일치하고, 고주파수가 될수록 큰 차이를 보이게 된다.

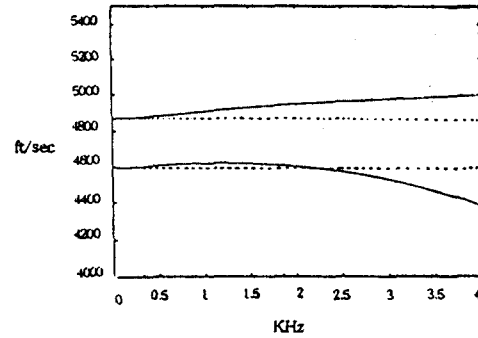


Fig. 5 Comparison of 1st and 2nd wave propagation speeds in section 3.2 with FEM results

석유시추공은 봉 보다 훨씬 복잡한 구조물이므로, 본 연구결과의 유효 주파수 범위를 결정하는 방법으로 [4]의 결과를 직접 이용하는 데는 세심한 주의가 필요하다. 예를 들면, 2.2.2절에서의 암석층의 해석은 저주파수 가정으로 부터 Bessel 함수의 small value approximation을 한 결과인데, clay와 같이 강성이 낮은 경우에는 이에 대한 제한이 [4]에 의한 제한보다 더 심하게 될 수도 있다.

5. 결론

본 연구에서는 석유시추공을 유체와 고체로 이루어지는 원통형 다층 도파관으로 모델링하여 저주파 음향의 전파에 대한 이론적 모델과 해석방법을 개발하였다. 또한 실제 시추공에 대한 해석을 수행하여 본 모델의 유용성을 검토하였고, 유한요소법에 의한 계산 결과와의 비교 검토를 한 결과 잘 일치함을 확인함으로써 본 연구에서 개발된 이론적 모델과 해석방법을 검증하였다. 본 연구의 결과 다음과 같은 것들이 밝혀졌다.

균일한 석유시추공에서의 음향전파는 세 개의 주 모드 형태로 전파되며, 각 모드는 고유의 inner mud의 압력과 파이프에서의 축 응력 및 outer mud

의 압력의 분포를 갖고 각자의 속도로 전파된다. 가장 빠른 모드는 파이프 모드로서 파이프의 축방향 응력파가 주가 되며, 드릴파이프의 종진동 해석과 관련된다. 나머지 두 모드는 mud 모드로서 inner mud와 outer mud의 압력파가 주가 된다.

이 mud 모드에서는 inner mud와 outer mud가 파이프의 radial flexibility에 의해 연성이 되는데, 연성 정도는 주로 파이프와 암석층의 radial flexibility의 비에 의해 결정된다. 연성이 심한 경우에는, mud pulse telemetry system 에서 inner mud에 압력 펄스를 가하면 주로 이 두 mud 모드로 분해되어 각자의 속도로 전파된다. 이런 경우는 기존의 모델로는 해석이 불가능하다.

하나의 입사파는 세 개의 모달성분으로 분해되어 전파되며, 각 모달성분은 단면의 변화가 있는 곳에서는 반사가 일어나게 된다. 반사파와 전달파 또한 각각 해당되는 시추공의 세 개의 모드로 분해되어 전파된다.

본 연구에서는 무시하였던 유체의 점성의 영향은, 파이프가 비압축성 점성유체 내에서 축방향으로 운동을 할 때 그 파이프에 작용하는 힘을 계산함으로써, 부가질량과 감쇄로 처리할 수 있다. 또한 운동방정식의 유도과정 중 반경방향으로 무한한 암석에 대한 해석 결과를 이용하여, 암석으로 방사되는 에너지를 계산할 수 있으며 이로부터 각 모드에 대한 방사감쇄를 구할 수 있다.

참 고 문 헌

- [1] Douglas S. Drumheller, Acoustical Properties of Drillstrings, Project Report SAND88-0502, Geothermal Research Division, Sandia National Laboratories, August 1988
- [2] J. E. White, Underground Sound, Elsevier, New York, 1983
- [3] C. H. Cheng and Toxoz, "Elastic Wave Propagation in a Fluid-filled Borehole and Synthetic Acoustic Logs," Journal of Geophysics, 46:1042-1053, 1981
- [4] K. F. Graff, Wave Motion in Elastic Solids, Ohio University Press, Ohio, 1973
- [5] M. C. Junger and D. Feit, Sound, Structures, and their Interaction, MIT Press, Cambridge, Massachusetts, 1986
- [6] Philip M. Morse and K. Uno Ingard, Theoretical Acoustics, McGraw-Hill Company, 1968
- [7] H. Medwin, "Speed of Sound in Water: A Simple Equation for Realistic Parameters," Journal of Acoustical Society of America, 58(6):1318-1319, 1975
- [8] A. P. Dowling and J. E. Ffowcs Williams, Sound and Sources of Sound, pages 63-65, Ellis Horwood Limited, West Sussex, England, 1983
- [9] H. Y. Lee, Drillstring Axial Vibration and Wave propagation in Boreholes, MIT PhD Thesis, 1991